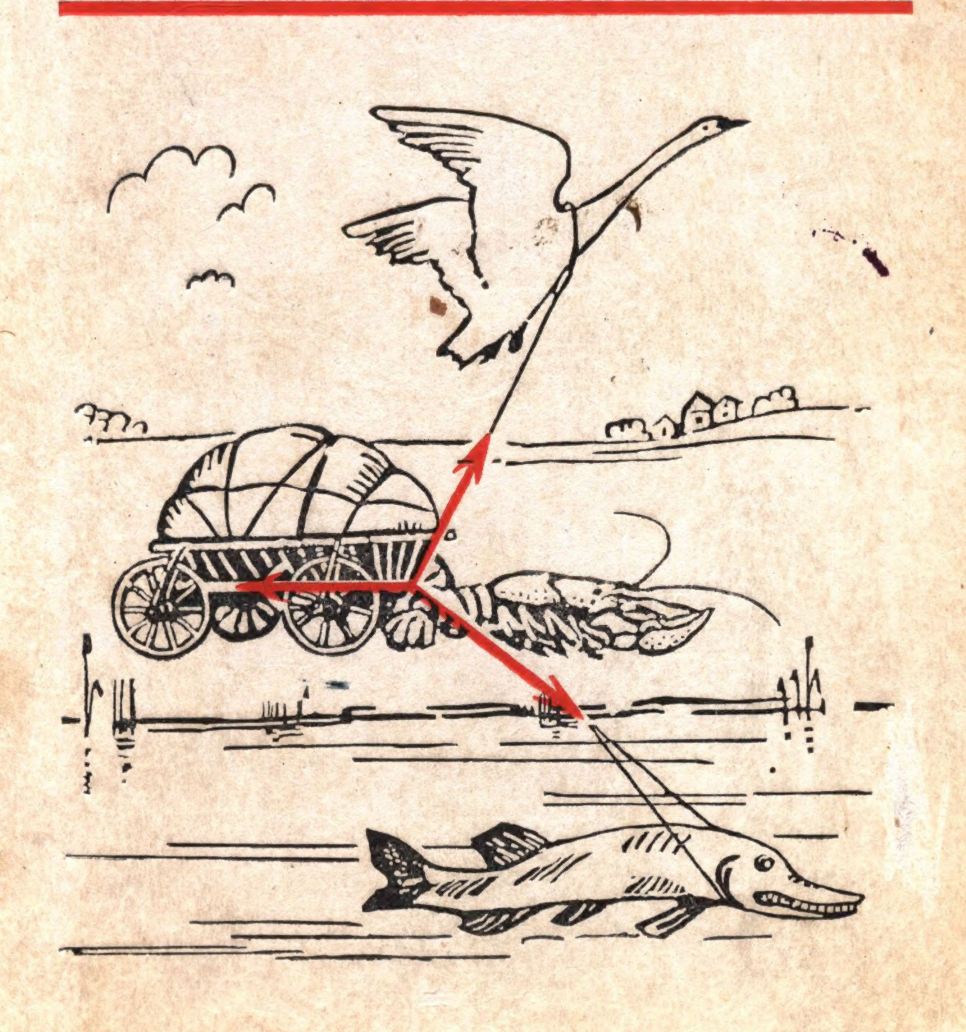
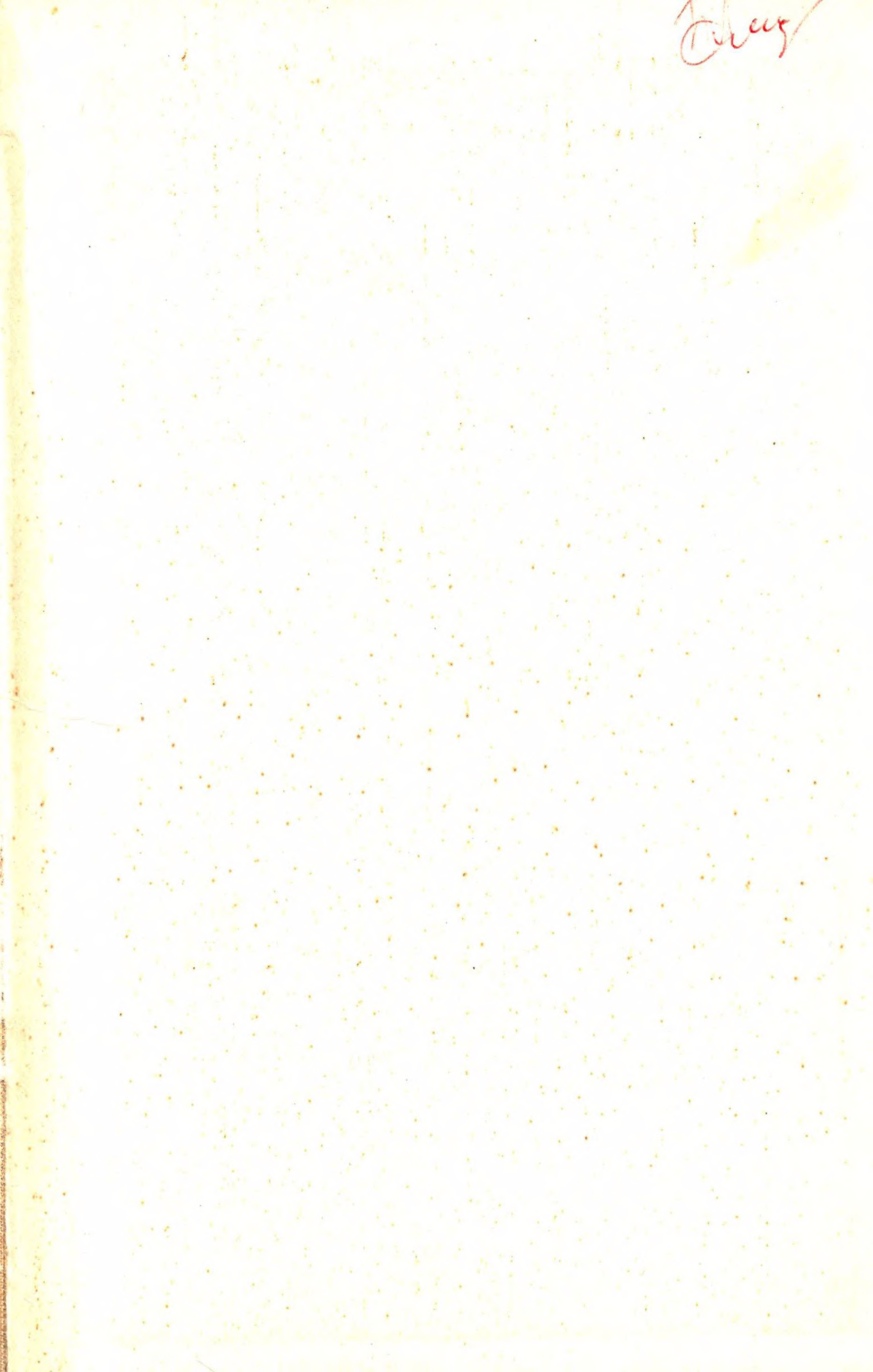
ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ





ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для слушателей подготовительных отделений
высших учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

53
З-15
УДК 53

Авторы:
Г. А. Бендриков, Б. Б. Буховцев,
В. В. Керженцев, Г. Я. Мякишев

Задачи по физике для поступающих в вузы. Издание третье, переработанное. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1976 г.

Сборник задач по физике может служить пособием для самостоятельной подготовки к конкурсным экзаменам по физике в вузы.

Сборник составлен в основном из задач, предлагавшихся на приемных экзаменах в Московском государственном университете в последние годы. К большинству разделов даны краткие указания, касающиеся общей методики решения задач, и перечень формул, используемых при решении. Основные задачи снабжены подробными решениями.

Задачник может быть рекомендован учащимся подготовительных отделений и курсов, старших классов средних общеобразовательных школ, техникумов и специальных средних школ, лицам, занимающимся самообразованием, а также преподавателям физики средних школ.

З $\frac{20401-091}{053(02)-76}$ 103-76

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Со времени последнего издания сборника задач практика приемных экзаменов в МГУ обогатилась многими новыми задачами, в том числе предлагавшимися на вновь образованных факультетах МГУ (факультет вычислительной математики и кибернетики и факультет почвоведения). Третье издание учитывает этот материал.

При переработке книги изъята часть решений задач и оставлены лишь ответы. Это сделано в соответствии с пожеланиями подготовительных отделений и курсов, которые широко пользуются задачником, и ставит целью стимулировать самостоятельную работу учащихся. Подробные решения оставлены только в основных задачах, на которые и должны опираться пользующиеся книгой.

Кроме того в сборник включено около 300 новых задач из числа предлагавшихся на разных факультетах МГУ в последние годы.

Авторы заранее благодарны за замечания, способствующие улучшению книги.

Авторы

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий сборник предназначен в помощь поступающим в высшие учебные заведения при подготовке к экзаменам по физике. Он содержит задачи по всем вопросам программы приемных экзаменов, кроме задач на волновые свойства света и задач по атомной физике, практически не встречавшихся в экзаменационных билетах. В сборнике помещены в основном задачи, предлагавшиеся на приемных экзаменах по физике на физическом, механико-математическом, химическом, геологическом, биолого-почвенном и географическом факультетах Московского государственного университета за целый ряд лет.

В сборнике представлены задачи разной трудности, что, с одной стороны, преследует методические цели, а с другой стороны, отражает различную степень сложности задач, фактически встречающихся в экзаменационных билетах. В сборник включены также задачи, несколько выходящие за рамки действующей в настоящее

время программы по физике для поступающих в вузы. Таковыми являются некоторые задачи по колебаниям, задачи на расчет электрических полей в диэлектриках, ряд задач раздела «Электромагнитная индукция», все задачи раздела «Переменный ток» и некоторые задачи по оптике. В большинстве случаев эти задачи относятся к вопросам, которые так или иначе разбираются в школьных учебниках по физике. Некоторые из этих вопросов в течение ряда лет входили и в программу приемных экзаменов в вузы. Авторы считают, что разбор указанных задач поможет читателю более свободно ориентироваться в основном материале программы по физике.

В целях развития навыков и культуры решения физических задач многие из них снабжены подробными решениями. Все решения построены по единому, наиболее целесообразному плану: составление необходимых уравнений, решение их в общем виде, подстановка численных данных. В решениях задач математика применяется в полном объеме программы средней школы.

К большинству разделов задачника даны краткие указания, касающиеся общей методики решения задач, и перечень основных формул, используемых при решении. В ряде разделов применяются общие методы решения задач, которые, хотя и не выходят за рамки программы средней школы и могут быть легко освоены поступающими в вузы, в средней школе используются далеко не всегда. В частности, при решении задач по механике составляются уравнения для проекций на координатные оси величин, характеризующих движение; при решении задач на газы используется наиболее общая форма объединенного газового закона с универсальной газовой постоянной; для расчета сложных электрических цепей предлагается пользоваться правилами Кирхгофа. Усвоение подобных методов решения задач значительно облегчает подготовку к вступительным экзаменам и помогает по поступлении в вуз сравнительно легко перейти от школьных методов обучения к вузовским.

В связи с предпочтительным использованием системы единиц СИ в преподавании физики решение большинства задач дается в этой системе.

Труд между авторами сборника распределился следующим образом: Г. Я. Мякишевым написан раздел «Механика», кроме задач по кинематике, В. В. Керженцевым — «Кинематика» и «Теплота», Г. А. Бендриковым — «Электричество» и Б. Б. Буховцевым — «Оптика». Общее редактирование задач сборника выполнено Б. Б. Буховцевым.

Авторы выражают глубокую благодарность В. Г. Зубову и Г. Е. Пустовалову, немало способствовавшим улучшению книги.

Авторы

ЗАДАЧИ

ГЛАВА I

МЕХАНИКА

Изучение механики обычно начинают с кинематики. Кинематика изучает механическое движение с геометрической точки зрения, без рассмотрения сил, действующих на тела.

Задачей кинематики является определение кинематических характеристик движения — положения (координат) точек тел, скоростей этих точек, их ускорений, времени движения и т. д., — и получение уравнений, связывающих эти характеристики между собой. Эти уравнения позволяют по известным значениям одних характеристик находить значения других и тем самым дают возможность при минимальном числе исходных данных полностью описывать движение тел.

При решении задач механики, и в частности кинематики, нужно в первую очередь выбрать систему координат, задать ее начало и положительные направления координатных осей и выбрать начало отсчета времени. Без выбора системы отсчета описать движение невозможно. В соответствии с характером задач, рассматриваемых в дальнейшем, мы будем пользоваться в случае прямолинейного движения системой координат, состоящей из одной прямой линии OS, вдоль которой происходит движение, с началом отсчета в точке O. В более сложных случаях будет применяться декартова прямоугольная система координат со взаимно перпендикулярными осями OX и OY, пересекающимися в точке O, которая является началом отсчета.

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движение, которое рассмотрено в этом параграфе, описывается кинематическими уравнениями (так называемыми законами движения), дающими зависимость координаты s и скорости v от времени:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad (1)$$

$$v = v_0 + at, \qquad (2)$$

где a — ускорение, t — время, протекшее с начала отсчета, т. е. с момента, когда тело имело начальную координату s_0 и начальную

скорость v_0. При постоянной величине ускорения ($a = \text{const}$) уравнения (1) и (2) описывают равнопеременное движение, при $a = 0$ — равномерное. Все остальные формулы равнопеременного движения, например связь между начальной скоростью и расстоянием, проходимым телом до полной остановки, $s = v_0^2/2a$, легко получить из этих уравнений.

Количество уравнений типа (1) и (2) зависит как от характера движения, так и от выбора системы координат. Например, при выборе в качестве системы координат оси O_1S (рис. 1) для точки, движущейся из A в B по прямой с начальной скоростью $\boldsymbol{v}_0$ и ускорением $\boldsymbol{a}$, направленным против положительного направления координатной оси, уравнения (1) и (2) будут иметь вид

$$s = |s_0| + |v_0|t - \frac{|a|t^2}{2}, \quad v = |v_0| - |a|t.$$

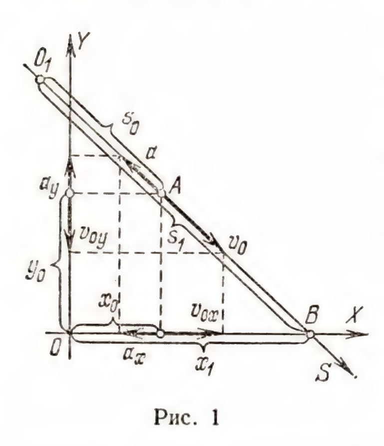


Рис. 1

Для описания этого же движения можно взять также прямоугольную систему координат с осями OX и OY, расположенными, как показано на рис. 1. Положение точки в этом случае будет определяться ее координатами x и y. При движении точки ее проекции перемещаются вдоль координатных осей. Скорость точки можно представить в виде суммы двух составляющих, направленных вдоль координатных осей. Модули этих составляющих равны модулям проекций v_x и v_y скорости на соответствующие оси. Аналогично модули составляющих ускорения равны модулям проекций a_x и a_y. Для каждой координаты и проекции скорости на соответствующую ось может быть написана своя пара кинематических уравнений:

$$x = |x_0| + |v_{0x}|t - \frac{|a_x|t^2}{2}, \quad v_x = |v_{0x}| - |a_x|t;$$

$$y = |y_0| - |v_{0y}|t + \frac{|a_y|t^2}{2}, \quad v_y = -|v_{0y}| + |a_y|t.$$

Здесь x_0, y_0 — начальные координаты, а v_{0x}, v_{0y} — проекции начальной скорости на соответствующие оси. О выборе знаков перед v_{0x}, v_{0y}, a_x и a_y см. ниже.

Описания движения в различных системах координат эквивалентны между собой в том смысле, что при известном расположении двух систем координат относительно друг друга по величинам, найденным в первой системе, можно определить соответствующие величины во второй. Например, легко убедиться, что расстояние AB (см. рис. 1), пройденное точкой и равное в первой системе координат $s_1 - s_0$, выражается через расстояния $x_1 - x_0$ и y_0, на которые

переместились за это время проекции точки: $s_1 - s_0 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + y_0^2}$; начальная скорость v_0 может быть найдена, если известны ее проекции на оси координат v_{0x} и v_{0y}, по формуле $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$, а ускорение $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

При решении задач следует выбирать такую систему координат, в которой уравнения, описывающие движение, получаются проще. Ясно, что при прямолинейном движении система уравнений получается проще, если берется одна ось координат OS, направленная вдоль движения. При криволинейном движении приходится брать прямоугольную систему координат с двумя осями и представлять движение в виде суммы двух движений, происходящих вдоль осей координат. Уравнения получаются проще, когда направления осей выбраны так, что некоторые из проекций в течение всего времени движения равны нулю.

При составлении уравнений очень важен вопрос о знаках перед модулями проекций s_0, v_0 и a. Если координата отсчитывается в положительную сторону от начала отсчета (положительное направление оси координат указывается стрелкой на конце оси), то ей приписывается знак плюс. Проекции ускорений и скоростей считаются положительными, если направление соответствующей составляющей совпадает с положительным направлением оси, в противном случае в уравнениях они пишутся со знаком минус. Например, на рис. 1 проекция ускорения на ось OY положительна, а проекция скорости на ту же ось отрицательна. Неизвестные величины лучше писать со знаком плюс. При нахождении этих величин в процессе решения задачи их знак определится автоматически. Например, для тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, если ось OS направлена вертикально вверх и начало отсчета совпадает с поверхностью земли, $s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ (ускорение свободного падения g направлено вниз). В этом случае знак координаты s зависит от t — для $t > 2v_0/g$ координата s отрицательна.

Иногда координата s отождествляется с величиной пройденного пути, а уравнение (1) называют уравнением пути. В общем случае это неправильно. Путь — это сумма всех расстояний, пройденных вдоль траектории. В частности, в только что приведенном примере координата s в момент времени $t = 2v_0/g$ будет равна нулю (тело упадет на землю), в то время как пройденный телом к этому времени путь l будет равен сумме расстояний от земли до наивысшей точки, достигнутой телом, и от этой точки до земли ($l = v_0^2/g$).

При решении задач на движение нескольких тел рекомендуется пользоваться одной системой координат. В некоторых случаях бывает удобно систему координат связать с одним из движущихся тел и рассматривать движение остальных тел относительно избранного.

Эти указания относятся прежде всего к §§ 1—3, однако они могут понадобиться и при решении других задач во всей первой главе.

---

§ 1. Прямолинейное движение

1. Со станции вышел товарный поезд, идущий со скоростью $v_1 = 36$ км/ч. Через $t_1 = 30$ мин по тому же направлению вышел экспресс, скорость которого $v_2 = 72$ км/ч. Через какое время t после выхода товарного поезда и на каком расстоянии s от станции экспресс нагонит товарный поезд? Решить задачу также графически.

2. Из городов A и B, расстояние между которыми $L = 120$ км, одновременно выехали навстречу две автомашины, скорости которых постоянны и равны $v_1 = 20$ км/ч, $v_2 = 60$ км/ч. Машины, пройдя каждая 120 км, остановились. 1) Найти, через какое время t и на каком расстоянии l от города C, находящегося на полпути между A и B, встретятся автомашины. 2) Решить задачу графически. 3) Построить график зависимости расстояния Δl между машинами от времени t.

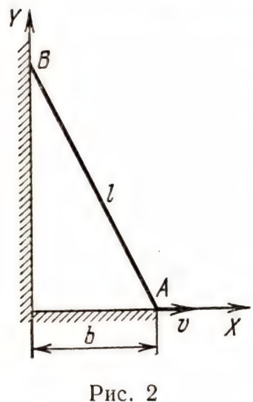


Рис. 2

3. Стержень AB длиной l опирается концами о пол и стену (рис. 2). Найти зависимость координаты y конца B от времени при движении конца A с постоянной скоростью v от положения, указанного на рисунке.

4. По двум параллельным путям в одном направлении идут товарный поезд длиной $L_1 = 630$ м со скоростью $v_1 = 48{,}6$ км/ч и электропоезд длиной $L_2 = 120$ м со скоростью $v_2 = 102{,}6$ км/ч. В течение какого времени электропоезд будет обгонять товарный?

5. Два поезда идут навстречу друг другу, один со скоростью $v_1 = 36$ км/ч, другой со скоростью $v_2 = 54$ км/ч. Пассажир в первом поезде замечает, что второй поезд проходит мимо него в течение $t = 6$ с. Какова длина второго поезда?

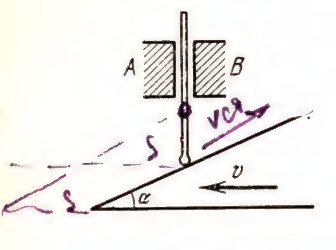


Рис. 3

6. Теплоход, длина которого $L = 300$ м, движется по прямому курсу в неподвижной воде с постоянной скоростью v_1. Катер, имеющий скорость $v_2 = 90$ км/ч, проходит расстояние от кормы движущегося теплохода до его носа и обратно за время $t = 37{,}5$ с. Определить скорость v_1 теплохода.

7. На наклонную плоскость, составляющую с горизонтом угол α, опирается стержень, который может перемещаться только по вертикали благодаря направляющему устройству AB (рис. 3). С какой скоростью $v_{ст}$ поднимается стержень, если наклонная плоскость движется с постоянной скоростью v?

8. Капли дождя на окне неподвижного трамвая оставляют полосы, наклоненные под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. При движении трамвая со скоростью $v_т = 18$ км/ч полосы от дождя вертикальны.

Определить скорость капель в безветренную погоду и скорость ветра $v_в$.

9. Пловец переплывает реку шириной H. Под каким углом α к течению он должен плыть, чтобы переправиться на противоположный берег в кратчайшее время? Где он в этом случае окажется, переплыв реку, и какой путь s он проплывает, если скорость течения равна v_1, скорость пловца относительно воды v_2?

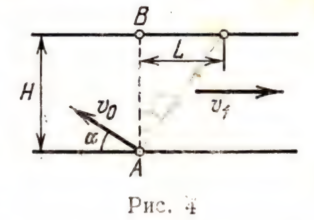


Рис. 4

10. Лодочник, переправляясь через реку шириной H из пункта A, все время направляет лодку под углом α к берегу (рис. 4). Определить скорость лодки относительно воды v_0, если скорость течения v_1, а лодку снесло ниже пункта B на расстояние L.

11. Корабль идет на запад со скоростью v. Известно, что ветер дует с юго-запада. Скорость ветра, измеренная на палубе корабля, равна w_1. Найти скорость ветра w относительно земли.

12. Точка P_1 движется из A по направлению к B равномерно со скоростью v_1. Одновременно точка P_2 движется из B по направлению к C равномерно со скоростью v_2 (рис. 5). Расстояние $AB = l$. Острый угол ABC равен α. Определить, в какой момент времени t расстояние r между точками P_1 и P_2 будет минимальным и каково это расстояние.

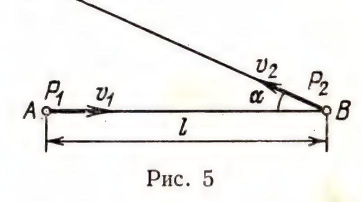


Рис. 5

13. Один паровоз прошел половину пути l со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, а другую половину — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Другой паровоз шел половину времени t со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, а половину времени — с $v_2 = 40$ км/ч. Какова средняя скорость каждого паровоза?

14. Материальная точка, имеющая начальную скорость $v_0 = 2$ м/с, двигалась в течение отрезков времени: $t_1 = 3$ с равномерно, $t_2 = 2$ с с ускорением $a_2 = 2$ м/с^2, $t_3 = 5$ с с ускорением $a_3 = 1$ м/с^2, $t_4 = 2$ с с ускорением $a_4 = -3$ м/с^2 и, наконец, $t_5 = 2$ с равномерно, со скоростью, полученной в конце промежутка времени t_4. Определить конечную скорость $v_к$, пройденный путь s и среднюю скорость $v_{ср}$ на этом пути. Задачу решить аналитически и графически.

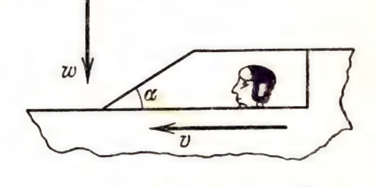


Рис. 6

15. Самолет, летящий горизонтально со скоростью v, попадает в полосу дождя, падающего вертикально с скоростью w. Фонарь кабины пилота имеет два одинаковых стекла: верхнее — горизонтальное и переднее — наклоненное к

горизонту под углом α (рис. 6). Каждое из стекол имеет площадь S. Найти отношение количеств воды, падающих на переднее и верхнее стекла.

16. Тело, движущееся равноускоренно с начальной скоростью $v_0 = 1$ м/с, приобретает, пройдя некоторое расстояние, скорость $v_1 = 7$ м/с. Какова была скорость тела на половине этого расстояния?

17. Тело движется с постоянным ускорением вдоль прямой из некоторого положения с некоторой начальной скоростью. Известны положения тела x_1, x_2, x_3, отсчитанные вдоль линии движения от некоторого произвольного начала отсчета в моменты времени соответственно t_1, t_2 и t_3. Найти ускорение тела.

18. Парашютист спускается с постоянной скоростью $v = 5$ м/с. На расстоянии $h = 10$ м от земной поверхности у него отвалилась пуговица. На сколько позже приземлится парашютист, чем пуговица? Действием сопротивления воздуха на пуговицу пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

19. За время t тело прошло путь s, причем его скорость увеличилась в n раз. Считая движение равноускоренным с начальной скоростью, определить величину ускорения тела.

20. По одному направлению из одной точки одновременно начали двигаться два тела: одно равномерно со скоростью $v = 980$ см/с, а другое равноускоренно без начальной скорости с ускорением $a = 9{,}8$ см/с^2. Через какое время второе тело догонит первое?

21. Два поезда прошли одинаковый путь s за одно и то же время t, однако один поезд, трогаясь с места, прошел весь путь равноускоренно с ускорением $a = 3$ см/с^2, а другой поезд половину пути шел со скоростью $v_1 = 18$ км/ч, а другую половину — со скоростью $v_2 = 54$ км/ч. Найти путь s, пройденный поездами.

22. Автомобиль трогается с места с постоянным ускорением a_1 и, достигнув скорости v, некоторое время идет равномерно, затем тормозит с постоянным ускорением a_2 до остановки. Определить время t движения автомобиля, если он прошел путь s.

23. Поезд прошел путь $s = 60$ км за время $t = 52$ мин. Сначала он шел с ускорением $+a$, в конце с ускорением $-a$, остальное время с максимальной скоростью $v = 72$ км/ч. Чему равно абсолютное значение ускорения, если начальная и конечная скорости равны нулю?

24. Какая допустима предельная скорость приземления парашютиста v, если человек может безопасно прыгать с высоты $h = 2$ м?

25. С крыши дома высотой $H_0 = 28$ м брошен вверх камень со скоростью $v_0 = 8$ м/с. Определить скорость v падения камня на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

26. Тело падает без начальной скорости с высоты $H = 45$ м. Найти среднюю скорость $v_{ср}$ падения на нижней половине пути.

27. За какое время t свободно падающее без начальной скорости тело пройдет сотый сантиметр своего пути?

28. Свободно падающее без начальной скорости тело в последнюю секунду падения прошло 2/3 своего пути s. Найти путь, пройденный телом.

29. Тело брошено вертикально вверх с некоторой высоты с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с. Определить координату H и скорость v тела через время $t = 10$ с, а также пройденный за это время путь s (принять $g = 10$ м/с²).

30. Свободно падающее без начальной скорости тело спустя промежуток времени t после начала падения находится на высоте $H_1 = 1100$ м, а еще через $\Delta t = 10$ с — на высоте $H_2 = 120$ м над поверхностью земли. С какой высоты H падало тело?

31. Тело, брошенное вертикально вверх, дважды проходит через точку на высоте h. Промежуток времени между этими прохождениями равен Δt. Найти начальную скорость тела v_0 и время Δt_0 от начала движения тела до возврата в начальное положение.

32. Одно тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0, другое падает с высоты H_0 без начальной скорости. Движения начались одновременно и происходят по одной прямой. Найти зависимость расстояния между телами ΔH от времени.

33. С башни высотой h бросают одновременно два шарика: один — вверх со скоростью v_1, другой — вниз со скоростью v_2. Каков промежуток времени, отделяющий моменты их падения на землю?

34. С крыши падают одна за другой две капли. Через $t_2 = 2$ с после начала падения второй капли расстояние между каплями стало $s = 25$ м. На сколько раньше первая капля оторвалась от крыши?

35. С высоты $H_1 = 10$ м над землей без начальной скорости начинает падать камень. Одновременно с высоты $H_2 = 5$ м вертикально вверх бросают другой камень. С какой начальной скоростью v_0 брошен второй камень, если известно, что камни встретились на высоте $h = 1$ м над землей?

36. Два тела брошены вертикально вверх с одинаковыми начальными скоростями с интервалом времени T. С какой скоростью будет двигаться второе тело относительно первого?

37. Лодка подтягивается к высокому берегу озера при помощи веревки, которую наматывают с постоянной скоростью $v = 1$ м/с на цилиндрический барабан, находящийся на высоте $h = 6$ м над уровнем воды (рис. 7). Найти зависимость скорости лодки $v_л$ от длины веревки L. В частности, определить величину скорости лодки для момента времени, когда $L = 10$ м, и расстояние, на которое лодка переместится из этого положения в течение времени $t = 1$ с.

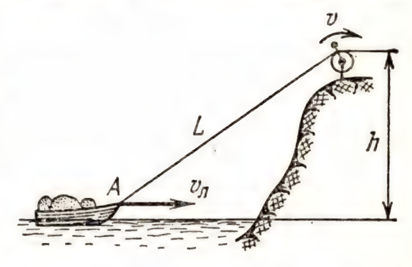


Рис. 7

38. По наклонной плоскости, длина которой $L = 2{,}5$ м, одновременно начали двигаться два тела: одно — вверх с начальной скоростью $v_0 = 50$ см/с, другое — вниз без начальной скорости. Через какое время t тела встретятся и какой будет их относительная скорость в месте встречи?

39. Тело соскальзывает без трения с наклонной плоскости. Определить угол α наклона плоскости к горизонту, если средняя скорость тела за первые 0,5 с на 245 см/с меньше, чем средняя скорость тела за первые 1,5 с.

40. Стальной шарик, упавший с высоты $h = 1{,}5$ м на стальную доску, отскакивает от нее с потерей 25% скорости. Определить время T, которое проходит от начала движения шарика до его второго падения на доску.

41. Мяч свободно падает с высоты $H = 120$ м на горизонтальную плоскость, при каждом отскоке скорость его уменьшается в $n = 2$ раза. Построить график скорости и найти пройденный мячом путь с начала падения до остановки.

42. На движущуюся вертикально вверх со скоростью v ровную горизонтальную плиту свободно падает шарик. Расстояние от точки начала падения шарика до его места встречи с плитой равно h. На какую высоту H от этого места подскочит шарик после соударения с плитой? Удар абсолютно упругий; плита, обладая очень большой массой, не изменяет своей скорости в результате удара о нее шарика.

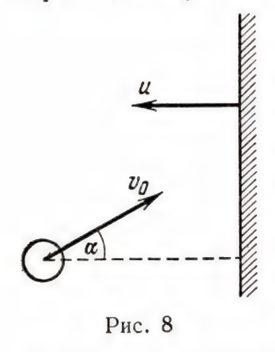


Рис. 8

43. Вертикальная гладкая стенка движется в горизонтальном направлении со скоростью u. Летящий в горизонтальной плоскости со скоростью v_0 шарик ударяется о стенку. Направление полета шарика составляет угол α с перпендикуляром к стенке (см. рис. 8, на котором показано сечение стенки горизонтальной плоскостью). Найти величину скорости v шарика после удара о стенку. Стенка, обладая очень большой массой, не изменяет своей скорости в результате удара о нее шарика. Удар абсолютно упругий. Влияние силы тяжести на полет шарика не учитывать.

§ 2. Криволинейное движение

44. Тело брошено с высоты H в горизонтальном направлении со скоростью v_0. Определить, как зависят от времени координаты тела и его полная скорость. Вывести уравнение траектории.

45. С башни высотой $H = 25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с. На каком расстоянии x от основания башни он упадет на землю?

46. Камень, брошенный горизонтально с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с, упал на расстоянии $l = 10$ м от вертикали, опущенной

на землю из точки выброса. С какой высоты был брошен камень?

47. Тело брошено со стола горизонтально. При падении на пол его скорость равна $v = 7{,}8$ м/с. Высота стола $H = 1{,}5$ м. Чему равна начальная скорость тела v_0?

48. Камень брошен с горы по горизонтальному направлению со скоростью 15 м/с. Через сколько времени t его скорость будет направлена под углом $\alpha = 45°$ к горизонту?

49. Камень, брошенный горизонтально с крыши дома со скоростью $v_0 = 15$ м/с, упал на землю под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Какова высота дома H?

50. Тело на высоте $H = 2$ м бросают в горизонтальном направлении так, что к поверхности земли оно подлетает под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Какое расстояние по горизонтали пролетает тело? Сопротивление воздуха не учитывать.

51. Тело брошено горизонтально. Через время $t = 5$ с после броска угол β между направлениями полной скорости v и полного ускорения a стал равным 45°. Определить полную скорость v тела в этот момент. Ускорение свободного падения полагать равным $g = 10$ м/с².

52. Камень брошен с высоты H вверх под углом α к горизонту со скоростью v_0. Найти угол β, составляемый скоростью камня с горизонтом, и величину его скорости v в момент падения на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

53. Тело брошено горизонтально со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Найти нормальное a_n и касательное a_τ ускорения через время $t = 1$ с после начала движения тела.

54. Тело брошено под углом α_0 к горизонту со скоростью v_0. Определить, как зависят от времени скорость v тела и угол β ее наклона к горизонту.

55. Тело брошено под углом α_0 к горизонту со скоростью v_0. Найти зависимость координат тела от времени (законы движения тела) и получить уравнение траектории.

56. Тело брошено с земли под углом α_0 к горизонту со скоростью v_0. На какую высоту $h_{\text{макс}}$ поднимется тело? В течение какого времени t будет продолжаться подъем вверх?

57. Тело брошено с земли под углом α_0 к горизонту со скоростью v_0. 1) Какое время t тело будет находиться в полете? 2) На каком расстоянии s по горизонтальному направлению от места бросания тело упадет на землю?

58. Для тела, брошенного под углом α_0 к горизонту с начальной скоростью v_0, построить график зависимости вертикальной проекции скорости v_y: 1) от времени t, 2) от координаты y (высоты), 3) от координаты x (расстояния по горизонтали от места бросания).

59. Камень брошен под углом $\alpha_0 = 30°$ к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Через какое время t камень будет на высоте $h = 1$ м?

60. Камень, брошенный под углом $\alpha_0 = 30°$ к горизонту, дважды был на одной высоте h: спустя время $t_1 = 3$ с и время $t_2 = 5$ с после начала движения. Определить начальную скорость v_0 и высоту h.

61. Тело, брошенное под углом $\alpha_0 = 60°$ к горизонту, через время $t = 4$ с после начала движения имело вертикальную проекцию скорости $v_y = 9{,}8$ м/с. Определить расстояние s между местом бросания и местом падения.

62. Камень брошен с башни высотой H со скоростью v_0, направленной под углом α_0 к горизонту. На каком расстоянии s от основания башни упадет камень?

63. Два тела брошены под углами α_1 и α_2 к горизонту из одной точки. Каково отношение сообщенных им скоростей, если они упали на землю в одном и том же месте? Сопротивление воздуха не учитывать.

64. Тело брошено под углом к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Определить скорость v тела в тот момент, когда оно оказалось на высоте $H = 3$ м.

65. Камень брошен под углом к горизонту с высоты H с начальной скоростью v_0. С какой скоростью v камень упадет на поверхность земли?

66. Тело брошено под углом α_0 к горизонту с начальной скоростью v_0. Через какие промежутки времени после бросания скорость тела будет составлять с горизонтом углы $\beta_1 = 45°$ и $\beta_2 = 315°$?

67. Какую начальную скорость имел снаряд, вылетевший из пушки под углом $\alpha_0 = 30°$ к горизонту, если он пролетел расстояние $L = 17\,300$ м? Известно, что сопротивление воздуха уменьшило дальность полета в четыре раза.

68. Мотоциклист въезжает на высокий берег рва (рис. 9). Какую минимальную скорость должен иметь мотоциклист в момент отрыва от берега, чтобы перескочить ров?

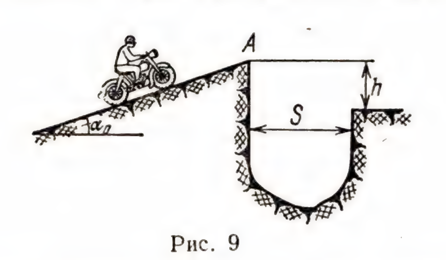


Рис. 9

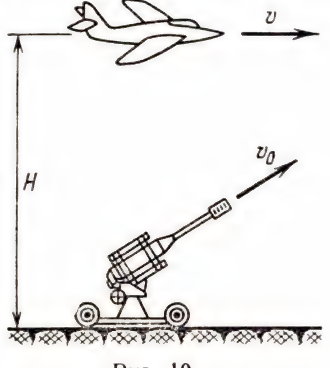


Рис. 10

69. Камень брошен с башни под углом $\alpha_0 = 30°$ к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Каково кратчайшее расстояние L между местом бросания и местом нахождения камня спустя время $t = 4$ с после бросания?

70. Сверхзвуковой самолет летит горизонтально со скоростью $v = 1440$ км/ч на высоте $H = 20\,000$ м. Когда самолет пролетает над зенитной установкой, из орудия производится выстрел (рис. 10).

Какова должна быть минимальная начальная скорость v_0 снаряда и угол α_0 ее с горизонтом, чтобы снаряд попал в самолет?

71. На некоторой высоте из одной точки одновременно брошены два тела — одно вверх, другое вниз, оба со скоростью $v_0 = 30$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к вертикальному направлению. Определить разность уровней, на которых будут находиться эти тела спустя время $t = 2$ с.

72. С самолета, летящего горизонтально со скоростью v_0 на высоте H, сброшен груз. На какой высоте h скорость груза будет направлена под углом α к горизонту? Сопротивлением воздуха пренебречь.

73. Самолет, оторвавшись от взлетной дорожки, летит по прямой линии, составляющей с горизонтом угол $\alpha_0 = 30°$, с начальной скоростью $v_0 = 50$ м/с и ускорением $a = 3$ м/с². Из самолета спустя время $t_1 = 5$ с после отрыва его от земли брошен по вертикали вниз ключ со скоростью $u_0 = 3$ м/с относительно самолета. На каком расстоянии от места взлета самолета упадет ключ?

74. С высоты $h = 2$ м вниз под углом к горизонту $\alpha = 60°$ брошен мяч с начальной скоростью $v_0 = 8{,}7$ м/с. Определить расстояние x между двумя последовательными ударами мяча о землю. Удары считать абсолютно упругими.

75. Шарик свободно падает по вертикали на наклонную плоскость. Пролетев расстояние $h = 1$ м, он упруго отражается и второй раз падает на ту же плоскость. Найти расстояние s между точками соприкосновения шарика и плоскости, если последняя составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$.

§ 3. Вращательное движение

76. Определить радиус R маховика, если при вращении скорость точек на его ободе $v_1 = 6$ м/с, а скорость точек, находящихся на $l = 15$ см ближе к оси, $v_2 = 5{,}5$ м/с.

77. Линейная скорость точек окружности вращающегося диска равна $v_1 = 3$ м/с, а точек, находящихся на расстоянии $l = 10$ см ближе к оси вращения, $v_2 = 2$ м/с. Сколько оборотов делает диск в минуту?

78. Велосипедист едет с постоянной скоростью v по прямолинейному участку дороги. Найти мгновенные скорости точек A, B, C, D, E, лежащих на ободе колеса и указанных на рис. 11, относительно земли.

Рис. 11

79. Материальная точка движется по окружности радиуса $R = 20$ см равноускоренно с касательным ускорением $a_\tau = 5$ см/с². Через какое время t после начала движения нормальное (центростремительное) ускорение a_n будет больше a_τ в $n = 2$ раза?

80. Материальная точка, начав двигаться равноускоренно по окружности радиуса $R = 1$ м, прошла за время $t_1 = 10$ с путь $s = 50$ м. С каким центростремительным ускорением a_n двигалась точка спустя время $t_2 = 5$ с после начала движения?

81. Ось вращающегося диска движется поступательно в горизонтальном направлении со скоростью v. Ось горизонтальна, направление ее движения перпендикулярно к ней самой. Определить мгновенную скорость v_1 верхней точки диска, если мгновенная скорость нижней точки v_2.

82. При вращении тела по окружности угол между полным ускорением a и линейной скоростью v равен $\alpha = 30°$. Каково численное значение отношения a_n/a_τ?

83. Найти линейную скорость v и центростремительное ускорение a_n точек на поверхности земного шара: а) на экваторе, б) на широте $\varphi = 60°$. Средний радиус земного шара $R = 6400$ км.

84. Маховое колесо, вращавшееся со скоростью $n_0 = 240$ об/мин, останавливается в течение времени $t = 0{,}5$ мин. Считая его движение равнопеременным, найти, сколько оборотов N оно сделало до полной остановки.

85. Поезд въезжает на закругленный участок пути с начальной скоростью $v_0 = 54$ км/ч и проходит путь $s = 600$ м за время $t = 30$ с. Радиус закругления равен $R = 1$ км. Определить скорость v и полное ускорение a поезда в конце этого пути.

86. С колеса автомобиля, движущегося со скоростью v, слетают комки грязи. Радиус колеса R. На какую высоту h над дорогой будет отбрасываться грязь, оторвавшаяся от точки A колеса, положение которой указано на рис. 12? Изменится ли величина h, если колесо будет катиться с пробуксовкой?

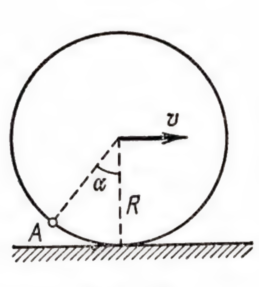


Рис. 12

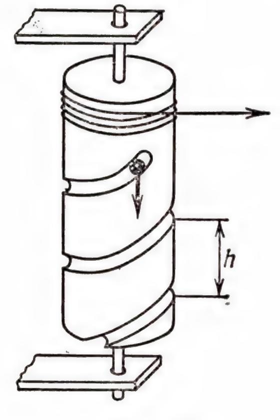


Рис. 13

87. В винтовой желоб (рис. 13) положен тяжелый шарик. С каким ускорением a нужно тянуть нить, навернутую на цилиндр с желобом, чтобы шарик падал свободно, если диаметр цилиндра D, а шаг винтового желоба h?

§ 4. Динамика прямолинейного движения

При решении динамических задач нужно прежде всего выяснить, какие силы действуют на тело, движением которого мы интересуемся. Необходимо изобразить эти силы на чертеже. При этом нужно отчетливо представлять себе, со стороны каких тел действуют рассматриваемые силы. Следует помнить, что силы «действия» и «противодействия», фигурирующие в третьем законе Ньютона, приложены к разным телам. Поэтому на данное тело может действовать лишь одна из этих двух сил.

В задачах обычно встречаются следующие типы сил.

1. *Сила тяжести.* Эта сила приложена к центру тяжести тела и направлена к центру Земли (рис. 14). Аналитически сила тяжести записывается так: $P = mg$. Изредка в задачах упоминается «тело весом P». Эти слова означают, что к телу приложена сила тяжести $P = mg$.

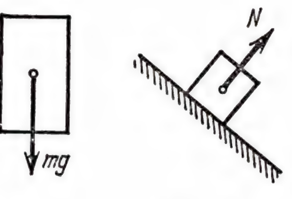


Рис. 14 Рис. 15

2. *Реакция опоры* (сила нормального давления). Это форма сил упругости (рис. 15). Реакция опоры перпендикулярна к поверхности соприкосновения тел. Зависимость реакции опоры от величины деформации в задачах обычно не рассматривается.

3. *Натяжение* нитей, веревок, тросов и т. п. (рис. 16). Если тела связаны невесомой нитью, то натянутая нить действует с одинаковыми силами как на одно, так и на другое тело. При этом нить может

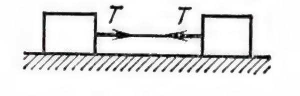


Рис. 16



Рис. 17

быть перекинута через систему невесомых блоков. Обычно нить считается нерастяжимой и зависимость натяжения нити от деформации не рассматривается.

4. *Сила трения.* Эта сила направлена по касательной к поверхности соприкосновения тел (рис. 17). Важно обратить внимание на неоднозначность силы трения покоя. При покое сила трения в зависимости от величины других сил, приложенных к телу, может меняться от нуля до некоторого максимального значения $f_{макс} = kN$, где k — коэффициент трения, а N — сила нормального давления. При скольжении обычно принимается, что $f = f_{макс}$ (рис. 18).

Рис. 18

Для того чтобы определить направление силы трения, можно применить следующий прием: предположить, что сила трения

мгновенно исчезла, и найти направления относительных скоростей трущихся тел. Векторы сил трения будут противоположны векторам относительных скоростей.

После того как найдены действующие на тело силы, следует записать *уравнение движения* (второй закон Ньютона). При движении по прямой второй закон Ньютона имеет форму: $ma = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$, где F_1, F_2, ... , F_n — проекции сил на прямую, по которой происходит движение. Положительное направление отсчета удобно выбирать совпадающим с направлением ускорения. В этом случае, если направление составляющей силы совпадает с направлением ускорения, то соответствующая проекция силы берется со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус. До того как задача решена, направление ускорения, вообще говоря, неизвестно и может быть выбрано произвольно. Если полученное в процессе решения задачи ускорение положительно, то его направление выбрано правильно, если отрицательно — то неправильно.

В направлении, перпендикулярном к прямолинейному движению, сумма проекций сил равна нулю, так как ускорение в этом направлении отсутствует. Этими равенствами можно воспользоваться в том случае, когда надо найти нормальное давление, определяющее силу трения.

Если рассматривается движение системы тел, то уравнения движения нужно записать для каждого тела системы. Задача может быть решена лишь тогда, когда число независимых уравнений равно числу неизвестных. В число неизвестных часто кроме величин, которые требуется найти по условию задачи, входят еще и силы реакций, натяжения нитей и силы трения, возникающие при взаимодействии тел системы.

Для решения задачи о движении системы связанных друг с другом тел одних уравнений движения, вообще говоря, недостаточно. Нужно записать еще так называемые *кинематические условия*, выражающие собой соотношения между ускорениями тел системы, обусловленные связями внутри нее. Например:

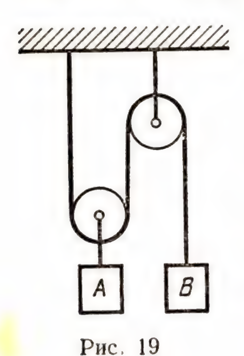


Рис. 19

1) тела, связанные нерастяжимой нитью, имеют одинаковые по величине ускорения, $|a_1| = |a_2|$ (обычно это соотношение подразумевается непосредственно при записи уравнений движения);

2) при наличии подвижного блока ускорение тела A в два раза меньше ускорения тела B (рис. 19), $|a_B| = 2|a_A|$.

Решение следует первоначально получить в общем виде и лишь затем подставлять числовые значения в избранной системе единиц. Полезно проследить, как будут изменяться найденные величины в зависимости от изменения величин, заданных в условии задачи.

Если в задаче требуется найти не только силы и ускорения, но также координаты (или пройденные пути) тел и их скорости, то кроме уравнений движения нужно использовать кинематические уравнения для координат и скоростей.

---

88. Поезд массой $m = 500$ тонн после прекращения тяги паровоза останавливается под действием силы трения $f = 10^5$ Н через одну минуту. С какой скоростью v шел поезд до момента прекращения тяги паровоза?

89. Паровоз на горизонтальном участке пути длиной $s = 600$ м развивает постоянную силу тяги $F = 14{,}7 \cdot 10^4$ Н. Скорость поезда возрастает при этом с $v_0 = 36$ км/ч до $v = 54$ км/ч. Определить силу сопротивления движению f, считая ее постоянной. Масса поезда $m = 1000$ тонн.

90. Воздушный шар массой M опускается с постоянной скоростью. Какое количество балласта m нужно выбросить, чтобы шар поднимался с той же скоростью? Подъемная сила воздушного шара Q известна.

91. С какой силой нужно действовать на тело с массой $m = 5$ кг, чтобы оно падало вертикально вниз с ускорением $a = 15$ м/с^2?

92. Автомобиль движется с ускорением $a = 1$ м/с^2. С какой силой F человек массой $m = 70$ кг давит на спинку сидения?

93. Стальная проволока выдерживает груз с массой до 450 кг. С каким наибольшим ускорением можно поднимать груз $m = 400$ кг, подвешенный на этой проволоке, чтобы она не оборвалась?

94. Веревка выдерживает груз с массой $m_1 = 110$ кг при подъеме его с некоторым ускорением по вертикали и груз с массой $m_2 = 690$ кг при опускании его с таким же по величине ускорением. Какова максимальная масса m груза, который можно поднять на этой веревке с постоянной скоростью?

95. Определить натяжение T каната, к которому подвешена клеть подъемной машины, если клеть массой 300 кг движется: 1) с ускорением $a_1 = 1{,}6$ м/с^2, направленным вверх; 2) с ускорением $a_2 = 0{,}8$ м/с^2, направленным вниз.

96. Вес лифта с пассажирами $P = 800$ кгс. Определить величину и направление ускорения лифта, если натяжение троса, на котором подвешена кабина лифта, равно $T = 600$ кгс.

97. К потолку движущегося лифта на нити подвешена гиря массой $m_1 = 1$ кг. К этой гире привязана другая нить, на которой подвешена вторая гиря массой $m_2 = 2$ кг. Найти натяжение T_2 верхней нити, если натяжение нити между гирями $T_1 = 9{,}8$ Н.

98. С какой силой будет давить на дно шахтной клети груз массой $m = 100$ кг, если клеть поднимается с ускорением $a = 24{,}5$ см/с^2?

99. Груз массой $m = 140$ кг, лежащий на полу кабины опускающегося лифта, давит на пол с силой $N = 1440$ Н. Определить величину и направление ускорения лифта.

100. В лифте установлены пружинные весы, на которых подвешено тело массой $m = 1$ кг. Что будут показывать весы, если: 1) лифт движется вверх с ускорением $a_1 = 4{,}9$ м/с²; 2) лифт движется вверх замедленно с ускорением $a_2 = 4{,}9$ м/с²; 3) лифт движется вниз с ускорением $a_3 = 2{,}45$ м/с²; 4) лифт движется вниз замедленно с ускорением $a_4 = 2{,}45$ м/с²?

101. Какая сила F требуется, чтобы телу массой $m = 2$ кг, лежащему на горизонтальной поверхности, сообщить ускорение $a = 20$ см/с²? Коэффициент трения между телом и поверхностью $k = 0{,}02$.

102. При быстром торможении трамвай, имевший скорость $v = 25$ км/ч, начал двигаться «юзом» (заторможенные колеса, не вращаясь, начали скользить по рельсам). Какой участок пути s пройдет вагон с момента начала торможения до полной остановки, если коэффициент трения колес о рельсы $k = 0{,}2$?

103. Камень, скользящий по гладкой поверхности, остановился, пройдя расстояние $s = 20{,}4$ м. Определить начальную скорость камня v, если сила трения камня о поверхность f составляет 6% от его веса.

104. На горизонтальной доске лежит груз. Какое ускорение в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз соскользнул с нее? Коэффициент трения между доской и грузом $k = 0{,}2$.

105. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой $M = 10$ кг, а на доске — брусок массой $m = 1$ кг. Какую минимальную силу F в горизонтальном направлении надо приложить к доске, чтобы брусок соскользнул с нее? Коэффициент трения между доской и бруском $k = 0{,}1$.

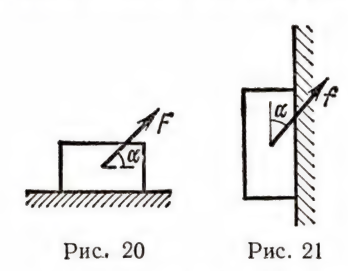


Рис. 20 Рис. 21

106. Тело движется по горизонтальной плоскости под действием силы F, направленной под углом α к горизонту (рис. 20). Найти ускорение тела, если на него действует сила тяжести P, а коэффициент трения между телом и плоскостью равен k. При какой величине силы F_1 движение будет равномерным?

107. Тело массой m движется вверх по вертикальной стене под действием силы f, направленной под углом α к вертикали (рис. 21). Коэффициент трения между телом и стеной равен k. Определить ускорение a тела.

108. Какой путь s за время t пройдет воз весом P, если щука и рак тянут его в противоположные стороны по горизонтали с силами F_1 и F_2, а лебедь тянет с силой F_3 в ту же сторону, что и рак, но под углом α к горизонту? Коэффициент трения k, начальная скорость воза равна нулю.

109. Тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с, достигло высшей точки подъема спустя время

$t = 2{,}5$ с. Определить среднее значение силы F сопротивления воздуха, действовавшей на тело во время полета, если масса тела $m = 40$ г.

110. Акробат прыгнул с трапеции на растянутую сетку, которая при этом прогнулась на расстояние $s = 1$ м. Масса акробата $m = 70$ кг, высота трапеции над сеткой $H = 6$ м. С каким ускорением a двигался акробат, прогибая сетку, и с какой силой N сетка давила на тело акробата?

111. Чему равна минимальная сила сопротивления воздуха, действующая на парашютиста и парашют при полностью раскрытом парашюте? Масса парашютиста с парашютом $m = 75$ кг.

112. Сила сопротивления, действующая на раскрытый парашют, пропорциональна квадрату скорости (коэффициент пропорциональности $k = 20$ Н·с²/м²). Масса парашютиста $m = 72$ кг. С какой высоты h должен спрыгнуть человек без парашюта, чтобы скорость его приземления равнялась скорости приземления парашютиста, прыгнувшего с большой высоты?

113. Два тела, массы которых $m_1 = 50$ г и $m_2 = 100$ г, связаны невесомой нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 22). С какой силой F можно тянуть первое тело, чтобы нить, способная выдержать нагрузку $T_{\text{макс}} = 5$ Н, не оборвалась? Изменится ли результат, если силу приложить ко второму телу?

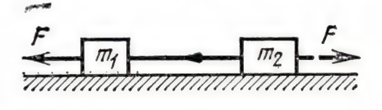


Рис. 22

114. Два тела, связанные нитью, лежат на гладкой горизонтальной плоскости. К телу массой m_1 приложена сила F_1, направленная вдоль плоскости, а к телу массой m_2 — сила $F_2 < F_1$, направленная в сторону, противоположную силе F_1. Найти натяжение нити T при движении тел.

115. Три тела, связанные невесомыми нитями, лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К телу массой m_1 приложена сила F_1, направленная вдоль плоскости, а к телу массой m_3 — сила $F_2 > F_1$, направленная в противоположную сторону (рис. 23). Найти натяжение T нити между телами с массами m_1 и m_2.

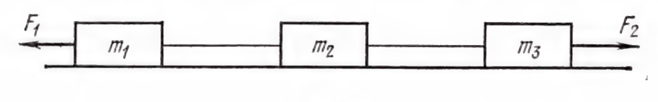


Рис. 23

116. На доску A, имеющую вес $P_1 = 0{,}18$ кгс, поставлена гиря весом $P_2 = 2$ кгс (рис. 24). Доска с грузом скользит с постоянной скоростью по доске B, когда на чашку C, имеющую вес $P_3 = 0{,}18$ кгс, положена гиря весом $P_4 = 0{,}5$ кгс. Найти коэффициент трения между досками A и B.

117. К одному концу веревки, перекинутой через блок, подвешен груз массой $m = 10$ кг (рис. 25). С какой силой F нужно тянуть вниз за другой конец веревки, чтобы груз поднимался с ускорением $a = 1$ м/с^2? Растяжением веревки и ее весом пренебречь.

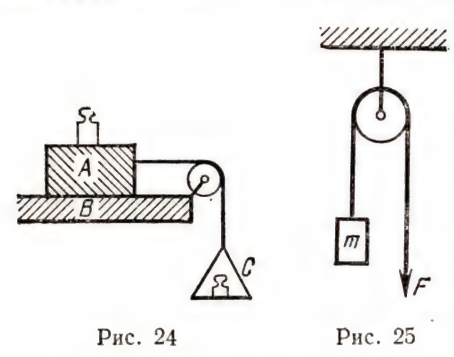


Рис. 24 Рис. 25

118. Неподвижный блок подвешен к динамометру. Через блок перекинут невесомый шнур, на концах которого укреплены грузы с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 8$ кг. Что показывает динамометр при движении грузов? Весом блока можно пренебречь.

119. Два груза висят на нити, перекинутой через блок с неподвижной осью. Масса одного груза $m = 500$ г. Известно, что нить не обрывается, если на другом ее конце закрепить груз массой $M = 1$ т и осторожно отпустить его. Какое натяжение T выдерживает в этом случае нить? Массой блока и нити можно пренебречь.

120. Невесомая и нерастяжимая нить перекинута через блок, массой которого можно пренебречь. На одном конце нити подвешено тело массой $m_1 = 30$ г. Другой конец нити соединен с легкой пружиной, к концу которой прикреплено тело массой $m_2 = 50$ г. Длина пружины в нерастянутом состоянии $l_0 = 10$ см. Под действием силы $F = 0{,}1$ Н пружина удлиняется на величину $x = 2$ см. Найти длину пружины l во время движения грузов, считая, что колебания в системе отсутствуют.

121. Две гири, имеющие массы $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 6{,}8$ кг, висят на концах нити, перекинутой через неподвижный блок. Легкая гиря находится на 2 м ниже тяжелой. Гири пришли в движение без начальной скорости. Через какое время t они окажутся на одной высоте?

122. На концах нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены тела, каждое из которых имеет массу $m = 240$ г. Какую массу m_1 должен иметь добавочный груз, положенный на одно из тел, чтобы каждое из них прошло за время $t = 4$ с путь $s = 160$ см?

123. Два груза с массами по $m = 100$ г каждый подвешены на концах нити, перекинутой через неподвижный блок. На один из грузов положен перегрузок $m_1 = 50$ г. С какой силой N будет действовать этот перегрузок на тело, на котором он лежит, когда вся система придет в движение?

124. В каком направлении и с каким ускорением будет перемещаться центр тяжести двух грузов весом P_1 и P_2 (пусть $P_2 > P_1$), если эти грузы связаны нитью, перекинутой через неподвижный блок?

125. Найти натяжение нити T в устройстве, изображенном на рис. 26. Массы тел соответственно равны $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г. Весом блоков можно пренебречь.

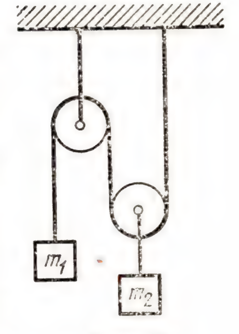


Рис. 26

126. Определить ускорение тела, соскальзывающего с наклонной плоскости, если угол наклона плоскости $\alpha = 30°$, а коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью равен $k = 0{,}3$.

127. С вершины наклонной плоскости, длина которой $l = 10$ м и высота $h = 5$ м, начинает двигаться без начальной скорости тело. Какое время t будет продолжаться движение тела до основания наклонной плоскости, если коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью $k = 0{,}2$? Какую скорость будет иметь тело у основания наклонной плоскости?

128. Тело начинает движение с начальной скоростью v_0 вверх по наклонной плоскости. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен k ($k < \operatorname{tg}\alpha$). Через какой промежуток времени t тело вернется в точку, из которой оно начало двигаться вверх?

129. По склону горы длиной $l = 50$ м на веревке спускают санки массой $m = 60$ кг. Высота горы $h = 10$ м. Определить силу натяжения веревки T, считая ее постоянной, если санки у основания горы имеют скорость $v = 5$ м/с, а сила трения f составляет 10% от силы тяжести, действующей на санки. Начальная скорость санок равна нулю.

130. На наклонной плоскости находится тело массой $m = 50$ кг, на которое действует горизонтально направленная сила $F = 294$ Н (рис. 27). Определить ускорение тела и силу, с которой оно давит на плоскость. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Трение не учитывается.

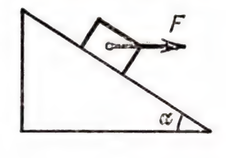


Рис. 27

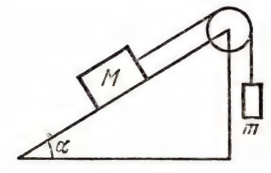


Рис. 28

131. Два тела связаны легкой нитью, перекинутой через невесомый блок, установленный на наклонной плоскости (рис. 28). Найти ускорение, с которым будут двигаться эти тела. Трением можно пренебречь. Массы тел равны соответственно $m = 10$ г и $M = 15$ г. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$.

132. Три груза связаны легкой нитью, перекинутой через невесомый блок, установленный на наклонной плоскости (рис. 29). Угол

наклона плоскости к горизонту равен α. Грузы имеют массы m_1, m_2 и m. Их начальные скорости равны нулю. Коэффициент трения между грузами и наклонной плоскостью равен k. Чему равно натяжение T нити, связывающей грузы, находящиеся на наклонной плоскости?

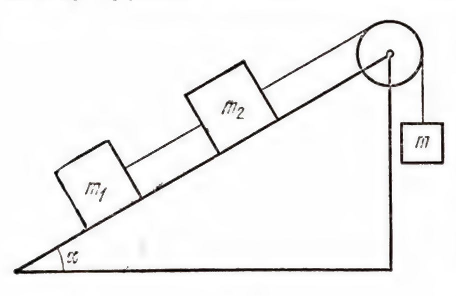


Рис. 29

133. Шар массой M лежит в ящике, который соскальзывает без трения с наклонной плоскости, угол наклона к горизонту которой равен α. Определить силы, с которыми шар давит на переднюю стенку и на дно ящика.

134. На наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, стоит кубик массой m. Наклонная плоскость находится в лифте, движущемся с ускорением a, направленным вверх. Определить силу N нормального давления кубика на плоскость. При каких значениях коэффициента трения k между кубиком и плоскостью кубик не будет соскальзывать вниз?

135. Доска, имеющая массу M, может двигаться без трения по наклонной плоскости с углом наклона α. В каком направлении и с каким ускорением a должен бежать по доске человек массой m, чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости?

136. На тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости, установлен стержень с подвешенным на нити шариком. Найти натяжение нити T, если шарик имеет массу $m = 2$ г. Плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 60°$.

137. На наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, находится бак с водой массой M. С какой силой F, параллельной наклонной плоскости, нужно двигать бак, для того чтобы поверхность воды в баке была параллельна наклонной плоскости? Коэффициент трения между дном бака и наклонной плоскостью равен k.

138. По тросу, составляющему с горизонтом угол α, катится без трения блок, к которому подвешено ведро с водой. Глубина воды в ведре равна h. Каково давление на дно ведра во время движения?

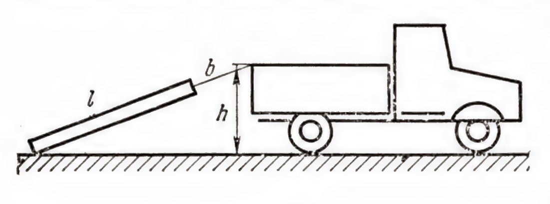


Рис. 30

139. С каким ускорением a должен ехать грузовик, чтобы бревно и канат, которым оно привязано к грузовику, составляли прямую линию (рис. 30)? Длина бревна l, а каната b. Канат привязан к грузовику на высоте h от поверхности земли.

§ 5. Закон сохранения количества движения

Из второго и третьего законов Ньютона следует, что изменение полного количества движения системы тел равно сумме импульсов внешних сил, действующих на тела системы. Так как количество движения и импульс силы — величины векторные, то такое равенство выполняется для проекций этих величин на любую прямую.

Таким образом,

$$(m_1v_1' + m_2v_2' + \ldots) - (m_1v_1 + m_2v_2 + \ldots) = F_1\,\Delta t + F_2\,\Delta t + \ldots,$$

где m_1, m_2,... — массы тел системы, v_1, v_2, ... и v_1', v_2', ... — проекции начальных и конечных скоростей этих тел на некоторое направление, а $F_1\,\Delta t$, $F_2\,\Delta t$, ... — проекции импульсов внешних сил на это же направление.

Если система замкнута, т. е. на тела, которые мы относим к этой системе, не действуют внешние силы, то сумма проекций импульсов внешних сил на любое направление равна нулю,

$$F_1\,\Delta t + F_2\,\Delta t + \ldots = 0,$$

и, следовательно,

$$m_1v_1' + m_2v_2' + \ldots = m_1v_1 + m_2v_2 + \ldots,$$

т. е. проекция количества движения системы на любое направление сохраняется неизменной. Однако и для незамкнутой системы может оказаться, что сумма проекций импульсов всех внешних сил на некоторое избранное направление равна нулю. Тогда остается неизменной проекция количества движения системы лишь на это направление. Проекции же количества движения на другие направления при этом не сохраняются.

Нужно иметь в виду, что если конечное состояние системы отдалено от начального малым интервалом времени (например, время выстрела или соударения тел), то импульсом $F\,\Delta t$ внешних сил, таких, как тяготение и вязкое трение, можно пренебречь и рассматривать систему как замкнутую.

При записи закона сохранения количества движения нужно следить за правильностью расстановки знаков. Некоторое направление произвольно выбирается за положительное. Составляющие (проекции) количества движения тела записываются со знаком плюс, если их направление совпадает с избранным направлением, и со знаком минус в противном случае. Для тех тел, направление движения которых не задано в условии задачи, знаки могут быть расставлены произвольно. Если в результате решения задачи будет найдено, что проекция количества движения положительна, то направление движения тела выбрано правильно, если отрицательна, то неправильно.

---

140. Какова средняя сила давления F на плечо при стрельбе из автомата, если масса пули $m = 10$ г, а скорость пули при вылете из канала ствола $v = 300$ м/с? Автомат делает $n = 300$ выстрелов в минуту.

141. Мяч массой $m = 150$ г ударяется о гладкую стенку под углом $\alpha = 30°$ к ней и отскакивает без потери скорости. Найти среднюю силу F, действующую на мяч со стороны стенки, если скорость мяча $v = 10$ м/с, а продолжительность удара $\Delta t = 0{,}1$ с.

142. Падающий вертикально шарик массой $m = 200$ г ударился об пол со скоростью $v = 5$ м/с и подпрыгнул на высоту $h = 46$ см. Чему равно изменение Δp количества движения шарика при ударе?

143. Из орудия массой $M = 3$ т, не имеющего противооткатного устройства (ствол жестко скреплен с лафетом), вылетает в горизонтальном направлении снаряд массой $m = 15$ кг со скоростью $v = 650$ м/с. Какую скорость u получает орудие при отдаче?

144. Снаряд массой $m = 20$ кг, летевший горизонтально со скоростью $v = 50$ м/с, попадает в платформу с песком массой $M = 10$ т и застревает в песке. С какой скоростью u начнет двигаться платформа?

145. Пушка, стоящая на очень гладкой горизонтальной площадке, стреляет под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Масса снаряда $m = 20$ кг, начальная скорость $v = 200$ м/с. Какую скорость приобретает пушка при выстреле, если ее масса $M = 500$ кг?

146. Орудие, имеющее массу ствола $M = 500$ кг, стреляет в горизонтальном направлении. Масса снаряда $m = 5$ кг, его начальная скорость $v = 460$ м/с. При выстреле ствол откатывается на расстояние $s = 40$ см. Определить среднее значение силы торможения f, возникающей в механизме, тормозящем ствол.

147. Снаряд массой $m_1 = 50$ кг, летящий под углом $\alpha = 30°$ к вертикали со скоростью $v = 800$ м/с, попадает в платформу, нагруженную песком, и застревает в нем. Найти скорость платформы u после попадания снаряда, если ее масса $m_2 = 16$ т.

148. Человек, стоящий на коньках на гладком льду реки, бросает камень, масса которого $m = 0{,}5$ кг. Спустя время $t = 2$ с камень достигает берега, пройдя расстояние $s = 20$ м. С какой скоростью начинает скользить конькобежец, если его масса $M = 60$ кг? Трение коньков и камня о лед не учитывать.

149. Два человека на роликовых коньках стоят друг против друга. Масса первого человека $m_1 = 70$ кг, а второго $m_2 = 80$ кг. Первый бросает второму груз массой $m = 10$ кг со скоростью, горизонтальная составляющая которой $v = 5$ м/с относительно земли. Определить скорость v_1 первого человека после бросания груза и скорость v_2 второго после того, как он поймает груз. Трение не учитывать.

150. Тело, масса которого $m_1 = 990$ г, лежит на горизонтальной поверхности. В него попадает пуля массой $m_2 = 10$ г и застревает в нем. Скорость пули направлена горизонтально и равна $v =$

$= 700$ м/с. Какой путь s пройдет тело до остановки, если коэффициент трения между телом и поверхностью $k = 0{,}05$?

151. Навстречу платформе массой M, груженной песком и движущейся со скоростью v, по гладкому наклонному желобу соскальзывает без начальной скорости тело массой m и застревает в песке. Длина желоба l, угол его наклона к горизонту α. Определить скорость u платформы после попадания в нее тела.

152. Ракета, масса которой вместе с зарядом $M = 250$ г, взлетает вертикально вверх и достигает высоты $H = 150$ м. Определить скорость v истечения газов из ракеты, считая, что сгорание заряда происходит мгновенно. Масса заряда $m = 50$ г.

153. С бронированной железнодорожной платформы общей массой $m_1 = 20$ т, движущейся со скоростью $u = 9$ км/ч, производится выстрел из пушки. Снаряд массой $m_2 = 25$ кг вылетает из орудия со скоростью $v = 700$ м/с. Каковы будут скорости платформы непосредственно после выстрела: 1) если направления движения платформы и выстрела совпадают; 2) если эти направления противоположны?

154. По горизонтальным рельсам со скоростью $v = 20$ км/ч движется платформа массой $m_1 = 200$ кг. На нее вертикально падает камень массой $m_2 = 50$ кг и движется в дальнейшем вместе с платформой. Через некоторое время в платформе открывается люк, и камень проваливается вниз. С какой скоростью u движется после этого платформа? Трение между платформой и рельсами не учитывать.

155. Ядро, летевшее в горизонтальном направлении со скоростью $v = 20$ м/с, разорвалось на две части. Массы осколков равны $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 5$ кг. Скорость меньшего осколка равна $v_2 = 90$ м/с и направлена так же, как и скорость ядра до разрыва. Определить скорость v_1 и направление движения большего осколка.

156. Две лодки движутся по инерции параллельными курсами навстречу друг другу. Когда лодки поравнялись, с одной из них на другую осторожно переложили груз массой $m = 25$ кг. После этого лодка, в которую переложили груз, остановилась, а вторая продолжала двигаться со скоростью $v = 8$ м/с. С какими скоростями v_1 и v_2 двигались лодки до встречи, если масса лодки, в которую переложили груз, $M = 1$ т?

157. Три лодки одинаковой массы M движутся по инерции друг за другом с одинаковой скоростью v. Из средней лодки в крайние одновременно перебрасывают грузы массой m со скоростью u относительно лодок. Какие скорости будут иметь лодки после перебрасывания грузов? Сопротивление воды не учитывать.

158. Человек, находящийся в лодке, переходит с носа на корму. На какое расстояние s переместится лодка длиной $l = 3$ м, если масса человека $m = 60$ кг, а масса лодки $M = 120$ кг? Сопротивление воды не учитывать.

159. Поезд массой $M = 500$ т шел равномерно по горизонтальному пути. От поезда отцепился последний вагон массой $m = 20$ т.

В момент, когда вагон остановился, расстояние между ним и поездом равнялось $s = 500$ м. Какой путь l_1 прошел вагон до остановки? Сопротивление движению пропорционально весу и не зависит от скорости движения.

160. Снаряд вылетает из орудия под углом α к горизонту со скоростью v_0. В верхней точке траектории снаряд разрывается на две равные части, причем скорости частей непосредственно после взрыва горизонтальны и лежат в плоскости траектории. Одна половина упала на расстоянии s от орудия по направлению выстрела. Определить место падения второй половины, если известно, что она упала дальше первой. Считать, что полет снаряда происходит в безвоздушном пространстве.

161. Снаряд летит в безвоздушном пространстве по параболе и разрывается в верхней точке траектории на две равные части. Одна половина снаряда упала вертикально вниз, вторая — на расстоянии s по горизонтали от места разрыва. Определить скорость снаряда перед разрывом, если известно, что взрыв произошел на высоте H и упавшая по вертикали вниз половина снаряда падала время τ.

§ 6. Статика

При решении задач на статику, так же как и при решении динамических задач, нужно прежде всего выяснить, какие силы действуют на рассматриваемые тела. Эти силы необходимо изобразить на чертеже.

В статике используются два типа уравнений, выражающих условия равновесия тела: $\sum\limits_i F_i = 0$ (сумма проекций действующих на тело сил на любое направление равна нулю) и $\sum\limits_i M_i = 0$ (сумма моментов этих сил относительно любой неподвижной оси равна нулю).

При решении задач на плоскости (именно такие задачи встречаются преимущественно) для проекций сил можно записать два независимых уравнения для взаимно перпендикулярных направлений (например, для горизонтального и вертикального). Целесообразно выбирать направления таким образом, чтобы проекции сил выражались наиболее просто, т. е. чтобы соответствующие косинусы между силами и выбранным направлением составляли 0 или 1 или были бы заранее известны. Нужно следить за тем, чтобы проекции сил, имеющих одинаковые направления, входили в уравнение с одними и теми же знаками.

Если рассматриваемые в задаче силы лежат в одной плоскости, то можно записать только одно независимое уравнение для моментов сил относительно оси, перпендикулярной к этой плоскости. Решение задачи упрощается, если ось выбрать так, чтобы в уравнение $\sum M_i = 0$ по возможности не входили моменты сил, знание

которых не требуется по условию задачи. Для этого нужно, чтобы плечи этих сил были равны нулю.

Моменты сил, вращающих тело по часовой стрелке, входят в уравнение с одним и тем же знаком, а моменты сил, вращающих тело против часовой стрелки, должны иметь противоположный знак.

Если направление составляющих отдельных сил или направление вращения для моментов этих сил не известно заранее, то, как и в задачах на динамику, знак может быть выбран произвольно, а о действительном направлении можно будет судить по результатам решения задачи.

При нахождении центра тяжести системы тел проще всего, как правило, рассмотреть моменты сил относительно оси, проходящей через центр тяжести. Равенство нулю суммы моментов сил тяжести относительно этой оси представляет собой уравнение для расстояния, определяющего положение центра тяжести.

---

162. В одном случае два человека тянут за концы каната в противоположные стороны с равными силами F. В другом случае один конец каната привязан к неподвижной опоре, а за другой его конец тянут два человека с теми же силами F. Какое натяжение испытывает канат в первом и во втором случаях?

163. Цилиндр двигателя внутреннего сгорания имеет внутренний диаметр $D = 0{,}16$ м. Число болтов, крепящих крышку цилиндра, $n = 8$. При сгорании горючей смеси развивается давление $p = 6 \cdot 10^6$ Н/м². Определить диаметр d болтов, обеспечивающих десятикратный запас прочности. Допустимое напряжение в стали $T = 1{,}5 \cdot 10^8$ Н/м².

164. С какой минимальной силой F, направленной горизонтально, нужно прижать плоский брусок к стене, чтобы он не соскользнул вниз? Масса бруска $m = 5$ кг, коэффициент трения между стенкой и бруском $k = 0{,}1$.

165. Третья часть однородной линейки, имеющей массу m, выступает за край стола. Какую силу F нужно приложить, чтобы сдвинуть линейку вдоль ее длинной стороны, если коэффициент трения между линейкой и столом равен k?

166. Деревянный брусок лежит на наклонной плоскости. С какой силой F, направленной перпендикулярно к плоскости, необходимо прижать брусок, чтобы он не соскользнул? Масса бруска $m = 2$ кг; коэффициент трения бруска о плоскость $k = 0{,}4$; угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60°$.

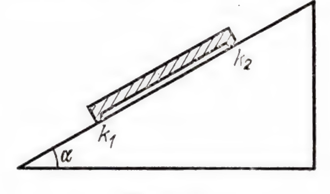


Рис. 31

167. Тонкая доска с двумя очень низкими опорными выступами на концах лежит на наклонной плоскости (рис. 31). Коэффициент

трения между наклонной плоскостью и нижней опорой k_1, между плоскостью и верхней опорой k_2. При каком наименьшем значении угла наклона α плоскости к горизонту доска начнет скользить по наклонной плоскости?

168. Фонарь массой $m = 20$ кг подвешен над улицей на двух одинаковых тросах, угол между которыми $\alpha = 120°$. Найти натяжение T тросов.

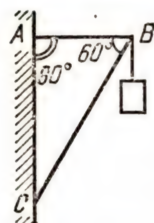


Рис. 32

169. К невесомому тросу длиной $l = 3$ м, концы которого закреплены на одинаковой высоте, на расстояниях $a = 1$ м от точек закрепления подвешены два груза, масса каждого из них $m = 1$ кг. Провисание троса в средней части составляет $d = 10$ см. Определить натяжения T_1, T_2 и T_3 троса на каждом из трех участков.

170. На кронштейне, изображенном на рис. 32, висит груз, его масса $m = 100$ кг. Определить натяжение стержней AB и BC. Массой стержней пренебречь.

171. При взвешивании на неравноплечих рычажных весах вес тела (по сумме весов положенных гирь) на одной чашке получился равным $P_1 = 2{,}2$ кгс, а на другой $P_2 = 3{,}8$ кгс. Определить истинный вес тела P.

172. Однородный стержень с прикрепленным на одном из его концов грузом массой $m = 1{,}2$ кг находится в равновесии в горизонтальном положении, если его подпереть на расстоянии $^1/_5$ длины стержня от груза. Чему равна масса стержня M?

173. Однородная балка лежит на платформе так, что один ее конец свешивается с платформы. Длина свешивающегося конца балки равна четверти всей ее длины. К свешивающемуся концу прилагают силу, направленную вертикально вниз. Когда эта сила становится равной $F = 2000$ Н, противоположный конец балки начинает подниматься. Чему равен вес P балки?

174. Два человека несут цилиндрическую железную трубу массой $m = 80$ кг. Один человек поддерживает трубу на расстоянии $a = 1$ м от ее конца, а второй держит противоположный конец трубы. Определить нагрузку, приходящуюся на каждого человека, если длина трубы $L = 5$ м.

175. К стене прислонена лестница массой m. Центр тяжести лестницы находится на расстоянии $^1/_3$ длины от ее верхнего конца. Какую горизонтальную силу F нужно приложить к середине лестницы, чтобы верхний конец ее не оказывал давления на стену? Угол между лестницей и стеной равен α.

176. Под каким наименьшим углом α к горизонту может стоять лестница, прислоненная к гладкой вертикальной стене, если коэффициент трения лестницы о пол равен k? Считать, что центр тяжести находится в середине лестницы.

177. Две одинаковые тонкие дощечки с гладкими закругленными краями, поставленные на стол, опираются друг на друга. Угол между вертикальной плоскостью и каждой дощечкой составляет α (рис. 33).

Каким должен быть коэффициент трения k между нижними краями дощечек и поверхностью стола, чтобы дощечки не падали?

178. Стержень длиной $L = 1$ м и весом $P = 15$ Н одним концом шарнирно прикреплен к потолку. Стержень удерживается в отклоненном положении вертикальным шнуром, привязанным к свободному концу стержня. Найти натяжение T шнура, если центр тяжести стержня находится на расстоянии $s = 0{,}4$ м от шарнира.

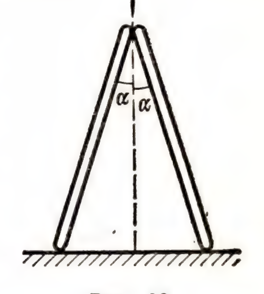


Рис. 33

179. Тяжелый цилиндрический каток необходимо поднять на ступеньку высоты h (рис. 34). Определить наименьшую силу $F_{мин}$, которую необходимо для этого приложить к центру катка в горизонтальном направлении, если каток имеет радиус R (причем R больше высоты ступеньки h), а сила тяжести катка равна P.

180. Дифференциальный ворот состоит из двух цилиндров различного диаметра, закрепленных на общей оси (рис. 35). На цилиндрах укреплен канат, который при вращении ворота наматывается на цилиндр большего диаметра и сматывается с другого цилиндра. На образуемой канатом петле подвешен блок. Какую силу F нужно приложить к рукоятке ворота длиной $l = 1$ м, чтобы удерживать или равномерно поднимать груз, если радиусы цилиндров $r_1 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}1$ м, а сила тяжести груза $P = 100$ Н?

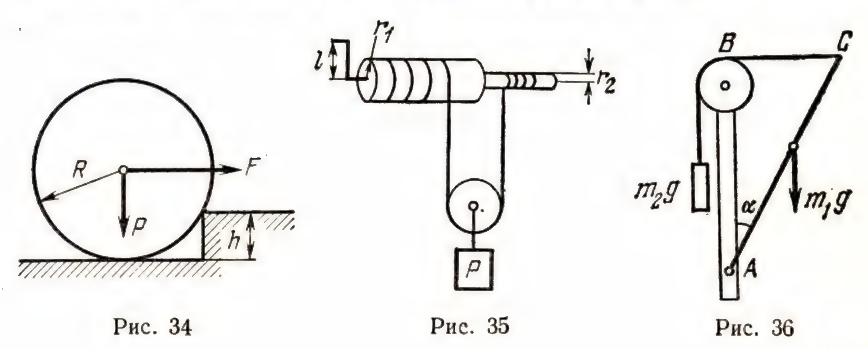


Рис. 34 Рис. 35 Рис. 36

181. Конец однородного стержня AC массой m_1 шарнирно закреплен на доске в точке A (рис. 36). К другому концу стержня привязана переброшенная через блок нить, на конце которой находится груз. Какова должна быть масса этого груза m_2, для того чтобы отрезок нити BC был горизонтальным, а стержень составлял угол α с доской? Будет ли равновесие устойчивым?

182. К гладкой вертикальной стене на веревке длиной $l = 4$ см подвешен шар массой $m = 300$ г. Найти давление N шара на стену, если его радиус $R = 2{,}5$ см.

183. На плоском шероховатом дне чаши находится шар. Дно чаши наклонено на некоторый угол по отношению к горизонту. Шар удерживается в равновесии нитью, параллельной дну (рис. 37). На какой наибольший угол α можно наклонить дно чаши, чтобы шар все еще оставался в равновесии? Коэффициент трения равен k.

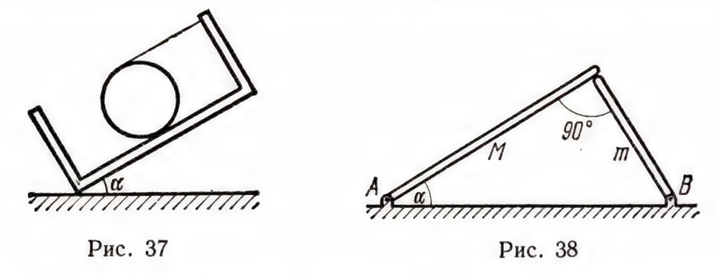


Рис. 37 Рис. 38

184. Две тонкие палочки образуют систему, изображенную на рис. 38. Палочки могут вращаться без трения вокруг осей A и B, проходящих через концы палочек. Верхние концы палочек сходятся под прямым углом так, что одна палочка лежит своим концом на торце другой (последний закруглен). Верхняя палочка массой M образует угол α с горизонтом. Масса нижней палочки m. При каком минимальном значении коэффициента трения k между палочками нижняя не упадет?

185. На стержень действуют две параллельные силы $F_1 = 10$ Н и $F_2 = 25$ Н, направленные в противоположные стороны. Определить точку приложения и величину силы F, уравновешивающей F_1 и F_2, если точки приложения сил F_1 и F_2 расположены друг от друга на расстоянии $d = 1{,}5$ м.

186. Два однородных кубика весом $P_1 = 3$ Н и $P_2 = 12$ Н с длинами ребер соответственно $l_1 = 0{,}08$ м и $l_2 = 0{,}12$ м соединены при помощи однородного стержня длиной $d = 0{,}1$ м и весом $P_3 = 6$ Н. Концы стержня прикреплены к серединам граней кубиков, а центры кубиков лежат на продолжении оси стержня. Определить положение центра тяжести системы.

187. Четыре однородных шара с массами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 5$ кг, $m_3 = 7$ кг, $m_4 = 3$ кг укреплены на невесомом стержне таким образом, что их центры находятся на равных расстояниях $d = 0{,}2$ м друг от друга. На каком расстоянии x от центра третьего шара находится центр тяжести системы?

188. Определить положение центра тяжести проволочной рамки, имеющей форму равностороннего треугольника, если две стороны треугольника сделаны из алюминиевой проволоки, а третья — из медной. Проволоки имеют одинаковое сечение. Сторона треугольника $l = 1$ м. Плотность меди $\rho_м = 8{,}9$ г/см^3, плотность алюминия $\rho_а = 2{,}7$ г/см^3.

189. Однородный цилиндр поставлен на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом. При каком максимальном угле

наклона плоскости цилиндр не опрокинется, если высота цилиндра вдвое больше его радиуса?

190. На каком расстоянии от дна находится центр тяжести тонкостенного цилиндрического стакана высотой $h = 12$ см и диаметром $d = 8$ см, если толщина дна в два раза больше толщины стенок?

191. Плоская однородная фигура состоит из полукруга радиуса R и прямоугольника, имеющего основание, равное диаметру полукруга, и высоту h (рис. 39). Чему должно быть равно отношение h/R, чтобы центр тяжести всей фигуры совпадал с геометрическим центром полукруга (точкой C)? (*Указание*: Расстояние центра тяжести полукруга C_1 от геометрического центра C равно $4R/3\pi$.)

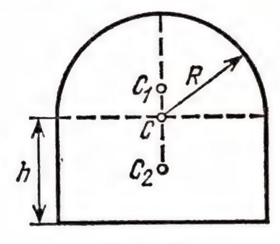


Рис. 39

192. Однородная полусфера массой m_1 положена выпуклой стороной на горизонтальную плоскость. На край полусферы положен небольшой груз массой m_2. Под каким углом α к горизонту наклонен ограничивающий полусферу круг? (*Указание*: Расстояние центра тяжести полусферы от геометрического центра равно $\frac{3}{8}r$, где r — радиус полусферы.)

193. Определить положение центра тяжести однородного диска радиуса R, из которого вырезано отверстие радиуса $r < R/2$ (рис. 40). Центр выреза находится на расстоянии $R/2$ от центра диска.

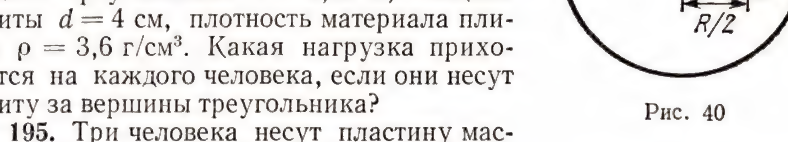


Рис. 40

194. Три человека несут однородную металлическую плиту, представляющую собой равнобедренный треугольник. Основание треугольника имеет длину $a = 0,6$ м, высота треугольника $h = 1,25$ м, толщина плиты $d = 4$ см, плотность материала плиты $\rho = 3,6$ г/см^3. Какая нагрузка приходится на каждого человека, если они несут плиту за вершины треугольника?

195. Три человека несут пластину массой $m_1 = 70$ кг, имеющую форму равностороннего треугольника со стороной $a = 2$ м, причем двое держат пластину за одну из вершин, а третий — за противоположное основание. На каком расстоянии l от этой вершины закреплен на пластине сосредоточенный груз массой $m_2 = 100$ кг, если нагрузка распределена поровну между всеми несущими?

196. На двух параллельных вертикально расположенных пружинах одинаковой длины горизонтально подвешен стержень, массой которого можно пренебречь. Коэффициенты упругости пружин равны соответственно $k_1 = 0,02$ Н/м и $k_2 = 0,03$ Н/м. Расстояние между пружинами $L = 1$ м. В каком месте стержня нужно подвесить к нему груз, чтобы стержень остался горизонтальным?

197. Верхний конец стального стержня круглого сечения радиуса $r = 0,5$ см закреплен. Длина стержня $l = 1$ м. На какую величину Δl изменится длина стержня, если к его середине с помощью специальной подвески прикрепить груз массой $m = 400$ кг и такой же груз прикрепить к нижнему концу (рис. 41)? Модуль Юнга стали $E = 19,6 \cdot 10^{10}$ Н/м². Весом стержня пренебречь.

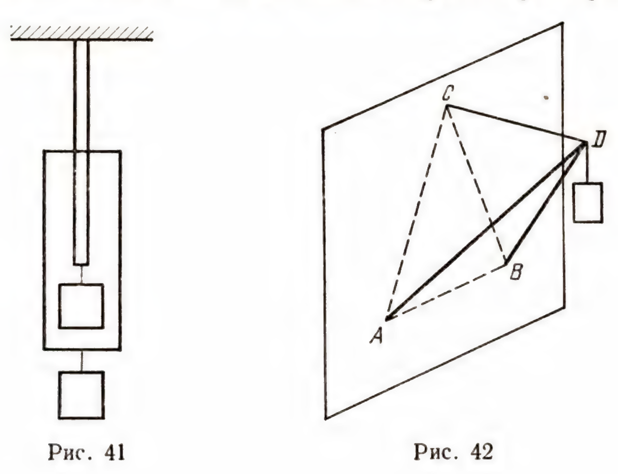


Рис. 41 Рис. 42

198. Кронштейн, укрепленный на вертикальной стене, имеет конструкцию, изображенную на рис. 42. Треугольник ACB — равнобедренный с основанием AB, расположенным горизонтально. Высота этого треугольника равна h. Стержни AD и BD одинаковой длины l, шарнирно прикреплены к стене. Канат CD также имеет длину l. Определить натяжение T каната CD и силы N, сжимающие стержни AD и BD, если к точке D подвешен груз массой m. Массой стержней и каната пренебречь.

§ 7. Работа и энергия

При решении задач данного параграфа используется закон сохранения энергии. Разность между конечным E_2 и начальным E_1 значениями энергии системы равна работе внешних сил: $E_2 - E_1 = A$. Для двух тел полная энергия равна сумме кинетических энергий тел и потенциальной энергии их взаимодействия:

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U.$$

В задачах обычно встречается только одна частная форма потенциальной энергии — энергия взаимодействия поднятого над поверхностью земли на высоту h тела с земным шаром: $U = mgh$. Изменение U не зависит от формы пути, по которому движется тело, и определяется разностью высот.

Так как при падении тела на землю изменением кинетической энергии земного шара можно пренебречь, то закон сохранения энергии в этом случае можно написать в форме:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 = \text{const}.$$

Работа силы F при перемещении точки ее приложения на прямолинейном отрезке длины s выражается формулой $A = Fs\cos\alpha$, где α — угол между направлениями силы F и отрезка s. При $\alpha < \pi/2$ работа положительна, при $\alpha > \pi/2$ работа отрицательна.

Нужно иметь в виду, что механическая энергия в замкнутой системе не сохраняется, если внутри системы действуют силы трения, зависящие от скорости. Работа сил трения должна поэтому всегда рассматриваться как работа внешних сил. При наличии трения для незамкнутой системы $E_2 - E_1 = A + A_\tau$, где A — работа внешних сил, A_τ — работа сил трения, действующих внутри системы.

Механическая энергия также не сохраняется при неупругом ударе. Здесь для нахождения скоростей после удара следует пользоваться законом сохранения количества движения.

Если работа совершается за время t, то средняя мощность

$$\overline{W} = \frac{Fs\cos\alpha}{t}$$

(s/t — средняя скорость).

Мгновенная мощность $W = Fv\cos\alpha$, где v — мгновенная скорость.

---

199. Летящая с некоторой скоростью пуля попадает в мешок с песком и входит в него на глубину $l_1 = 15$ см. На какую глубину l_2 войдет в песок пуля той же массы, если скорость ее движения вдвое больше? Считать, что сила сопротивления, действующая со стороны песка на пулю, не зависит от скорости пули.

200. Пуля, имеющая массу $m = 10$ г, подлетает к доске толщиной $d = 4$ см со скоростью $v_1 = 600$ м/с и, пробив доску, вылетает со скоростью $v_2 = 400$ м/с. Найти среднюю силу F сопротивления доски.

201. Пуля массой m летит со скоростью v_0 и пробивает тяжелую доску толщиной d, движущуюся навстречу пуле со скоростью v_1. С какой скоростью v вылетит пуля из доски, если силу сопротивления F движению пули в доске считать постоянной? Скорость доски заметно не меняется.

202. В тело массой $m_1 = 990$ г, лежащее на горизонтальной поверхности, попадает пуля массой $m_2 = 10$ г и застревает в нем. Скорость пули $v = 700$ м/с направлена горизонтально. Какой путь s пройдет тело до остановки, если коэффициент трения между телом и поверхностью $k = 0{,}05$?

203. Постоянная сила $F = 0{,}5$ Н действует на тело массой $m = 10$ кг в течение времени $t = 2$ с. Определить конечную

кинетическую энергию тела E, если начальная кинетическая энергия равна нулю.

204. Поезд массой $m = 1500$ т движется со скоростью $v = 57,6$ км/ч и при торможении останавливается, пройдя путь $s = 200$ м. Какова сила торможения F? Как должна измениться сила торможения, чтобы поезд остановился, пройдя в два раза меньший путь?

205. Какую работу совершил мальчик, стоящий на гладком льду, сообщив санкам начальную скорость $v_1 = 4$ м/с относительно льда, если масса санок $m_1 = 4$ кг, а масса мальчика $m_2 = 20$ кг? Трением о лед полозьев санок и ног мальчика можно пренебречь.

206. Найти среднюю мощность $\overline{W}$, развиваемую пороховыми газами при выстреле из винтовки, если длина канала ствола $l = 1$ м, масса пули $m = 10$ г, а скорость пули при вылете $v = 400$ м/с. Массой газов, сопротивлением движению пули и отдачей винтовки можно пренебречь. Считать, что сила давления газов постоянна во все время движения пули в канале ствола.

207. Два автомобиля одновременно трогаются с места и движутся равноускоренно. Массы автомобилей одинаковы. Во сколько раз средняя мощность первого автомобиля больше средней мощности второго, если за одно и то же время первый автомобиль достигает вдвое большей скорости, чем второй?

208. Автомобиль, имеющий массу $m = 1$ т, трогается с места и, двигаясь равноускоренно, проходит путь $s = 20$ м за время $t = 2$ с. Какую мощность должен развить мотор этого автомобиля?

209. Моторы электровоза при движении со скоростью $v = 72$ км/ч потребляют мощность $W = 800$ кВт. Коэффициент полезного действия силовой установки электровоза $\eta = 0,8$. Определить силу F тяги мотора.

210. Какой максимальный подъем может преодолеть тепловоз мощностью $W = 370$ кВт, перемещая состав массой $m = 2000$ т со скоростью $v = 7,2$ км/ч, если коэффициент трения $k = 0,002$? Считать угол α наклона полотна железной дороги к горизонту малым.

211. Мощность гидростанции $W = 73,5$ МВт. Чему равен расход воды V_0 в м^3/с, если коэффициент полезного действия станции $\eta = 75\%$ и плотина поднимает уровень воды на высоту $H = 10$ м?

212. Подъемный кран за время $\tau = 7$ ч поднимает 3000 т строительных материалов на высоту $H = 10$ м. Какова мощность двигателя крана W_0, если коэффициент полезного действия крана $\eta = 60\%$?

213. Трактор массой $m = 10$ т, развивающий мощность $W = 200$ л. с. (1470 кВт), поднимается в гору со скоростью $v = 5$ м/с. Определить угол наклона горы α. Сопротивлением движению пренебречь.

214. Транспортер поднимает $m = 200$ кг песка на автомашину за время $\tau = 1$ с. Длина ленты транспортера $l = 3$ м, а угол наклона $\alpha = 30°$. Коэффициент полезного действия транспортера

$\eta = 85\%$. Определить мощность W_0, развиваемую его электродвигателем.

215. Шарик прикреплен к концу невесомой жесткой спицы длиной $l = 10$ см. Второй конец спицы закреплен таким образом, что спица с шариком может свободно вращаться в вертикальной плоскости. Какую минимальную скорость в горизонтальном направлении нужно сообщить шарику, чтобы спица вращалась в одном направлении? В начальный момент спица вертикальна и шарик расположен внизу.

216. Маятник представляет собой тяжелый шарик, подвешенный на нерастяжимой и невесомой нити длиной l. Маятник был отклонен от вертикали на угол α и затем отпущен. Какую наибольшую скорость v приобретет шарик?

217. Тело брошено под углом к горизонту со скоростью v_0. Используя закон сохранения энергии, определить скорость тела на высоте H над горизонтом. Сопротивление воздуха не учитывать.

218. Камень массой $m = 300$ г бросили с башни горизонтально с некоторой начальной скоростью. Спустя время $t = 1$ с скорость камня составила с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Найти кинетическую энергию T камня в этот момент.

219. Камень, имеющий массу $m = 5$ кг, упал с некоторой высоты. Найти кинетическую энергию T камня в средней точке его пути, если падение продолжалось $t = 2$ с.

220. Какой кинетической энергией T обладает тело с массой $m = 1$ кг, падающее без начальной скорости, по истечении времени $\tau = 5$ с после начала падения?

221. Пуля, вылетевшая из винтовки вертикально вверх со скоростью $v_0 = 1000$ м/с, упала на землю со скоростью $v = 50$ м/с. Какая работа A была совершена силой сопротивления воздуха, если масса пули $m = 10$ г?

222. Пуля массой $m = 0{,}3$ г, выпущенная из пневматической винтовки вертикально вверх, упала на землю спустя время $t = 11$ с. Каково среднее давление $p_{ср}$ воздуха на пулю в канале ствола, если длина ствола $l = 45$ см, а его диаметр $d = 4{,}5$ мм? Трением пули о стенки канала ствола и сопротивлением воздуха пренебречь.

223. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 49$ м/с. На какой высоте H его кинетическая энергия T будет равна потенциальной U?

224. К телу, масса которого $m = 4$ кг, приложена направленная вертикально вверх сила $F = 49$ Н. Определить кинетическую энергию T тела в момент, когда оно окажется на высоте $h = 10$ м над землей. В начальный момент тело покоилось на поверхности земли.

225. Тело, брошенное с высоты $H = 250$ м вертикально вниз с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с, погрузилось в землю на глубину $s = 20$ см. Определить среднюю силу F сопротивления почвы, если масса тела $m = 2$ кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

226. Для забивки сваи груз весом $P = 200$ кгс поднимают с постоянной скоростью $v = 5$ м/с, а затем отпускают его на высоте $H = 10$ м, после чего он движется свободно до удара о сваю. Вес сваи $Q = 300$ кгс, сила сопротивления грунта движению сваи постоянна и равна $F = 2000$ кгс. Какова энергия груза E в момент его удара о сваю? На какую глубину h опускается свая после каждого удара? С какой максимальной частотой n можно производить удары? Принять $g = 10$ м/с².

227. Самолет массой $m = 5$ т при горизонтальном полете двигался с постоянной скоростью $v_1 = 360$ км/ч. Затем он поднялся на высоту $h = 2$ км. При этом скорость самолета уменьшилась до $v_2 = 200$ км/ч. Найти работу A, затраченную мотором на подъем самолета.

228. Пуля массой $m = 20$ г, выпущенная под углом α к горизонту, в верхней точке траектории имеет кинетическую энергию $T = 88{,}2$ Дж. Найти угол α, если начальная скорость пули $v_0 = 600$ м/с.

229. Человек, имеющий массу M, прыгает под углом α к горизонту со скоростью v_0. В верхней точке траектории он бросает со скоростью v_1 вертикально вниз груз массой m. На какую общую высоту H подпрыгнул человек?

230. Брошенное вертикально вверх тело упало на землю спустя время $\tau = 1{,}44$ с. Найти кинетическую энергию тела T в момент падения на землю и потенциальную энергию U в верхней точке траектории. Масса тела $m = 200$ г.

231. Мяч падает с высоты $H = 7{,}5$ м на гладкий пол. Какую начальную скорость v_0 нужно сообщить мячу, чтобы после двух ударов о пол он поднялся до первоначальной высоты, если при каждом ударе мяч теряет 40% энергии?

232. Конькобежец, разогнавшись до скорости v, въезжает на ледяную горку. На какую высоту H от начального уровня он поднимется, если горка составляет угол α с горизонтом и коэффициент трения коньков о лед равен k?

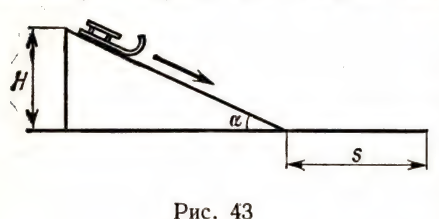


Рис. 43

233. Санки съезжают с горы, имеющей высоту H и угол наклона α, и движутся далее по горизонтальному участку (рис. 43). Коэффициент трения на всем пути одинаков и равен k. Определить расстояние s, которое пройдут санки, двигаясь по горизонтальному участку, до полной остановки.

234. Кирпич, ребра которого равны l, $2l$ и $4l$, кладут на горизонтальную плоскость поочередно в трех различных положениях. Как меняется потенциальная энергия кирпича при изменении его положения?

235. Какую работу A нужно совершить, чтобы поднять землю на поверхность при рытье колодца, если его глубина $H = 10$ м;

а поперечное сечение $S = 2$ м²? Один кубометр земли имеет в среднем массу 2 тонны. Считать, что вынимаемый грунт рассыпается тонким слоем по поверхности земли.

236. Однородная цепочка длиной L лежит на абсолютно гладком столе. Небольшая часть цепочки свешивается в отверстие в столе. В начальный момент времени лежащий на столе конец цепочки придерживают, а затем отпускают, и цепочка начинает соскальзывать со стола под действием силы тяжести на свешивающийся конец. Определить скорость движения цепочки в тот момент, когда длина свешивающейся части будет равна x ($x < L/2$).

237. Колодец, площадь дна которого S и глубина H, наполовину заполнен водой. Насос выкачивает воду и подает ее на поверхность земли через цилиндрическую трубу радиуса R. Какую работу A совершит насос, если выкачает всю воду из колодца за время τ?

238. Свинцовый шар массой $m_1 = 500$ г, движущийся со скоростью $v_1 = 10$ см/с, сталкивается с неподвижным шаром из воска, имеющим массу $m_2 = 200$ г, после чего оба шара движутся вместе. Определить кинетическую энергию шаров T после удара.

239. Пластмассовый шар, имеющий массу M, лежит на подставке с отверстием. Снизу в шар через отверстие попадает вертикально летящая пуля массой m и пробивает его насквозь. При этом шар подскакивает на высоту h. На какую высоту H над подставкой поднимается пробившая шар пуля, если ее скорость перед попаданием в шар была v_0?

240. Четыре одинаковых тела равной массы, по $m = 20$ г каждое, расположены на одной прямой на некотором расстоянии друг от друга. В крайнее тело ударяется такое же тело, имеющее скорость $v_0 = 10$ м/с и движущееся вдоль прямой, на которой расположены тела. Считая соударения тел абсолютно неупругими, найти кинетическую энергию T системы после прекращения соударений.

241. На горизонтальной плоскости стоят два связанных нитью одинаковых бруска, между которыми расположена сжатая пружина. Нить пережигают, и бруски разъезжаются в разные стороны так, что расстояние между ними возрастает на величину l.

Чему равна потенциальная энергия U сжатой пружины? Масса каждого бруска равна m. Коэффициент трения между брусками и плоскостью k. Пружина не скреплена с брусками.

242. Происходит соударение двух абсолютно упругих шаров, имеющих массы m_1 и m_2. Их начальные скорости v_1 и v_2. Найти скорости шаров после удара. Удар считать центральным: скорости шаров направлены вдоль линии, соединяющей их центры.

243. Брусок лежит на дне ящика у стенки A (рис. 44). Ящик в результате кратковременного внешнего воздействия на противоположную стенку B начал двигаться горизонтально со скоростью v. Через какое время τ брусок вновь коснется стенки A, если удар бруска о стенку B является абсолютно упругим, а трением можно пренебречь?

Расстояние между стенками A и B равно L. Длина бруска мала по сравнению с L. Массы ящика и бруска одинаковы.

244. Клин, масса которого M, находится на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. На клине лежит брусок массой m (рис. 45). Брусок под действием силы тяжести может скользить по клину без трения. Наклонная грань клина

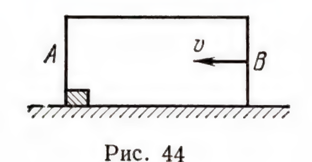


Рис. 44

Рис. 45

имеет плавный переход к горизонтальной плоскости, как это показано на рисунке. В начальный момент система покоилась. Определить скорость v клина в тот момент, когда брусок с высоты h соскользнет на плоскость.

245. Пять одинаковых шаров, центры которых лежат на одной прямой, находятся на небольшом расстоянии друг от друга. В крайний ударяется такой же шар, имеющий скорость $v_0 = 10$ м/с, которая направлена вдоль линии, соединяющей центры шаров. Найти скорость последнего шара, считая соударения шаров абсолютно упругими.

246. Идеально гладкий шар A, движущийся со скоростью v_0, одновременно сталкивается с двумя такими же соприкасающимися между собой шарами B и C (рис. 46). Удар является абсолютно упругим. Определить скорости шаров после столкновения.

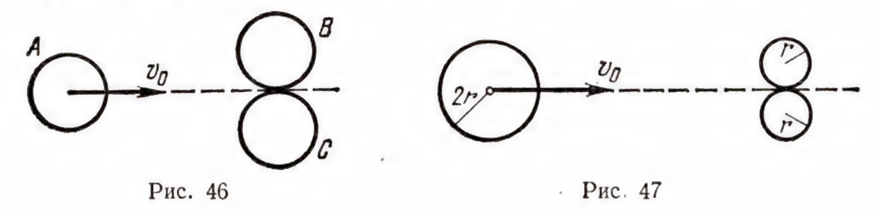


Рис. 46

Рис. 47

247. Два гладких упругих шара радиуса r лежат, соприкасаясь друг с другом, на гладкой горизонтальной плоскости. Третий упругий шар радиуса $2r$, скользящий со скоростью v_0 по той же плоскости, ударяется одновременно в оба шара (рис. 47). Найти скорость большого шара после удара. Все шары сделаны из одного материала.

248. Под каким углом α_1 разлетаются после абсолютно упругого удара два одинаковых идеально гладких шара, если до удара один из них покоился, а другой летел со скоростью v, направленной под углом $\alpha \neq 0$ к линии, соединяющей их центры в момент удара?

249. Два абсолютно упругих шара летят навстречу друг другу. Кинетическая энергия первого шара в k^2 раз больше, чем второго ($k = 4/3$). При каком отношении начальных скоростей v_2/v_1 шары после удара будут двигаться в ту же сторону, что и первый шар до удара, если масса первого шара m_1 больше массы второго шара m_2?

250. Два упругих шарика, массы которых $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г, подвешены на одинаковых нитях длиной $l = 50$ см (рис. 48). Первый шарик отклонили от положения равновесия на угол $\alpha = 90°$ и отпустили. На какую высоту поднимется второй шарик после удара?

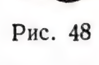


Рис. 48

251. Шарик бросают из точки A вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Когда он достигает предельной высоты подъема, из точки A по тому же направлению с той же начальной скоростью v_0 бросают другой такой же шарик. Через некоторое время шарики встречаются и происходит упругое соударение. На какой высоте столкнутся шарики? На какую высоту после соударения поднимется первый шарик?

252. Снаряд при вертикальном выстреле достиг высшей точки полета $H = 3000$ м и разорвался на две части, имеющие массы $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 2$ кг. Осколки продолжают лететь по вертикали — первый вниз, второй вверх. Найти скорости осколков v_1 и v_2 через время $\tau = 2$ с после разрыва, если их полная энергия непосредственно после разрыва $E = 247$ кДж.

§ 8. Динамика вращательного движения

При решении задач на динамику вращательного движения следует поступать таким же образом, как и при решении задач на динамику прямолинейного движения. Прежде всего нужно выяснить, какие силы действуют на движущиеся тела, и изобразить эти силы на чертеже. Затем записать уравнения движения.

Нужно иметь в виду, что при вращении по окружности тело обязательно имеет ускорение, направленное к центру вращения. Это так называемое центростремительное ускорение $a_ц = v^2/R = \omega^2 R$, которое в сумме с тангенциальным ускорением $a_τ$, направленным по касательной к окружности, дает полное ускорение тела. При равномерном вращении ускорение $a_τ$, характеризующее изменение скорости по величине, равно нулю.

Согласно второму закону Ньютона $m\frac{v^2}{R} = \sum\limits_i F_i$, где $\sum\limits_i F_i$ — сумма проекций сил на направление радиуса. Если проекция силы направлена к центру, ее нужно считать положительной, если от центра — отрицательной.

Эту сумму проекций сил часто называют центростремительной силой. Надо иметь в виду, что нет особых центростремительных сил

специфической природы. Это сумма проекций тех сил, которые вообще рассматриваются в механике и о которых кратко говорилось во введении к § 4.

---

253. Шарик, имеющий массу M, подвешен на нити длиной l. Шарик выводят из положения равновесия так, что нить становится горизонтальной, а затем отпускают без толчка. В тот момент, когда шарик проходит положение равновесия, на него садится муха, летевшая по горизонтали навстречу шарику со скоростью v. Масса мухи m. На какой угол α отклонится после этого нить маятника?

254. На горизонтальной вращающейся платформе на расстоянии $R = 50$ см от ее вертикальной оси вращения лежит груз. Коэффициент трения между грузом и платформой $k = 0{,}05$. При каком числе n оборотов в секунду груз начнет скользить?

255. На краю горизонтальной вращающейся платформы радиуса $R = 1$ м лежит груз. Коэффициент трения между грузом и платформой $k = 0{,}05$. В какой момент времени t после начала вращения платформы груз соскользнет с нее, если ее вращение равноускоренное и в момент времени $t_0 = 2$ мин она имеет угловую скорость $\omega = 1{,}4$ рад/с?

256. Каков должен быть минимальный коэффициент трения k между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомобиль мог пройти без проскальзывания закругление радиуса $R = 100$ м при скорости $v = 50$ км/ч?

257. Тело с массой $m = 200$ г равномерно вращается в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $r = 0{,}5$ м, делая $n_1 = 3$ оборотов в секунду. Какую работу A нужно совершить, чтобы увеличить число оборотов до $n_2 = 5$ в секунду?

258. Барабан сушильной машины диаметром $D = 1{,}96$ м вращается с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Определить, во сколько раз сила F, с которой ткань прижимается к стенке, больше силы тяжести P, действующей на ткань.

259. Самолет делает петлю Нестерова («мертвую петлю») радиусом $R = 255$ м. Какую наименьшую скорость v должен иметь самолет в верхней точке петли, чтобы летчик не повис на ремнях, которыми он пристегнут к пилотскому креслу?

260. С каким максимальным периодом T можно равномерно вращать в вертикальной плоскости шарик, привязанный к нити длиной $l = 2{,}45$ м?

261. Невесомый стержень равномерно вращается в горизонтальной плоскости, совершая n оборотов в секунду. На расстояниях l_1 и l_2 от оси вращения закреплены грузы, имеющие массы m_1 и m_2. Какая горизонтальная сила F действует на ось вращения, если ось находится между грузами?

262. Автомобиль, масса которого $m = 1000$ кг, движется по выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны $R = 50$ м, со скоростью $v_1 = 36$ км/ч. С какой силой F давит автомобиль на середину моста? С какой наименьшей скоростью v_2 должен двигаться

автомобиль для того, чтобы в верхней точке он перестал оказывать давление на мост?

263. Автомашина массой $m = 2000$ кг движется со скоростью $v = 36$ км/ч по вогнутому мосту. Радиус кривизны моста $R = 100$ м. С какой силой F давит автомашина на мост, проезжая через его середину?

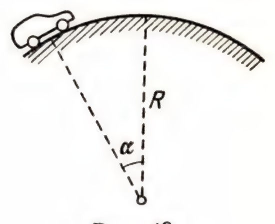


Рис. 49

264. Автомобиль массой m идет по выпуклому мосту, радиус кривизны которого R, со скоростью v. С какой силой F давит автомобиль на мост в точке, направление на которую из центра кривизны моста составляет с направлением на вершину моста угол α (рис. 49)?

265. Через реку шириной $d = 100$ м переброшен выпуклый мост, имеющий форму дуги окружности. Высшая точка моста поднимается над берегом на $H = 10$ м. Максимальная нагрузка, которую может выдержать мост, $F = 44100$ Н. Через мост необходимо пройти грузовику, масса которого $m = 5000$ кг. При каких скоростях движения это возможно?

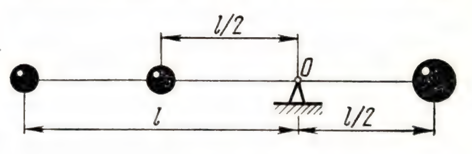


Рис. 50

266. Невесомый стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через точку O (рис. 50). На стержне с одной стороны от оси укреплены одинаковые по массе грузы на расстояниях l и $l/2$ от точки O. С другой стороны на стержне укреплен груз удвоенной массы на расстоянии $l/2$ от оси. В начальный момент стержень был расположен горизонтально, а затем отпущен без толчка. Определить линейную скорость v среднего груза в момент прохождения стержнем положения равновесия.

267. Человек, масса которого $m = 70$ кг, сидит на середине трапеции. Палка трапеции подвешена на веревках длиной $l = 8$ м. При качании человек проходит положение равновесия со скоростью 6 м/с. Каково натяжение T каждой веревки в этот момент?

268. Шарик массой m, подвешенный на нити, отклонен от положения равновесия на угол $\alpha = 90°$ и отпущен. Какова должна быть прочность нити, чтобы шарик при движении не оборвал ее?

269. Грузик, имеющий массу $m = 20$ г, прикреплен к концу невесомого стержня длиной $l = 40$ см, который равномерно вращается в вертикальной плоскости вокруг другого конца, делая 10 оборотов в секунду. Каково натяжение стержня, когда грузик проходит верхнюю и нижнюю точки своей траектории?

270. Небольшое тело, имеющее массу m, вращается в вертикальной плоскости на жесткой невесомой штанге. Найти разность сил

натяжения штанги в двух случаях: а) скорость вращения постоянна, б) скорость вращения не постоянна, ее изменение вызывается силой тяжести.

271. Тяжелый шарик, имеющий массу m, подвешен на нити. Нить может выдержать вес $2mg$. На какой угол α от положения равновесия нужно отклонить шарик, чтобы он оборвал нить, проходя через положение равновесия?

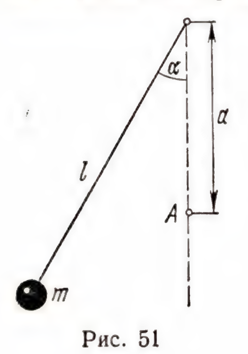


Рис. 51

272. На нити длиной l подвешен груз, масса которого равна m. В точке A, отстоящей от подвеса на расстоянии a по вертикали, вбит гвоздь (рис. 51). Известно, что нить обрывается при натяжении $T_0 > mg$. На какой минимальный угол α надо отклонить груз, чтобы при дальнейшем свободном движении к положению равновесия нить оборвалась, зацепившись за гвоздь?

273. При каком соотношении масс два тела, связанные нитью, могут вращаться с одинаковыми угловыми скоростями на гладкой горизонтальной поверхности, если ось вращения делит нить в отношении 1 : 3?

274. По вертикально расположенному обручу радиуса R может без трения скользить колечко. Обруч вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Колечко находится в равновесии на высоте h от нижней точки обруча (рис. 52). Определить угловую скорость ω вращения обруча.

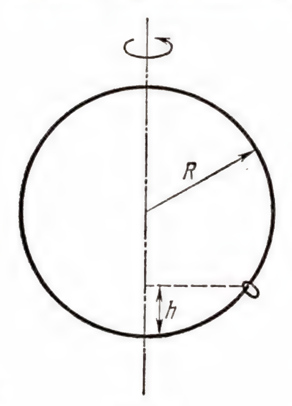


Рис. 52

275. На вертикальной оси укреплена горизонтальная штанга, по которой могут без трения перемещаться два груза с массами m_1 и m_2, связанные нитью длиной l. Система вращается с угловой скоростью ω. На каких расстояниях от оси находятся грузы в положении равновесия? Чему при этом равно натяжение T нити?

276. Мальчик вращается на «гигантских шагах», делая 12 оборотов в минуту. Длина каната $l = 5$ м. Каково натяжение каната, если масса мальчика $m = 45$ кг?

277. Камень, подвешенный к потолку на веревке, движется в горизонтальной плоскости по окружности, отстоящей от потолка на расстоянии $h = 1{,}25$ м (конический маятник). Найти период T обращения камня.

278. Шарик с массой m, подвешенный на нити длиной l, приведен во вращательное движение в горизонтальной плоскости. Какова должна быть прочность нити F, чтобы радиус R окружности, по которой движется шарик, мог достигнуть величины $2l/\sqrt{5}$?

279. Тяжелый шарик, подвешенный на нити длиной l, описывает окружность в горизонтальной плоскости (конический маятник). Найти период T обращения шарика, если маятник находится в лифте, движущемся с постоянным ускорением $a < g$, направленным вниз. Нить составляет с вертикальным направлением угол α.

280. Гирька массой m, привязанная к резиновому шнуру, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Число оборотов гирьки в секунду равно n. Угол отклонения шнура от вертикали α. Найти длину нерастянутого шнура l_0, если известно, что для растяжения его до длины l_1 требуется сила F.

281. Какую скорость v должен иметь вагон, движущийся по закруглению радиусом $R = 98$ м, чтобы шар, подвешенный на нити к потолку вагона, отклонился от вертикали на угол $\alpha = 45°$? Чему равно натяжение нити T, если масса шара $m = 10$ кг?

282. Небольшое тело соскальзывает без трения с вершины полусферы радиуса R. На какой высоте тело оторвется от поверхности полусферы?

283. Маленькое колечко с массой m надето на большое проволочное кольцо радиуса R, расположенное в вертикальной плоскости. Колечко без начальной скорости начинает скользить вниз из верхней точки большого кольца. По какому закону изменяется давление N колечка на большое кольцо в зависимости от высоты h, на которую опустится колечко? Трение не учитывать.

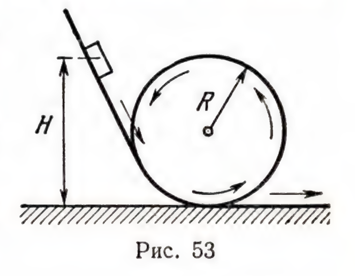


Рис. 53

284. Небольшое тело соскальзывает по наклонной поверхности, переходящей в «мертвую петлю», с высоты $H = 2R$, где R — радиус петли (рис. 53). На какой высоте h тело оторвется от поверхности петли? С какой высоты H_1 должно скатываться тело, для того чтобы отрыва не произошло?

285. Велосипедист при повороте по кругу радиуса R наклоняется внутрь закругления так, что угол между плоскостью велосипеда и землей равен α. Определить скорость v велосипедиста.

286. Полотно дороги на повороте наклонено в сторону центра закругления и составляет угол α с горизонтом. Радиус закругления R. По дороге едет велосипедист, скорость которого такова, что на повороте велосипед перпендикулярен к полотну дороги. С какой силой велосипед давит на дорогу, если масса велосипедиста с велосипедом равна m? Чему равна скорость v велосипеда?

287. Конькобежец движется со скоростью v по окружности радиуса R. Под каким углом α к горизонту он должен наклониться, чтобы сохранить равновесие?

§ 9. Закон всемирного тяготения

Закон всемирного тяготения в форме $F=\gamma\frac{mM}{R^2}$ (γ — гравитационная постоянная) непосредственно справедлив только для материальных точек, т. е. для тел, геометрические размеры которых во много раз меньше расстояния R между ними. Если одно из тел имеет форму шара, радиус которого много больше размеров другого тела, то этот закон также справедлив. Для двух тел сферической формы он справедлив при любых размерах тел.

Сила всемирного тяготения сообщает всем телам независимо от их массы одно и то же ускорение. Это происходит вследствие того, что инертная масса тела, входящая в уравнение движения, и гравитационная масса в законе тяготения равны друг другу.

Не следует смешивать силу тяготения и вес тела. Под весом понимается сила, с которой тело давит на опору, или же сила, с которой оно растягивает подвес. Сила тяготения на Земле всюду, за исключением полюсов, не равна весу, так как тела участвуют во вращении Земли и, следовательно, движутся с ускорением. Поэтому сила тяготения не уравновешивается реакцией опоры, равной весу. Правда, разница между силой тяготения и весом очень мала из-за малой угловой скорости вращения Земли.

---

288. Рассчитать силу притяжения F между Землей и Луной, если масса Земли $M = 6\cdot10^{24}$ кг, масса Луны $m = 7{,}3\cdot10^{22}$ кг и расстояние между их центрами в среднем равно $R = 3{,}8\cdot10^{8}$ м. Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н$\cdot$м^2/кг^2.

289. Ускорение силы тяжести на поверхности Луны в шесть раз меньше ускорения силы тяжести на поверхности Земли. На сколько выше и дальше может прыгнуть человек на Луне, чем на Земле?

290. Вычислить первую космическую скорость v у поверхности Луны, если радиус Луны $R = 1760$ км, а ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле.

291. Ракета поднялась на высоту $H = 800$ км. На сколько уменьшилась сила тяжести корпуса ракеты по сравнению с силой тяжести на поверхности Земли? Радиус Земли принять равным $R = 6400$ км.

292. Радиус Луны приблизительно в 3,7 раза меньше, чем радиус Земли, а ее масса в 81 раз меньше массы Земли. Чему равно ускорение силы тяжести g' на поверхности Луны?

293. Чему равно ускорение силы тяжести g' на поверхности Солнца, если его радиус R' примерно в 110 раз больше радиуса Земли R, а средняя плотность Солнца ρ' относится к средней плотности Земли ρ как 1 : 4?

294. Какую работу A нужно было бы совершить, чтобы вывести спутник с массой $m = 500$ кг на круговую орбиту, проходящую вблизи поверхности Земли, если бы сопротивление воздуха отсутствовало? Радиус Земли R принять равным 6400 км.

295. Звездная система состоит из двух одинаковых звезд, находящихся на расстоянии $D = 5 \cdot 10^{11}$ м друг от друга. Масса каждой звезды $M = 1{,}5 \cdot 10^{34}$ кг. Найти период T обращения звезд вокруг общего центра тяжести. Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \times \times 10^{-11}$ Н $\cdot$м²/кг².

296. Вокруг некоторой планеты по круговой орбите радиусом $R = 4{,}7 \cdot 10^6$ км со скоростью $v = 10$ км/с обращается спутник. Какова средняя плотность планеты, если ее радиус $r = 150\,000$ км? Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$м²/кг².

297. Спутник движется вокруг Земли на расстоянии H от ее поверхности. Радиус Земли $R_0 \gg H$. Определить период обращения спутника. Орбиту считать круговой. Ускорение свободного падения на поверхности Земли известно и равно g.

298. Какое время обращения T имел бы искусственный спутник Земли, если бы он был удален от поверхности Земли на расстояние, равное земному радиусу? Радиус Земли принять равным $R_0 = 6400$ км.

299. Определить радиус R круговой орбиты искусственного спутника, период обращения которого T равен одним суткам. Радиус Земли принять равным 6400 км.

300. Определить период T обращения Луны вокруг Земли, считая орбиту Луны окружностью радиуса $R = 380\,000$ км. Радиус земного шара $r = 6400$ км, ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с².

301. Определить среднюю плотность планеты ρ, продолжительность суток на которой $t = 6$ ч, если на ее экваторе пружинные весы показывают на 10% меньший вес, чем на полюсе. Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см³/г $\cdot$с².

§ 10. Гидро- и аэромеханика

В задачах на гидро- и аэростатику встречается новый тип силы — выталкивающая сила Архимеда. В остальном эти задачи не отличаются от обычных статических задач. Нужно иметь в виду, что сила Архимеда приложена к центру тяжести объема жидкости, вытесненной телом.

Особенностью жидкостей и газов как механических сред является подчинение их закону Паскаля. Давление на жидкость или газ передается одинаково во всех направлениях. Поэтому давление внутри жидкости на данной глубине будет постоянным.

При решении небольшого числа задач по гидродинамике используются в основном законы сохранения количества движения и энергии.

---

302. В наполненное до краев ведро опускают кусок льда. Часть воды, равная объему погруженной части куска льда, при этом выливается. Изменится ли давление на дно, когда лед растает?

303. В цилиндрическое ведро диаметром $d = 25$ см налита вода, занимающая объем $V = 12$ л. Каково давление p воды на стенку ведра на высоте $h = 10$ см от дна?

304. До какой высоты H нужно налить жидкость в цилиндрический сосуд радиуса R, чтобы сила F, с которой жидкость давит на боковую поверхность сосуда, была равна силе давления на дно?

305. Пробирка длиной $l = 10$ см была доверху заполнена водой и опущена открытым концом в стакан с водой. При этом почти вся пробирка находится над водой. Найти давление p воды на дно пробирки. Атмосферное давление $p_0 = 760$ мм рт. ст.

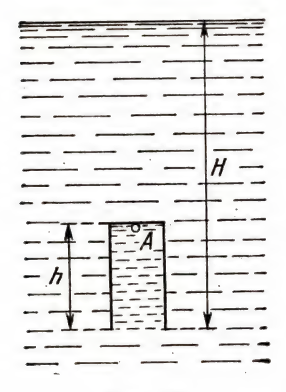


Рис. 54

306. В бассейн с водой погружен опрокинутый вверх дном цилиндрический сосуд высотой $h = 1$ м (рис. 54). Этот цилиндр заполнен маслом с плотностью $\rho = 900$ кг/м³. Найти давление в сосуде непосредственно под его дном в точке A, если известно, что нижний открытый конец цилиндра находится на глубине $H = 3$ м от поверхности воды в бассейне. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Н/м².

307. В U-образную трубку наливают ртуть. Затем в одно из колен трубки наливают масло, а в другое воду. Поверхности раздела ртути с маслом и водой в обоих коленах находятся на одном уровне. Определить высоту столба воды h, если высота столба масла $H = 20$ см, а его плотность $\rho = 0{,}9$ г/см³.

308. В двух цилиндрических сообщающихся сосудах налита ртуть. Сечение одного из сосудов вдвое больше другого. Широкий сосуд доливают водой до края. На какую высоту h поднимется при этом уровень ртути в другом сосуде? Первоначально уровень ртути был на расстоянии l от верхнего края широкого сосуда. Плотности ртути ρ и воды ρ_0 известны.

309. В U-образную трубку наливают ртуть. Затем в одно из колен наливают воду и опускают железный шарик массы m. На какую высоту h поднимется уровень ртути в другом колене? Площадь сечения трубки S, объем налитой воды V, плотность ртути ρ и плотность воды ρ_0.

310. Малый поршень гидравлического пресса за один ход опускается на расстояние $h = 0{,}2$ м, а большой поршень поднимается на $H = 0{,}01$ м. С какой силой F действует пресс на зажатое в нем тело, если на малый поршень действует сила $f = 500$ Н?

311. При подъеме груза массой $m = 2$ т с помощью гидравлического пресса была затрачена работа $A = 40$ Дж. При этом малый поршень сделал $n = 10$ ходов, перемещаясь за один ход на $h = 10$ см. Во сколько раз площадь большого поршня больше площади малого?

312. В цилиндрический сосуд налиты равные по массе количества воды и ртути. Общая высота столба жидкостей в сосуде $H = 143$ см. Чему равно давление p на дно сосуда? Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3.

313. Льдина равномерной толщины плавает в воде, высовываясь наружу на $h = 2$ см. Каков вес льдины P, если площадь ее основания $S = 200$ см^2? Плотность льда $\rho = 0{,}92$ г/см^3.

314. Каким может быть наибольший объем V_1 льдины, плавающей в воде, если известно, что алюминиевый брусок объемом $V_2 = 0{,}1$ м^3, примерзший к льдине, заставляет ее утонуть? Плотность льда $\rho_1 = 900$ кг/м^3, алюминия $\rho_2 = 2700$ кг/м^3.

315. Кусок льда массой $m = 1{,}9$ кг плавает в цилиндрической банке, наполненной жидкостью с плотностью $\rho = 0{,}95$ г/см^3. Площадь дна банки $S = 40$ см^2. На сколько изменится уровень жидкости, когда лед растает?

316. Полый шар, сделанный из материала с плотностью ρ_1, плавает на поверхности жидкости, имеющей плотность ρ_2. Радиус шара равен R, радиус полости r. Какова должна быть плотность вещества ρ, которым следует заполнить полость шара, чтобы он плавал внутри жидкости?

317. Бревно, длина которого $L = 3{,}5$ м, а диаметр $D = 30$ см, плавает в воде. Какова масса M человека, который может стоять на бревне, не замочив ног? Плотность дерева $\rho = 0{,}7$ г/см^3.

318. Кипа хлопка в воздухе весит $P = 150$ кгс. Определить истинный вес кипы P_0, если плотность хлопка в кипе $\rho = 0{,}84$ г/см^3, а плотность воздуха $\rho_1 = 0{,}0013$ г/см^3.

319. Определить плотность ρ однородного тела, вес которого в воздухе $P_0 = 2{,}8$ Н, а в воде $P_1 = 1{,}69$ Н. Выталкивающей силой воздуха пренебречь.

320. Для определения плотности неизвестной жидкости однородное тело подвесили на пружинных весах в этой жидкости, а затем в вакууме и в воде. Оказалось, что тело весит в жидкости $P_1 = 1{,}66$ Н, в вакууме $P_2 = 1{,}8$ Н, в воде $P_3 = 1{,}6$ Н. Найти плотность жидкости ρ_1 и тела ρ_2.

321. Из водоема медленно с постоянной скоростью вытаскивают алюминиевый цилиндр длиной $l = 2{,}3$ м и площадью поперечного сечения $S = 100$ см^2. Когда над поверхностью оказалась часть цилиндра длиной $l_1 = l/4$, веревка оборвалась. Определить предельное натяжение T, которое выдерживает веревка. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3.

322. Полый шарик из алюминия (плотность $\rho_1 = 2{,}7$ г/см^3) в воде имеет вес $P_1 = 24$ гс, а в бензине (плотность $\rho_2 = 0{,}7$ г/см^3) $P_2 = 33$ гс. Найти объем V полости. Выталкивающей силой воздуха пренебречь.

323. Определить истинный вес P тела объемом $V = 1000$ см^3, если при взвешивании в воздухе оно было уравновешено медными гирями весом $P_0 = 880$ гс. Удельный вес меди $d_1 = 8{,}8$ гс/см^3, воздуха $d_2 = 1{,}29$ гс/л.

324. Слиток сплава золота и серебра имеет вес в воздухе $P_0 = 300$ гс, а в воде $P = 274$ гс. Определить массу золота M_1 и серебра M_2 в слитке, если считать, что при сплавлении первоначальный объем не изменяется. Плотность золота $\rho_1 = 19{,}3$ г/см^3, плотность серебра $\rho_2 = 10{,}5$ г/см^3.

325. Два однородных тела из одного и того же материала подвешены к противоположным концам рычага и уравновешивают друг друга в вакууме. Сохранится ли это равновесие в воздухе?

326. Тонкая однородная палочка шарнирно закреплена за верхний конец. Нижний конец палочки погружен в воду. При равновесии под водой находится $^1/_5$ часть длины палочки. Определить плотность вещества палочки.

327. К концу однородной палочки с массой $m = 4$ г подвешен на нити алюминиевый шарик радиуса $r = 0{,}5$ см. Палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь равновесия при погружении в воду половины шарика. Определить, в каком отношении делится палочка точкой опоры. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3.

328. Сплошное тело кубической формы плавает в воде, причем под водой находится $^3/_4$ его объема. Если с помощью тонкой нити прикрепить центр верхней грани куба к плечу рычага длиной $l_1 = 8$ см и уравновесить с помощью гири весом $P = 0{,}31$ Н, прикрепленной к другому плечу рычага длиной $l_2 = 4$ см, то куб будет погружен в воду только на две трети. Определить длину l ребра куба.

329. В цилиндрическую банку с водой опустили железную коробочку, из-за чего уровень воды в банке поднялся на $l = 2$ см. На сколько опустится уровень воды, если коробочка утонет? Плотность железа $\rho = 7{,}8$ г/см^3.

330. Однородный куб плавает в ртути, причем $^1/_5$ часть его объема погружена в ртуть. Если на этот куб положить другой куб такого же размера, то первый куб будет погружен на половину своего объема. Какова плотность материала второго куба ρ_2? Будет ли система плавающих кубов в устойчивом равновесии? Плотность ртути $\rho_1 = 13{,}6$ г/см^3.

331. В сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости различных плотностей. На границе раздела жидкостей плавает однородный куб, погруженный целиком в жидкость. Плотность материала куба ρ больше плотности ρ_1 верхней жидкости, но меньше плотности ρ_2 нижней жидкости ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Какая часть объема куба будет находиться в верхней жидкости?

332. Плавающий в ртути куб погружен в ртуть на $^1/_4$ своего объема. Какая часть объема куба будет погружена в ртуть, если поверх нее налить слой воды, полностью закрывающий куб? Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3.

333. Пузырек газа поднимается со дна озера с постоянной скоростью. Найти силу сопротивления воды f, если объем пузырька $V = 1$ см^3.

334. Груз, прикрепленный к двум одинаковым воздушным шарам, поднимается с постоянной скоростью. Плотность газа в шарах ρ, плотность воздуха ρ_1. Найти ускорение груза a, если один из шаров лопнет. Массой оболочек шаров и сопротивлением воздуха пренебречь.

335. Два аэростата поднимают вверх одинаковые грузы. Первый движется с ускорением $a = g/2$, а второй — с постоянной скоростью. Плотность газа ρ в аэростатах одинакова и равна половине плотности воздуха ρ_1. Объем первого аэростата равен V_1. Чему равен объем V_2 второго аэростата? Массы оболочек считать одинаковыми. Сопротивление воздуха не учитывать.

336. Какую работу A нужно совершить при медленном подъеме камня объемом $V = 0{,}5$ м^3 в воде с глубины $H = 1$ м? Плотность камня $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

337. Стеклянный шарик массой $m = 100$ г, находящийся у поверхности глицерина, погружается на глубину $H = 1$ м. Найти изменение потенциальной энергии шарика ΔU. Плотность глицерина $\rho_1 = 1{,}2$ г/см^3, плотность стекла $\rho_2 = 2{,}4$ г/см^3.

338. На сколько изменится потенциальная энергия мяча, если его погрузить в воду на глубину $h = 4$ м? Масса мяча $m = 0{,}5$ кг, его диаметр $d = 24$ см. Деформацией мяча пренебречь.

339. С какой высоты h должно падать тело, плотность которого $\rho = 0{,}4$ г/см^3, чтобы оно погрузилось в воду на глубину $H = 6$ см? Сопротивление воды и воздуха при движении тела не учитывать.

340. Сосуд с жидкостью движется поступательно вдоль горизонтальной прямой с ускорением a. Под каким углом α к горизонту будет располагаться поверхность жидкости?

341. В бак равномерной струей наливается вода. За одну секунду притекает $Q_1 = 2$ л/с. В дне бака имеется отверстие площадью $S = 2$ см^2. На каком уровне h будет держаться вода в баке?

342. Направленная горизонтально струя воды бьет в вертикальную стенку. С какой силой струя давит на стенку, если скорость истечения воды $v = 10$ м/с и вода поступает через трубку, имеющую сечение $S = 4$ см^2? Принять, что после удара вода стекает вдоль стенки.

343. С катера, идущего со скоростью $v = 18$ км/ч, опускают в воду изогнутую под прямым углом трубку так, что опущенный в воду конец трубки горизонтален и обращен отверстием в сторону движения. Другой конец трубки, находящийся в воздухе, вертикален. На какую высоту h по отношению к уровню воды в озере поднимется вода в трубке? Трением пренебречь.

344. Как приближенно оценить скорость катера v, если вода поднимается вдоль носовой вертикальной части катера на высоту $h = 1$ м?

345. На гладкой горизонтальной поверхности стоит сосуд с водой. В боковой стенке сосуда у дна имеется отверстие площадью S. Какую силу нужно приложить к сосуду, чтобы удержать его в равновесии, если высота уровня воды в сосуде равна h?

346. На поршень спринцовки, имеющий площадь S, действует постоянная сила F. С какой скоростью v должна вытекать в горизонтальном направлении струя из отверстия площадью s, если плотность жидкости равна ρ?

§ 11. Колебания и волны

Период колебаний математического маятника, т. е. тела, геометрические размеры которого намного меньше длины нити, на которой оно подвешено, а масса намного больше массы нити подвеса, вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Особое внимание надо обратить на задачи 355, 356, 357 и 371. Они сложны для понимания, и в школе их обычно не рассматривают.

В условиях задач могут быть даны различные значения скорости звука в воздухе, так как эта скорость зависит от температуры.

---

347. Один из маятников совершил $n_1 = 10$ колебаний. Другой за то же время совершил $n_2 = 6$ колебаний. Разность длин маятников $\Delta l = 16$ см. Найти длины маятников l_1 и l_2.

348. Маятник представляет собой упругий шарик, прикрепленный к концу нити длиной l. При колебаниях шарик сталкивается с упругой массивной стенкой в моменты, когда нить занимает вертикальное положение. Определить период T колебаний маятника. Длительность столкновения мала.


Рис. 55

349. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса маятника на расстоянии $l_1 = l/2$ от нее в стенку забит гвоздь (рис. 55). Найти период T колебаний маятника.

350. Два одинаковых упругих шарика подвешены на невесомых и нерастяжимых нитях таким образом, что нити параллельны и центры тяжести шариков находятся на одном уровне. Шарики соприкасаются друг с другом. Длина нити первого шарика $l_1 = 1$ м, второго $l_2 = 0{,}25$ м. Нить второго шарика отклонили на небольшой угол и отпустили. Сколько раз столкнутся шарики за время $\tau = 4$ с, прошедшее с начала движения второго шарика?

351. Период колебаний маятника при температуре $t_1 = 20$ °C равен $T_1 = 2$ с. Как изменится период колебаний, если температура возрастет до $t_2 = 30$ °C? Коэффициент линейного расширения материала маятника $\alpha = 1{,}85 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

352. Как изменится период колебаний маятника при перенесении его с Земли на Луну? Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Земли в 3,7 раза больше радиуса Луны.

353. Часы, период колебаний маятника которых $T_1 = 1$ с (часы с секундным маятником), на поверхности земли идут точно. На сколько будут отставать эти часы за сутки, если их поднять на высоту $h = 200$ м над поверхностью земли?

354. Определить потенциальную энергию U математического маятника с массой $m = 20$ г в положении, соответствующем углу отклонения нити от вертикали $\alpha = 10°$, если частота колебаний маятника $\nu = 0{,}5$ с$^{-1}$. Потенциальную энергию маятника в положении равновесия считать равной нулю.

355. С каким ускорением a и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы находящийся в ней секундный маятник за время $t = 2$ мин 30 с совершил $N = 100$ колебаний?

356. Найти период колебаний математического маятника длиной l, подвешенного в вагоне, который движется горизонтально с ускорением a.

357. Кубик совершает малые колебания в вертикальной плоскости, двигаясь без трения по внутренней поверхности сферической чаши. Определить период колебаний кубика, если чаша опускается вниз с ускорением $a = g/3$. Внутренний радиус чаши R много больше ребра кубика.

358. Эхо, вызванное ружейным выстрелом, дошло до стрелка через $t = 4$ с после выстрела. На каком расстоянии s от наблюдателя находится преграда, от которой произошло отражение звука? Скорость v звука в воздухе принять равной 330 м/с.

359. На расстоянии $s = 1068$ м от наблюдателя ударяют молотком по железнодорожному рельсу. Наблюдатель, приложив ухо к рельсу, услышал звук на $\tau = 3$ с раньше, чем он дошел до него по воздуху. Чему равна скорость v_1 звука в стали? Скорость звука в воздухе принять равной 333 м/с.

360. Звук выстрела и пуля одновременно достигают высоты $H = 680$ м. Какова начальная скорость пули? Выстрел произведен вертикально вверх; сопротивление движению пули не учитывать. Скорость звука v принять равной 340 м/с.

361. Из пункта A в пункт B был послан звуковой сигнал частоты $\nu = 50$ Гц, распространяющийся со скоростью $v_1 = 330$ м/с. При этом на расстоянии от A до B укладывалось целое число волн. Этот опыт повторили, когда температура была на величину $\Delta t = 20$ К выше, чем в первом случае. Число волн, укладывающихся на расстоянии от A до B, уменьшилось во втором случае на две. Найти расстояние l между пунктами A и B, если известно, что при повышении температуры на 1 К скорость звука увеличивается на 0,5 м/с.

362. Определить скорость звука в воде, если колебания с периодом $T = 0{,}005$ с вызывают звуковую волну длиной $\lambda = 7{,}175$ м.

363. Определить частоту ν звуковых колебаний в стали, если расстояние между ближайшими точками звуковой волны, отличающимися по фазе на 90°, составляет $l = 1{,}54$ м. Скорость звуковых волн в стали $v = 5000$ м/с.

364. Найти разность фаз между двумя точками звуковой волны, отстоящими друг от друга на $l = 25$ см, если частота колебаний $\nu = 680$ Гц. Скорость звука v принять равной 340 м/с.

365. Расстояние между узлами стоячей волны, создаваемой камертоном в воздухе, $l = 40$ см. Определить частоту колебаний ν камертона. Скорость звука v принять равной 340 м/с.

366. Звуковые колебания частоты ν имеют в первой среде длину волны λ_1, а во второй среде λ_2. Как изменяется скорость распространения этих колебаний при переходе из первой среды во вторую, если $\lambda_1 = 2\lambda_2$?

367. Во сколько раз изменится длина звуковой волны при переходе звука из воздуха в воду? Скорость звука в воде $v_1 = 1480$ м/с, в воздухе $v_2 = 340$ м/с.

368. Один и тот же камертон один раз закреплен в тисках, а другой раз на резонаторном ящике. В обоих случаях камертон возбуждается одинаковыми по силе ударами. В каком случае камертон будет звучать дольше?

369. К верхнему концу цилиндрического сосуда, в который постепенно наливают воду, поднесен звучащий камертон. Звук, издаваемый камертоном, заметно усиливается, когда расстояния от поверхности жидкости до верхнего края сосуда достигают значений $h_1 = 25$ см и $h_2 = 75$ см. Определить частоту колебаний ν камертона. Скорость звука v принять равной 340 м/с.

370. Труба, длина которой $l = 1$ м, заполнена воздухом при нормальном атмосферном давлении. Один раз труба открыта с одного конца, другой раз — с обоих концов и в третий раз закрыта с обоих концов. При каких наименьших частотах в трубе будут возникать стоячие звуковые волны в указанных трех случаях? Скорость звука v принять равной 340 м/с.

371. Движущийся по реке теплоход дает свисток, частота которого $\nu_0 = 400$ Гц. Стоящий на берегу наблюдатель воспринимает звук свистка как колебания с частотой $\nu = 395$ Гц. С какой скоростью u движется теплоход? Приближается или удаляется он от наблюдателя? Скорость звука v принять равной 340 м/с.

ГЛАВА II

ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

§ 12. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

Уравнения, выражающие зависимость линейных размеров и объемов от температуры,

$$l_t = l_0 (1 + \beta t), \quad (1)$$

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t), \quad (2)$$

являются приближенными, поскольку в них не принимается во внимание зависимость самих коэффициентов теплового расширения α и β от температуры. При расчетах по формулам (1) и (2) следует иметь в виду, что получаемые результаты могут быть достаточно точными только в интервалах температур, в которых изменения коэффициентов малы по сравнению с величиной этих коэффициентов. В таблицах обычно приводятся средние значения α и β с указанием интервала температур, для которых эти значения определены (см. задачу 376).

Значения l_0 и V_0 в формулах (1) и (2) относятся к температуре $t = 0°C$. В тех случаях, когда в задачах даны начальные длины или объемы при температурах, не равных нулю, часто начинают решение задач с определения l_0 и V_0 и в итоге получают выражения, имеющие вид:

$$l_t = \frac{l_1}{1 + \beta t_1} (1 + \beta t_2).$$

Такой метод расчета нецелесообразен. Действительно, умножив числитель и знаменатель этой формулы на $1 - \beta t_1$, получим:

$$l_t = \frac{l_1 [1 + \beta (t_2 - t_1) - \beta^2 t_1 t_2]}{1 - \beta^2 t_1^2}.$$

Ввиду малости коэффициента β по сравнению с единицей, члены, содержащие β^2, малы по сравнению с членом, в который β входит в первой степени. Их можно отбросить. В результате формула для вычисления длины l_t оказывается более простой и достаточно

точной для всех практически важных случаев:

$$l_t = l_1 [1 + \beta (t_2 - t_1)].$$

Точно так же имеем:

$$V_t = V_1 [1 + \alpha (t_2 - t_1)]. \qquad (3)$$

---

372. Как должны относиться длины l_1 и l_2 двух стержней, сделанных из разных материалов, с коэффициентами линейного расширения β_1 и β_2, чтобы при любой температуре разность длин стержней оставалась постоянной?

373. Два одинаковых стальных моста должны быть построены один на севере, другой на юге. Каковы должны быть при 0 °С зазоры, компенсирующие удлинение моста при изменении температуры, если на юге возможны колебания от —10 °С до +50 °С, а на севере от —50 °С до +20 °С? Длина моста L при 0 °С равна 100 м, средний коэффициент линейного расширения стали $\beta = 10^{-5}$ °С$^{-1}$.

374. Латунный сосуд при нагревании увеличился в объеме на $n = 0{,}6\%$. На сколько градусов был нагрет сосуд, если средний коэффициент линейного расширения латуни $\beta = 2 \cdot 10^{-5}$ °С$^{-1}$?

375. При температуре $t = 0°$ С длина алюминиевого стержня $l_{01} = 50$ см, а железного стержня $l_{02} = 50{,}05$ см. Сечения стержней одинаковы. При какой температуре t_1 будут одинаковы длины стержней и при какой температуре t_2 будут одинаковы их объемы? Коэффициенты линейного расширения алюминия $\beta_1 = 24 \cdot 10^{-6}$ °С$^{-1}$, железа $\beta_2 = 12 \cdot 10^{-6}$ °С$^{-1}$.

376. Средние значения коэффициента объемного расширения воды для нескольких интервалов температуры:

$$0 \leqslant t \leqslant 4\ °\text{C}, \quad \alpha_1 = -3{,}3 \cdot 10^{-5}\ °\text{C}^{-1};$$
$$4 \leqslant t \leqslant 10\ °\text{C}, \quad \alpha_2 = 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ °\text{C}^{-1};$$
$$10 \leqslant t \leqslant 20\ °\text{C}, \quad \alpha_3 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ °\text{C}^{-1}.$$

Найти объем воды V_{15} при температуре $t = 15°$ С, если при температуре $t_1 = 1°$ С он равен $V_1 = 10^3$ см^3.

377. Сообщающиеся сосуды заполнены жидкостью, имеющей температуру t_1. При нагревании жидкости в одном из сосудов до температуры t_2 уровень жидкости установился в этом сосуде на высоте h_2, а в другом — на высоте h_1. Найти коэффициент объемного расширения жидкости.

378. Определить объем шарика ртутного термометра, если известно, что при температуре $t_0 = 0°$ С ртуть заполняет только шарик, а объем канала между делениями 0° и 100° равен $V = 3$ мм^3. Коэффициент объемного расширения ртути $\alpha = 0{,}000181$ °С$^{-1}$, коэффициент линейного расширения стекла $\beta = 0{,}000008$ °С$^{-1}$.

379. В кварцевый литровый стакан диаметром $d = 6$ см до половины налили воду, а затем положили шар из эбонита объемом $V = 100$ см^3. На какую высоту Δh поднимется уровень воды при

изменении температуры от $t_1 = 10$ °C до $t_2 = 70$ °C? Коэффициент линейного расширения эбонита $\beta = 8 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}, тепловым расширением кварца можно пренебречь ($\beta \approx 4 \cdot 10^{-7}$ °C^{-1}), среднее значение коэффициента объемного расширения воды $\alpha = 3 \cdot 10^{-4}$ °C^{-1}.

380. В кварцевый сосуд объемом $V_1 = 2{,}5$ л помещен латунный цилиндр, масса которого $m = 8{,}5$ кг. Остальная часть сосуда заполнена водой. При нагревании сосуда вместе с содержимым на $\Delta t = 3$ K уровень воды в сосуде не изменился. Найти коэффициент теплового расширения воды α. Коэффициенты линейного расширения кварца $\beta_1 = 0{,}42 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}, латуни $\beta_2 = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$ °C^{-1}. Плотность латуни $\rho = 8{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

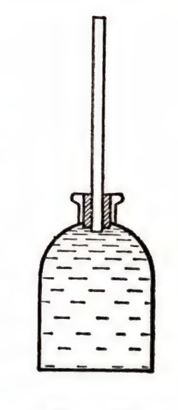
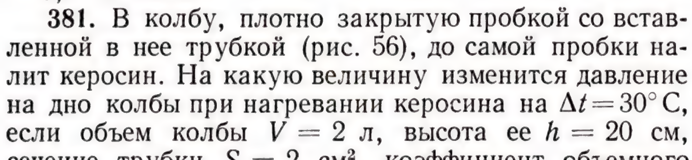


Рис. 56



381. В колбу, плотно закрытую пробкой со вставленной в нее трубкой (рис. 56), до самой пробки налит керосин. На какую величину изменится давление на дно колбы при нагревании керосина на $\Delta t = 30°$ C, если объем колбы $V = 2$ л, высота ее $h = 20$ см, сечение трубки $S = 2$ см^2, коэффициент объемного расширения керосина $\alpha = 10^{-3}$ °C^{-1} и его плотность до нагревания $\rho_0 = 800$ кг/м^3? Расширением колбы пренебречь.

§ 13. Теплота, калориметрия, коэффициент полезного действия

382. Латунный калориметр, имеющий массу $m_к = 0{,}2$ кг, содержит $m_1 = 0{,}4$ кг анилина при температуре $t_0 = 10$ °C. В калориметр долили $m_2 = 0{,}4$ кг анилина, нагретого до температуры $t = 31$ °C. Определить удельную теплоемкость c_x анилина, если после перемешивания установилась температура $\theta = 20$ °C. Удельная теплоемкость латуни $c = 0{,}4$ кДж/(кг·°C).

383. В сосуд объемом V с теплонепроницаемыми стенками, заполненный газом с молярной массой μ при температуре T и давлении p, внесен медный шарик массы M, имеющий температуру T_1. Какая температура θ установится в сосуде, если удельная теплоемкость газа c, а меди c_1?

384. В калориметре смешиваются три химически не взаимодействующих жидкости в количествах $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 5$ кг, имеющих соответственно температуры $t_1 = 6$ °C, $t_2 = -40$ °C, $t_3 = 60$ °C и удельные теплоемкости $c_1 = 2$ кДж/(кг·°C), $c_2 = 4$ кДж/(кг·°C), $c_3 = 2$ кДж/(кг·°C). Определить температуру θ смеси и количество теплоты, необходимое для последующего нагревания смеси до $t = 6$ °C.

385. В два одинаковых калориметра, содержащих воду (в одном масса воды $m_1 = 0{,}1$ кг при температуре $t_1 = 45$ °C, в другом масса воды $m_2 = 0{,}5$ кг при температуре $t_2 = 24$ °C), налили одинаковые количества ртути. После установления теплового равновесия

в обоих калориметрах оказалось, что температура воды в них одинакова и равна $t = 17$ °C. Определить теплоемкость c калориметров.

386. Для измерения температуры воды, имеющей массу $m_1 = 66$ г, в нее погрузили термометр, который показал $t_1 = 32{,}4$ °C. Какова действительная температура t_x воды, если теплоемкость термометра $c = 1{,}9$ Дж/°C и перед погружением в воду он показывал температуру помещения $t_2 = 17{,}8$ °C?

387. В стеклянный стакан, имеющий массу $m_1 = 120$ г и находящийся при температуре $t_1 = 20$ °C, налили горячую воду; ее масса $m_2 = 200$ г, температура $t_2 = 100$ °C. Через $\tau = 5$ мин температура стакана с водой стала равной $t_3 = 40$ °C. Предполагая, что потеря теплоты шла равномерно, найти, какое количество теплоты терялось каждую секунду. Удельные теплоемкости стекла $c_1 = 840$ Дж/(кг·°C), воды $c_2 = 4{,}2$ кДж/(кг·°C).

388. В калориметр налито $m_1 = 2$ кг воды, имеющей температуру $t_1 = +5$ °C, и положен кусок льда массой $m_2 = 5$ кг, имеющий температуру $t_2 = -40$ °C. Определить температуру θ и объем V содержимого калориметра после установления теплового равновесия. Теплоемкостью калориметра и теплообменом с внешней средой пренебречь.

При 0 °C плотность воды $\rho_1 = 10^3$ кг/м³, льда $\rho_2 = 920$ кг/м³. Удельные теплоемкости воды $c_1 = 4{,}2$ кДж/(кг·°C), льда $c_2 = 2{,}1$ кДж/(кг·°C). Удельная теплота плавления льда $r = 0{,}33$ МДж/кг.

389. Ванну емкостью $V = 100$ л необходимо заполнить водой, имеющей температуру $\theta = 30$ °C, используя воду с температурой $t_1 = 80$ °C и лед с температурой $t_2 = -20$ °C. Определить массу m льда, который придется положить в ванну. Теплоемкостью ванны и потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4{,}2$ кДж/(кг·°C), удельная теплоемкость льда $c_2 = 2{,}1$ кДж/(кг·°C), его удельная теплота плавления $r = 0{,}337$ МДж/кг.

390. В сосуд, содержавший $m_1 = 10$ кг воды при температуре $t_1 = 10$ °C, положили кусок льда, охлажденный до $t_2 = -50$ °C, после чего температура образовавшейся ледяной массы оказалась равной $\theta = -4$ °C. Какое количество m_2 льда было положено в сосуд? Удельные теплоемкости воды $c_1 = 4{,}2$ кДж/(кг·°C), льда $c_2 = 2{,}1$ кДж/(кг·°C) и теплота плавления льда $r = 0{,}33$ МДж/кг.

391. Кусок свинца массой $m = 1$ кг расплавился наполовину при сообщении ему количества теплоты $q = 54{,}5 \cdot 10^3$ Дж. Какова была начальная температура T_0 свинца? Удельная теплота плавления свинца $r = 2{,}4 \cdot 10^4$ Дж/кг, его удельная теплоемкость $c = 130$ Дж/(кг·К) и температура плавления $T_1 = 600$ К.

392. Тигель, содержащий некоторое количество олова, нагревается электрическим током. Выделяемое в единицу времени количество тепла постоянно. За время $\tau_1 = 10$ мин температура олова повышается от $t_1 = 20$ °C до $t_2 = 70$ °C. Спустя еще время $\tau_2 = 83$ мин олово полностью расплавилось. Найти удельную тепло-

емкость c олова. Температура плавления олова $t_3 = 232$ °С, его удельная теплота плавления $r = 58{,}5$ кДж/кг. Теплоемкостью тигля и потерями тепла в окружающее пространство пренебречь.

393. В открытый сосуд положили кусок льда, вес которого $P_1 = 98$ Н и температура $t_1 = -10$ °С. Определить вес P воды в сосуде после того, как его содержимому сообщили количество теплоты $q = 2 \cdot 10^7$ Дж. Удельные теплоемкости воды $c_1 = 4{,}2$ кДж/(кг·°С) и льда $c_2 = 2{,}1$ кДж/(кг·°С). Удельная теплота плавления льда $r = 0{,}34$ МДж/кг, удельная теплота испарения воды $\lambda = 2{,}3$ МДж/кг.

394. В прямоугольную кювету длиной $a = 24$ см и шириной $b = 20$ см, в которой находилась вода при температуре $t_1 = 25$ °С, налили жидкий азот, взятый при температуре его кипения $t_2 = -196$ °С. После испарения азота вода охладилась до температуры $t = 0$ °С и покрылась корочкой льда при той же температуре. Определить толщину h ледяной корочки, если считать, что пары азота уходили от поверхности льда, нагревшись до его температуры и взяв от воды половину всего полученного ими тепла. Объем воды в кювете был $V = 1$ л, масса азота $m = 0{,}8$ кг. Удельная теплота парообразования азота $\lambda = 0{,}2$ МДж/кг, удельная теплоемкость газообразного азота $c_1 = 1{,}05$ кДж/(кг·°С), плотность льда $\rho_1 = 900$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $r = 335$ кДж/кг.

395. В теплоизолированном сосуде содержится смесь воды $m_1 = 500$ г и льда $m_2 = 54{,}4$ г при температуре $t_1 = 0$ °С. В сосуд вводится сухой насыщенный пар массой $m_3 = 6{,}6$ г при температуре $t_2 = 100$ °С. Какой будет температура ϑ после установления теплового равновесия? Удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2{,}3$ МДж/кг, удельная теплота плавления льда $r = 0{,}33$ МДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·°С).

396. Под колоколом воздушного насоса находится вода, масса которой $m_1 = 40$ г, а температура $t = 0$ °С. Воздух из-под колокола быстро откачивают. Благодаря интенсивному испарению части воды вся остальная вода замерзает. Определить массу m образовавшегося льда, если его температура также $t = 0$ °С. Удельная теплота испарения воды при 0 °С $\lambda = 2{,}3$ МДж/кг, удельная теплота плавления льда $r = 0{,}33$ МДж/кг.

397. В сосуде, из которого откачивают воздух, находится небольшое количество воды при температуре 0 °С. Благодаря интенсивному испарению воды оставшаяся часть ее замерзает. Испарившаяся часть воды имеет массу $m_1 = 2{,}71$ г. Определить первоначальную массу воды m. Удельная теплота испарения воды при 0 °С $\lambda = 2{,}47$ МДж/кг, удельная теплота плавления льда $r = 335$ кДж/кг.

398. Определить массу m воды, которая может быть превращена в лед при 0 °С испарением эфира, масса которого $M = 0{,}1$ кг, а температура $t_1 = 20$ °С. Теплообмен происходит только между эфиром и водой. Начальная температура воды также $t_1 = 20$ °С. Удельная теплота испарения эфира $\lambda = 3{,}8 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная

теплота плавления льда $r = 0{,}33$ МДж/кг, удельные теплоемкости воды $c_1 = 4{,}2$ кДж/(кг·°С) и эфира $c_2 = 2{,}1$ кДж/(кг·°С).

399. Вода при соблюдении некоторых предосторожностей может быть переохлаждена до температуры $t_1 = -10$ °С. Такое состояние воды неустойчиво, и при любом возмущении вода превращается в лед с температурой $t = 0$ °С. Какова масса m льда, образовавшегося из переохлажденной воды, масса которой $M = 1$ кг? Считать, что удельная теплоемкость воды не зависит от температуры и равна $c = 4{,}2$ кДж/(кг·°С), а удельная теплота плавления льда $r = 0{,}34$ МДж/кг.

400. Колба, заполненная до краев, содержит воду и ртуть. Масса воды $m_1 = 0{,}5$ кг, масса ртути $m_2 = 1$ кг. При сообщении содержимому колбы количества теплоты $q = 90$ кДж из колбы выливается часть воды массой $m_3 = 3{,}5$ г. Определить коэффициент расширения ртути α_2. Расширением колбы пренебречь. Коэффициент расширения воды $\alpha_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$, плотности воды $\rho_1 = 10^3$ кг/м^3 и ртути $\rho_2 = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельные теплоемкости воды $c_1 = 4{,}2$ кДж/(кг·К) и ртути $c_2 = 140$ Дж/(кг·К).

401. В калориметр с тающим льдом положили кусок латуни массой $m_1 = 430$ г. При этом превратилась в воду часть льда с массой $m_2 = 200$ г. Определить объем латуни V в момент погружения ее в калориметр. Плотность латуни при температуре $t_0 = 0$ °С равна $\rho_0 = 8600$ кг/м^3. Удельная теплоемкость латуни $c = 400$ Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $r = 0{,}34$ МДж/кг, коэффициент линейного расширения латуни $\beta = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ °С$^{-1}$.

402. В цилиндре двигателя внутреннего сгорания при работе образуются газы, температура которых $t_1 = 727$ °С. Температура отработанного газа $t_2 = 100$ °С. Двигатель расходует в час $m = 36$ кг топлива, теплота сгорания которого $Q = 43$ МДж/кг. Какую максимальную полезную мощность может развивать этот двигатель?

403. Во сколько раз максимально возможный коэффициент полезного действия (к. п. д.) двигателя внутреннего сгорания больше, чем максимально возможный к. п. д. паровой машины, работающей на перегретом паре при температуре $t_1 = 300$ °С, если температура газов в цилиндре двигателя достигает $t_2 = 1000$ °С? Отработанные же газы и пар имеют одинаковую температуру $t_3 = 100$ °С.

404. Речное судно на подводных крыльях «Метеор» развивает мощность $N = 1500$ кВт при коэффициенте полезного действия $\eta = 30\%$. Определить расход горючего на 1 км пути при скорости $v = 72$ км/ч. Теплота сгорания горючего $Q = 50$ МДж/кг.

405. Реактивный самолет пролетает с постоянной скоростью $v = 900$ км/ч путь $s = 1800$ км, затрачивая при этом горючее массой $m = 4$ т. Мощность двигателя самолета равна $N = 5900$ кВт, коэффициент полезного действия $\eta = 23\%$. Какова теплотворная способность Q горючего, применяемого самолетом?

406. Какое количество керосина m потребовалось бы сжечь, чтобы вывести спутник массой $m_1 = 10^3$ кг на круговую орбиту

вблизи поверхности Земли, если бы сопротивления воздуха не было и вся теплота целиком превращалась бы в работу? Радиус Земли $R = 6300$ км, теплотворная способность керосина $Q = 46$ МДж/кг.

407. Каков коэффициент полезного действия η автомашины с мотором мощностью $N = 20$ кВт, если при скорости $v = 72$ км/ч мотор потребляет $V = 10$ л бензина на пути $s = 100$ км? Плотность бензина $\rho = 0{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, его теплота сгорания $Q = 44$ МДж/кг.

408. В электрическом чайнике мощностью $N = 800$ Вт можно вскипятить $V = 1{,}5$ л воды, имеющей температуру $t_1 = 20$ °С, за время $\tau = 20$ мин. Найти коэффициент полезного действия чайника. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·°С).

409. За время $\tau = 1$ ч в холодильнике превращается в лед при температуре $t_1 = 0$ °С масса воды $m = 3{,}6$ кг, имевшей начальную температуру $t_2 = 20$ °С. Какая мощность N потребляется холодильником от электросети, если он отдает в окружающее пространство энергию со скоростью $q = 840$ Дж/с? (Это условие не характерно для обычных холодильников: в общем случае скорость отдачи энергии в окружающее пространство зависит от того, чтó содержится в холодильнике.) Удельная теплота плавления льда $r = 0{,}34$ МДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·°С).

410. Поезд с массой $m = 2000$ т при торможении с ускорением $a = 0{,}3$ м/с^2 остановился через время $t = 50$ с после начала торможения. Какое количество теплоты выделилось при торможении?

411. С какой скоростью v должна вылететь из ружья свинцовая дробинка при выстреле вертикально вниз с высоты $h = 100$ м, чтобы при ударе о неупругое тело дробинка расплавилась? Считать, что выделившаяся теплота распределилась между дробинкой и телом поровну. Начальная температура дробинки $T = 500$ К, температура плавления свинца $T = 600$ К, удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг·К), его удельная теплота плавления $r = 25$ кДж/кг.

412. Брусок массой m равномерно втягивают за привязанную к нему веревку на высоту h по доске, угол наклона которой к горизонту равен α. Веревка параллельна доске. Коэффициент трения бруска о доску равен k. Найти энергию W, которая идет на нагревание доски и бруска.

413. Тело с массой $m = 1$ кг соскальзывает с наклонной плоскости длиной $l = 22$ м, которая образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Скорость тела у основания наклонной плоскости равна $v = 4$ м/с. Какое количество тепла q выделилось при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела была равна нулю?

414. Найти число n оборотов в минуту, которое делает вал паровой машины при ходе поршня $l = 0{,}5$ м и площади поршня $S = 0{,}2$ м^2, если среднее давление пара составляет $p = 1$ МПа, а мощность машины равна $N = 200$ кВт. За один оборот вала поршень делает один рабочий ход.

415. Пуля с массой m попадает в деревянный куб с массой M, лежащий на гладком столе, и пробивает его. Определить величину энергии W, превратившейся в тепло, если пуля прошла через центр

куба и скорость ее после вылета стала равной v_2, а перед попаданием в куб была v_1.

416. Найти количество теплоты q, которое выделилось при абсолютно неупругом соударении двух шаров, двигавшихся навстречу друг другу. Масса первого шара $m_1 = 0{,}4$ кг, его скорость $v_1 = 3$ м/с, масса второго шара $m_2 = 0{,}2$ кг и скорость его $v_2 = 12$ м/с.

§ 14. Законы идеального газа и уравнение состояния

Состояние газа определяется его объемом V, давлением p и температурой t. Законы для идеальных газов выражаются более простыми формулами, если температура выражена по шкале Кельвина (абсолютная температура): $T = t + 273°$, где t — температура по шкале Цельсия. Если масса газа, а также число его молекул остаются постоянными, то состояние газа описывается следующими законами.

1. *Закон Бойля — Мариотта.* При постоянной температуре (изотермический процесс, $t = \text{const}$)

$$pV = \text{const}, \tag{4}$$

или

$$p_1V_1 = p_2V_2 = p_3V_3 = \ldots = p_0V_0. \tag{4'}$$

2. *Закон Гей-Люссака.* При постоянном давлении (изобарный процесс, $p = \text{const}$) объем газа при температуре t

$$V_t = V_0\,(1 + \alpha t), \tag{5}$$

где V_0 — объем газа при $t = 0$ °C и $\alpha = \frac{1}{273}$ °C^{-1}, или

$$\frac{V}{T} = \text{const}. \tag{5'}$$

3. *Закон Шарля.* При постоянном объеме (изохорный процесс, $V = \text{const}$) давление газа при температуре t

$$p_t = p_0\,(1 + \beta t), \tag{6}$$

где p_0 — давление газа при $t_0 = 0$ °C и $\beta = \alpha = \frac{1}{273}$ °C^{-1}, или

$$\frac{p}{T} = \text{const}. \tag{6'}$$

Так как величина α для газов не столь мала, как коэффициенты объемного расширения твердых и жидких тел, то применение приближенных выражений типа (3) из введения к § 12 вместо выражений (5) и (6) в тех случаях, когда начальные объемы и давления заданы не при 0 °C, может привести к значительным ошибкам. В таких случаях гораздо удобнее пользоваться выражениями (5′) и (6′).

4. *Объединенный закон газового состояния (уравнение Клапейрона)*:

$$\frac{pV}{T} = \text{const}, \qquad (7)$$

или

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_3V_3}{T_3} = \ldots = \frac{p_0V_0}{T_0}. \qquad (7')$$

Величины p_0, T_0 и V_0 соответствуют «нормальному состоянию» газа, т. е. состоянию при $p_0 = 101325$ Н/м² $= 101{,}325$ кПа $=$ $= 760$ мм рт. ст. и $T_0 = 273$ К (0 °С). Занимаемый газом объем пропорционален количеству вещества газа. Если количество вещества составляет один моль, то при нормальных условиях (давлении p_0 и температуре T_0) любой газ занимает объем $V_{0\mu} = 0{,}02241$ м³/моль. Следовательно, величина

$$\frac{p_0V_{0\mu}}{T_0} = R$$

одинакова для всех газов. Она носит название универсальной газовой постоянной.

Таким образом, объединенный газовый закон для одного моля можно представить в виде

$$pV = RT. \qquad (8)$$

Для ν молей объем при тех же условиях увеличивается в ν раз. Следовательно, во столько же раз увеличивается и правая часть уравнения (8), т. е.

$$pV = \nu RT = \frac{m}{\mu}RT, \qquad (9)$$

где $\nu = m/\mu$, m — масса газа и μ — его молярная масса.

Выражение (9) носит название уравнения Менделеева — Клапейрона или уравнения состояния идеального газа. Оно определяет связь между параметрами, характеризующими состояние газа. Для неизменного количества газа постоянство одного из параметров приводит к выражению зависимости между двумя оставшимися, т. е. к уравнению соответствующего газового закона. Так, при $T = \text{const}$ получается закон Бойля—Мариотта (4), при $p = \text{const}$ — закон Гей-Люссака (5′) и при $V = \text{const}$ — закон Шарля (6′).

5. *Закон парциальных давлений (закон Дальтона)*. Давление, которое оказывал бы газ, входящий в состав смеси, если бы он был один в этом сосуде, называется парциальным. Согласно закону Дальтона давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений. С точки зрения молекулярной физики, согласно которой давление объясняется ударами молекул о стенки сосуда, закон Дальтона означает, что действия на стенки молекул каждого из газов складываются.

В частности, закон Дальтона применим и при добавлении в сосуд, в котором уже находится газ под давлением p, некоторого количества этого же газа. В этом случае парциальное давление добавлен-

ного газа можно рассчитывать так, как если бы сосуд был пустой. Окончательное же давление будет складываться из этого парциального давления и давления p.

Уравнения (4) — (9) описывают только такие состояния, для которых во всех точках объема, занимаемого газом, температура и давление одинаковы, т. е. состояния, когда газ находится в тепловом равновесии. При непрерывном изменении p, V и T уравнения (4) — (9) применимы ко всей последовательности состояний только при бесконечно медленных процессах, когда неравномерности в распределении температуры и давления бесконечно малы. Если процессы идут не бесконечно медленно, рассмотренные уравнения, как уравнения процессов, не имеют смысла, но остаются справедливыми как уравнения состояния для моментов времени, когда газ оказывается в состоянии теплового равновесия.

---

417. Представить на графиках (в координатах p, V; p, T и V, T) изотермический процесс для одного моля газа при температурах $T = T_1$ и $T = 3T_1$.

418. При нормальных условиях газ занимает объем $V_0 = 1$ м³. Какой объем V_1 будет занимать этот газ при давлении $p_1 = 4{,}9 \cdot 10^6$ Н/м² $= 4{,}9$ МПа? Температура газа в обоих состояниях одинакова. Нормальное давление $p_0 = 760$ мм рт. ст. $\approx 10^5$ Н/м² $= 0{,}1$ МПа.

419. Газ сжат изотермически от объема $V_1 = 8$ л до объема $V_2 = 6$ л. Давление при этом возросло на $\Delta p = 4$ кПа $= 30$ мм рт. ст. Каким было первоначальное давление p_1?

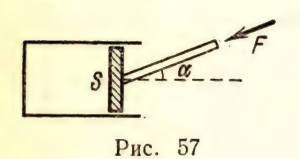


Рис. 57

420. Под каким давлением находится газ в цилиндре под поршнем, если поршень удерживается в равновесии при помощи стержня, вдоль которого действует сила $F = 9{,}8$ Н (рис. 57)? Площадь поршня $S = 7$ см², стержень составляет с перпендикуляром к поршню угол $\alpha = 30°$. Трение не учитывается. Атмосферное давление $p_0 = 98$ кПа.

421. В баллоне объемом $V = 10$ л находится кислород, масса которого $m = 12{,}8$ г. Давление в баллоне измеряется U-образным манометром, заполненным водой. Чему равна разность уровней Δh воды в трубках манометра при температуре газа $t = 27$ °C? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Н/м².

Рис. 58

422. В цилиндре под поршнем находится воздух. Поршень имеет форму, указанную на рис. 58. Сила тяжести поршня $P = 60$ Н, площадь сечения цилиндра $S_0 = 20$ см². Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Н/м². Какого веса P_1 груз надо положить на поршень, чтобы объем V_1 воздуха в цилиндре уменьшился в два раза? Трение не учитывать. Температура постоянна.

423. Один конец цилиндрической трубки длиной $l = 25$ см и радиусом $r = 1$ см закрыт пробкой, а в другой вставлен поршень, который медленно вдвигают в трубку. Когда поршень подвинется на расстояние $d = 8$ см, пробка вылетает. Считая температуру неизменной, определить силу F трения пробки о стенки трубки в момент вылета пробки. Атмосферное давление — нормальное: $p_0 \approx 10^5$ Н/м².

424. Узкая вертикальная цилиндрическая трубка длиной L, закрытая с одного конца, содержит воздух, отделенный от наружного воздуха столбиком ртути длиной h. Плотность ртути равна ρ. Трубка расположена открытым концом вверх. Какова была длина l столбика воздуха в трубке, если при перевертывании трубки открытым концом вниз из трубки вылилась половина ртути? Атмосферное давление равно p_0.

425. Посредине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки длиной $L = 1$ м находится столбик ртути длиной $h = 20$ см. Если трубку поставить вертикально, столбик ртути сместится на $l = 10$ см. До какого давления p_1 была откачана трубка? Плотность ртути $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м³.

426. Трубку длиной $L = 76$ см, запаянную с одного конца, погружают в вертикальном положении открытым концом в сосуд со ртутью. На каком расстоянии x от поверхности должен находиться запаянный конец трубки, чтобы уровень ртути в ней был ниже уровня в сосуде на $h = 76$ см? Атмосферное давление $p_0 = 101{,}3$ кПа. Плотность ртути $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м³.

427. Открытая с обоих концов трубка длиной $L = 2$ м опущена в вертикальном положении на половину своей длины в сосуд со ртутью. В трубку вдвигается поршень. На каком расстоянии x от поверхности ртути в сосуде должен находиться поршень, чтобы уровень ртути в трубке опустился на глубину $h = 1$ м? Атмосферное давление $p_0 = 101{,}3$ кПа. Плотность ртути $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м³.

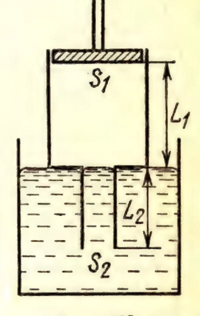


Рис. 59

428. К дну цилиндра длиной L_1 с площадью поперечного сечения S_1 приделана трубка длиной L_2 с площадью поперечного сечения S_2. Трубка целиком погружена в ртуть (рис. 59). На какую глубину x опустится ртуть в трубке, если вдвинуть поршень до самого дна цилиндра? При какой наименьшей площади поперечного сечения цилиндра S_1 из трубки будет вытеснена вся ртуть? Атмосферное давление равно p_0, плотность ртути ρ.

429. В сосуд со ртутью погружена в вертикальном положении трубка с поршнем, открытая с нижнего конца. Уровень ртути в сосуде и трубке одинаков, когда поршень находится выше этого уровня на расстоянии $h_0 = 1$ см. Найти давление воздуха p в трубке после подъема поршня до высоты $H = 75$ см над уровнем ртути в сосуде. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Н/м², удельный вес ртути $d = \rho g = 1{,}33 \cdot 10^5$ Н/м³.

430. Для измерения глубины погружения в море различных приборов применяется запаянная с одного конца стеклянная трубка длиной $L = 1$ м, которая погружается в воду вместе с приборами в вертикальном положении открытым концом вниз. Наибольшая глубина погружения H вычисляется по наименьшей высоте h сжатого воздуха в трубке. Для определения величины h внутренние стенки трубки покрываются легкорастворимой в воде краской. Та часть трубки, куда не проникла вода, остается окрашенной. На какую глубину H была опущена трубка, если оказалось, что $h = 0{,}2$ м? Атмосферное давление $p_0 = 0{,}1$ МПа, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, температуру воздуха в трубке считать постоянной.

431. Пузырек воздуха поднимается со дна водоема глубиной H. Найти зависимость радиуса пузырька r от глубины h его местонахождения в данный момент времени, если его объем на дне равен V_0. Силы поверхностного натяжения не учитывать.

432. Тонкий резиновый шар радиусом $a_1 = 2$ см наполнен воздухом при температуре $t_1 = 20$ °C и нормальном давлении $p_0 = 0{,}1$ МПа. Каков будет радиус шара a_2, если его опустить в воду с температурой $t_2 = 4$ °C на глубину $h = 20$ м?

433. Из затонувших подводных лодок иногда спасались, открывая сначала нижние клапаны (кингстоны), а затем верхний люк, и с пузырем воздуха выскакивали на поверхность. Какая доля k объема лодки не заливалась водой после открытия кингстонов, если лодка лежала на глубине $h = 42$ м? Начальное давление воздуха в лодке $p_0 = 100$ кПа. Плотность морской воды $\rho = 1030$ кг/м^3.

434. Оболочка аэростата заполняется газом не полностью. По мере подъема аэростата атмосферное давление убывает, и оболочка расширяется. На какой высоте H газ займет весь объем оболочки $V_1 = 600$ м^3, если она была наполнена гелием в количестве $V_2 = 500$ м^3 при давлении $p_0 = 10^5$ Па? Атмосферное давление убывает вблизи земли на $\Delta p = 133$ Па при подъеме на каждые $\Delta h = 11$ м. Температуру считать постоянной, не зависящей от высоты.

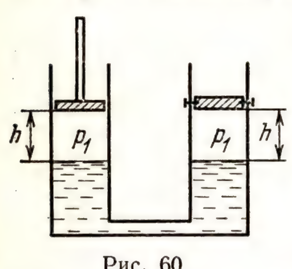


Рис. 60

435. Два одинаковых сообщающихся сосуда с поршнями частично заполнены жидкостью с плотностью ρ. Расстояние поршней от поверхности жидкости одинаково и равно h (рис. 60). Один из поршней закреплен, а второй поднимают на расстояние x. При какой величине x разность уровней жидкости в сосудах будет h? Начальное давление воздуха в каждом из сосудов равно p_1.

436. Ртуть, налитая в U-образную трубку, не доходит до ее концов на расстояние $h_1 = 20$ см. Одно колено трубки запаяно (рис. 61). Найти понижение h уровня ртути в открытом колене, если при выпускании части ртути через кран уровень ртути в запаянном колене понизился на $h_2 = 18$ см. Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа, плотность ртути $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3.

437. Определить объем v засасывающей камеры поршневого насоса, если при откачивании этим насосом воздуха из баллона объемом $V = 4$ л давление уменьшается при каждом взмахе в $n = 1,2$ раза.

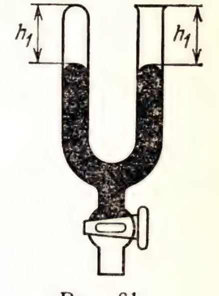


Рис. 61

438. Насос имеет объем засасывающей камеры v. За сколько циклов работы насоса можно откачать объем V от давления p_0 до давления p_n? Температуру считать постоянной.

439. Компрессор, обеспечивающий работу отбойных молотков, засасывает из атмосферы $V = 100$ л воздуха в секунду. Сколько отбойных молотков может работать от этого компрессора, если для каждого молотка необходимо $v = 100$ см^3 воздуха в секунду при давлении $p = 5$ МПа? Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.

440. До какого давления накачан футбольный мяч емкостью $V = 3$ л, если при этом сделано $n = 40$ качаний поршневого насоса? За каждое качание насос захватывает из атмосферы $v = 150$ см^3 воздуха. Мяч вначале был пустой. Атмосферное давление $p_0 = 0,1$ МПа.

441. Камеры автомобильных шин накачиваются при помощи насоса, работающего от двигателя. Сколько времени требуется для того, чтобы камеру емкостью $V = 6$ л накачать до давления $p_1 = 0,5$ МПа, если при каждом ходе насос захватывает из атмосферы цилиндрический столб воздуха высотой $h = 10$ см и диаметром $d = 10$ см и если время одного качания $\tau = 1,5$ с? Начальное давление в камере $p_0 = 100$ кПа.

442. Два сосуда, наполненные воздухом под давлением $p_1 = 8 \cdot 10^5$ Па и $p_2 = 6 \cdot 10^5$ Па, имеют объем $V_1 = 3$ л и $V_2 = 5$ л соответственно. Сосуды соединяют трубкой, объемом которой можно пренебречь по сравнению с объемами сосудов. Найти установившееся давление в сосудах, если температура воздуха в них была одинакова и после установления равновесия не изменилась.

443. Два сосуда с объемами $V_1 = 40$ л и $V_2 = 20$ л содержат газ при одинаковой температуре, но разных давлениях. После соединения сосудов в них установилось давление $p = 1$ МПа. Каково было начальное давление p_1 в большем сосуде, если в меньшем оно было $p_2 = 600$ кПа? Температура не меняется.

444. Три сосуда одинакового объема соединены между собой кранами. Первый сосуд содержит газ с массой m_1, третий — тот же газ с массой m_2, второй сосуд пустой. Сначала соединили второй и третий сосуды, а когда давление выравнялось, второй сосуд отсоединили от третьего и соединили с первым. Давление в первом и втором сосудах установилось равным p_1. Определить начальное давление p в первом сосуде. Температуру считать постоянной.

445. Представьте на графиках в координатах p, V; p, T и V, T изобарный процесс: 1) для $p = p_1$ и $p = 3p_1$ для одного моля газа; 2) для $p = p_1$ для трех молей.

446. При нагревании газа на $\Delta T = 1$ °C при постоянном давлении объем его увеличился в два раза. В каком интервале температур происходило нагревание?

447. Газ нагрет от температуры $t_1 = 27$ °C до $t_2 = 39$ °C. На сколько процентов увеличился объем, если давление осталось неизменным?

448. Два сосуда с газом одинакового объема V соединены тонкой капиллярной трубкой, имеющей площадь поперечного сечения S. В середине капилляра находится капля ртути. Найти зависимость между относительным изменением температуры $\Delta T/T_0$ и смещением капли Δl, если начальная температура газа в обоих баллонах была равна T_0 и нагревается только один баллон.

449. Полый шарик объемом $V = 100$ см^3 снабжен длинной трубкой с делениями. Объем канала трубки между соседними делениями равен $\Delta V = 0{,}2$ см^3. В шарике и части трубки находится воздух, который отделен от наружного воздуха каплей ртути. При температуре $t = 5$ °C капля стоит у деления $n = 20$. В каких пределах можно измерять температуру таким термометром, если трубка имеет $N = 100$ делений? Тепловым расширением сосуда и трубки пренебречь.

450. Закрытый горизонтальный цилиндр разделен на две части подвижным поршнем. По одну сторону поршня в цилиндре имеется некоторое количество молей газа при температуре $t_1 = -73$ °C, по другую сторону — такое же количество молей этого газа при $t_2 = +27$ °C. Поршень находится в равновесии. Определить объемы V_1 и V_2, занимаемые газом, если общий объем равен $V = 500$ см^3.

451. Цилиндрический сосуд заполнен газом при температуре $t = 27$ °C и давлении $p_0 = 100$ кПа и разделен пополам подвижной перегородкой. Каково будет давление p_1, если газ в одной половине нагрет до температуры $t_1 = 57$ °C, а во второй половине температура газа осталась без изменения?

452. Газ в цилиндрическом сосуде разделен на две части легкоподвижным поршнем, имеющим массу m и площадь S. При горизонтальном положении цилиндра давление газа в сосуде по обе стороны поршня одинаково и равно p. Определить давление p_1 газа над поршнем, когда цилиндр расположен вертикально. Температуру считать постоянной.

453. В трубке с газом длиной $L = 1{,}73$ м, закрытой на обоих концах, находится столбик ртути длиной $l = 30$ мм. Когда трубка расположена вертикально, ртуть делит трубку на две равные части. Давление газа над ртутью $p = 8$ кПа $= 60$ мм рт. ст. На какое расстояние x сдвинется ртуть, если трубку положить горизонтально?

454. В объеме $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ м^3 находится масса $m = 0{,}012$ кг газа, температура которого $t_1 = 177$ °C. При какой температуре t_2 плотность этого газа будет равна $\rho_2 = 6 \cdot 10^{-6}$ кг/см^3, если давление останется неизменным?

455. Открытую стеклянную колбу, имеющую форму шара радиусом $a = 2$ см с горлышком длиной $l = 10$ см и диаметром $d = 1$ см,

нагрели до некоторой температуры t_1, а затем погрузили целиком в воду горлышком вниз. При охлаждении колбы вода вошла в горлышко. Когда колба приняла температуру воды $t_2 = 13$ °С, ее начали приподнимать из воды, не переворачивая, так, что шарообразная часть оказалась над водой, а горлышко — частично погруженным в воду. При этом, когда уровень воды в горлышке и снаружи совпал, то под водой оставалась половина горлышка. Какова была температура t_1, до которой была нагрета колба? Изменением размеров колбы при нагревании пренебречь.

456. Воздух в открытом сосуде нагревают от температуры $t_1 = 10$ °С до температуры $t_2 = 600$ °С, затем, герметически закрыв сосуд, охлаждают воздух в нем до первоначальной температуры. Определить плотность воздуха в сосуде при температуре t_2 и после охлаждения. Плотность воздуха при нормальных условиях $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м³. Изменением объема сосуда пренебречь.

457. Вертикальный цилиндр с тяжелым поршнем наполнен кислородом, масса которого $m = 10$ г. После увеличения температуры на $\Delta T = 50$ К поршень, имеющий площадь $S = 100$ см², поднялся на высоту $h = 7$ см. Определить вес поршня P, если над поршнем нормальное давление $p_0 = 0{,}1$ МПа. Трение поршня о стенки цилиндра не учитывать.

458. В запаянной цилиндрической трубке, расположенной горизонтально, находится воздух при нормальных условиях. Трубка разделена легкоподвижным поршнем на две части, объемы которых V_1 и V_2 относятся как 1 : 2. До какой температуры t_1 следует нагреть меньшую часть и до какой t_2 охладить бо́льшую, чтобы поршень делил трубку на две равные части, если нагревание и охлаждение обеих частей производится при условии $V/T = \text{const}$?

459. Посередине закрытой с обоих концов горизонтальной трубки длиной $L = 1$ м находится в равновесии подвижная тонкая теплонепроницаемая перегородка. Слева от нее температура газа $t_1 = 100$ °С, справа $t_2 = 0$ °С. На каком расстоянии x от левого конца трубки установится перегородка, если температура всего газа станет равной $t_2 = 0$ °С?

460. Открытую пробирку с воздухом при атмосферном давлении, равном p_1, медленно нагрели до температуры t_1, затем герметически закрыли и охладили до $t_2 = 10$ °С. Давление при этом упало до $p_2 = 0{,}7p_1$. До какой температуры была нагрета пробирка? Расширение пробирки не учитывать.

461. В цилиндре под поршнем находится воздух при давлении $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па и температуре $t_1 = 27$ °С. Какой груз P нужно положить на поршень после нагревания воздуха до температуры $t_2 = 50$ °С, чтобы объем воздуха в цилиндре был равен первоначальному? Площадь поршня $S = 30$ см².

462. Манометр на баллоне с газом в помещении с температурой $t_1 = 17$ °С показывает давление $p = 240$ кПа. На улице показание манометра уменьшилось на $\Delta p = 40$ кПа. Найти температуру наружного воздуха, если атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.

463. При изготовлении газополных электроламп их наполняют инертным газом при $t_1 = 150$ °C. Под каким давлением должны наполняться лампы, чтобы при температуре $t_2 = 300$ °C, которая устанавливается в лампе при горении, давление не превышало $p_0 = 0{,}1$ МПа?

464. Доказать, пользуясь законами идеальных газов, равенство коэффициента объемного расширения α и термического коэффициента давления β.

465. На рис. 62 дан график изменения состояния идеального газа в координатах V, T. Представьте этот процесс на графиках в координатах p, V и p, T.

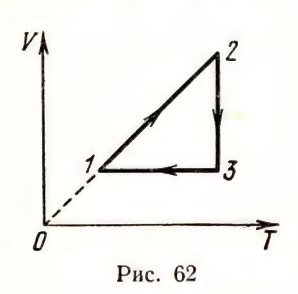


Рис. 62

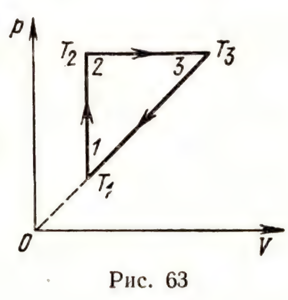


Рис. 63

466. Газ последовательно переводится из состояния *1* с температурой T_1 в состояние *2* с температурой T_2, а затем в состояние *3* с температурой T_3 и возвращается в состояние *1*. Определить температуру T_3, если процессы изменения состояния происходили так, как это показано на графике (рис. 63), а температуры T_1 и T_2 известны.

467. Газ, занимающий при температуре $t_1 = 127$ °C и давлении $p_1 = 10^5$ Н/м^2 объем $V_1 = 2$ л, изотермически сжимают до объема V_2 и давления p_2, затем изобарно охлаждают до температуры $t_3 = -73$ °C, после чего изотермически изменяют объем до значения $V_4 = 1$ л. Найти конечное давление p_4.

468. Решить предыдущую задачу графически, построив графики в координатах p, V; p, T и V, T.

469. Вычислить газовую постоянную R, входящую в уравнение состояния $pV = RT$.

470. Определить массу m водорода, находящегося в баллоне емкостью $V = 20$ л под давлением $p = 830$ кПа при температуре $t = 17$ °C.

471. Некоторый газ с массой $m_1 = 0{,}007$ кг, находящийся в баллоне при температуре $t_1 = 27$ °C, создает давление $p_1 = 50$ кПа. Водород с массой $m_2 = 0{,}004$ кг в этом же баллоне при температуре $t_2 = 60$ °C создает давление $p_2 = 444$ кПа. Какова молярная масса μ_1 неизвестного газа?

472. Открытый сосуд нагрет до температуры $t_2 = 450$ °C. Какая часть массы воздуха осталась в нем по сравнению с тем количест-

вом, какое в нем было при $t_1 = 27$ °C? Расширением сосуда пренебречь.

473. Из баллона со сжатым кислородом израсходовали столько кислорода, что его давление упало от $p_1 = 100$ ат $= 9{,}8$ МПа до 80 ат $= 7{,}84$ МПа. Какая доля кислорода израсходована?

474. В баллоне объемом $V = 0{,}2$ м^3 находится гелий под давлением $p_1 = 10^5$ Н/м^2 при $t_1 = 17$ °C. После подкачивания гелия давление повысилось до $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Н/м^2, а температура увеличилась до $t_2 = 47$ °C. На сколько увеличилась масса m гелия? Молярная масса гелия $\mu = 0{,}004$ кг/моль.

475. Газ в количестве $m = 16$ г при давлении $p = 1$ МПа и температуре $t = 112$ °C занимает объем $V = 1600$ см^3. Определить, какой это газ.

476. Определить плотность азота при температуре $t = 27$ °C и давлении $p = 0{,}1$ МПа.

477. Высота пика Ленина на Памире равна 7134 м. Атмосферное давление на этой высоте $p = 38$ кПа (288 мм рт. ст.). Определить плотность воздуха на вершине пика при $t = 0$ °C. Молярную массу воздуха принять равной $\mu = 0{,}029$ кг/моль.

478. При каком давлении p плотность ρ газообразного азота, имеющего температуру $t = -73$ °C, составляет 0,4 плотности воды комнатной температуры $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3?

479. Под каким давлением p_1 нужно наполнить воздухом баллон емкостью $V_1 = 10$ л, чтобы при соединении его с баллоном емкостью $V_2 = 30$ л, содержащим воздух при $p_2 = 100$ кПа, установилось общее давление $p = 200$ кПа?

480. Два сосуда одинаковой емкости содержат воздух, один при температуре T_1 и давлении p_1, другой при температуре T_2 и давлении p_2. Сосуды соединены и после выравнивания давлений и температур воздух нагрет до температуры T. Какое установится давление после нагревания?

481. Закрытый с обоих концов цилиндр наполнен газом при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 30$ °C и разделен легкоподвижным поршнем на две равные части длиной по $L = 50$ см. На какую величину ΔT нужно повысить температуру газа в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на расстояние $l = 20$ см, если во второй половине цилиндра температура не изменится? Определить давление газа после смещения поршня.

482. Длинная пробирка открытым концом погружена в сосуд со ртутью. При температуре $t_1 = 47$ °C уровни ртути в пробирке и в сосуде совпадают. Над уровнем ртути остается часть пробирки длиной $L = 76$ см. На какую высоту h поднимется ртуть в пробирке, если ее охладить до температуры $t_2 = -33$ °C? Атмосферное давление нормальное, капиллярные силы не учитывать.

483. Сосуд объемом $V = 100$ л разделен пополам полупроницаемой перегородкой. В одной половине сосуда находится $m_1 = 2$ г водорода, во второй — один моль азота. Определить давление, установившееся по обе стороны перегородки, если она может

пропускать только водород. Температура в обеих половинах одинакова $t = 127$ °C и постоянна.

484. Внутри горизонтального замкнутого с концов цилиндра имеется тонкий нетеплопроводный поршень. С одной стороны поршня в цилиндре находится кислород при температуре $t_1 = 127$ °C, с другой стороны — водород при температуре $t_2 = 27$ °C. Массы обоих газов одинаковы. На каких расстояниях от торцов цилиндра расположится поршень при этих условиях, если общая длина цилиндра $L = 65$ см?

485. Сосуд с газом разделен подвижной перегородкой на две части, отношение объемов которых $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$. Температура газа в меньшем объеме $t_1 = 177$ °C, в большем объеме $t_2 = 267$ °C, давление в обеих частях сосуда одинаково и равно p. Каково будет отношение объемов, если температуры выравняются? Стенки сосуда не теплопроводны, теплообмен возможен только через перегородку.

486. Цилиндрический сосуд длиной $L = 85$ см разделен на две части легкоподвижным поршнем. При каком положении поршня давление в обеих частях цилиндра будет одинаково, если одна часть заполнена кислородом, а другая — такой же массой водорода? Температура в обеих частях цилиндра одинакова. Молярная масса кислорода $\mu_1 = 0{,}032$ кг/моль, водорода $\mu_2 = 0{,}002$ кг/моль.

487. Для условий, описанных в предыдущей задаче, определить, при каких температурах кислорода T_1 и водорода T_2 поршень будет делить сосуд на две равные части.

488. Определить температуру азота, имеющего массу $m = 2$ г, занимающего объем $V = 830$ см^3 при давлении $p = 0{,}2$ МПа.

489. Шар-зонд заполнен газом при температуре $t_1 = 27$ °C до давления $p_1 = 105$ кПа. После подъема шара на высоту, где давление $p_0 = 80$ кПа, объем шара увеличился на $n = 5\%$, и давление в нем стало отличаться от внешнего на $\Delta p = 5$ кПа. Определить температуру воздуха на этой высоте, предполагая, что газ в шаре принял эту температуру.

490. Какое количество n баллонов водорода емкостью по $v = 50$ л при температуре $t = 27$ °C и при давлении $p = 4$ МПа потребуется для заполнения аэростата объемом $V_1 = 1000$ м^3, если при $t_1 = 7$ °C давление в нем должно быть равно $p_1 = 100$ кПа?

491. В каждую из четырех шин автомобиля накачано по $V_1 = 200$ л воздуха при температуре $t_1 = 17$ °C. Объем шины $V_2 = 54{,}6$ л, площадь сцепления шины с грунтом при температуре $t_2 = 0$ °C равна $S = 290$ см^2. Найти вес автомобиля. Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.

492. Баллон емкостью $V_1 = 40$ л содержит сжатый воздух под давлением $p_1 = 15$ МПа при температуре $t_1 = 27$ °C. Какой объем V воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если лодка находится на глубине $h = 20$ м, где температура $t_2 = 7$ °C? Удельный вес воды $d = \rho g = 9{,}8 \cdot 10^3$ Н/м^3. Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.

493. Два невесомых поршня вставлены в открытую с двух сторон трубку, имеющую сечение $S = 10$ см^2, и могут перемещаться без трения. Давление и температура между поршнями и снаружи одинаковы и равны $p_0 = 10^5$ Н/м^2 и $t = 27$ °C. До какой температуры t_1 нужно нагреть воздух между поршнями, чтобы нить, связывающая поршни, порвалась, если нить выдерживает натяжение не более $F = 30$ Н?

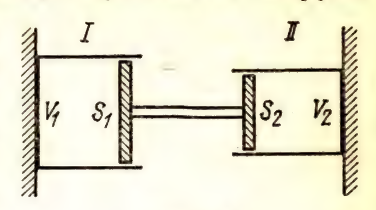


Рис. 64

494. В двух горизонтальных цилиндрах с закрепленными поршнями находится воздух при давлении p_0 и температуре T_1 (рис. 64). Объемы воздуха в цилиндрах V_1 и V_2, площади поршней S_1 и S_2. Наружное давление равно нулю. Между поршнями вставлен стержень, поршни освобождены, а затем воздух в первом цилиндре нагрет до температуры T_2. Определить силу F, сжимающую стержень в установившемся состоянии.

495. Полый шар с жесткой оболочкой массы $M = 11{,}6$ г наполнен водородом. Объем водорода $V = 10$ л. Температура водорода и окружающего шар воздуха $t_0 = 0$ °C. Найти давление p водорода в шаре, если результирующая подъемная сила шара равна нулю, т. е. шар парит в воздухе. Атмосферное давление $p_0 = 0{,}1$ МПа, молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль.

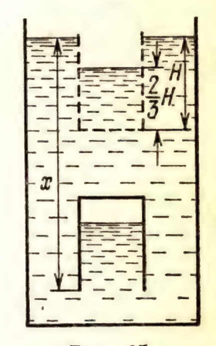


Рис. 65

496. Воздух в стакане, имеющем высоту $H = 10$ см и площадь дна $S = 25$ см^2, нагрет до $t_1 = 87$ °C. Стакан погружен вверх дном в воду так, что его дно находится на уровне поверхности воды. Сколько воды войдет в стакан, когда воздух в стакане примет температуру воды $t_2 = 17$ °C? Атмосферное давление $p_0 = 0{,}1$ МПа, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

497. Стакан, высота которого $H = 9$ см, наполненный на $^2/_3$ водой, плавает в воде так, что его края находятся вровень с поверхностью воды. Этот же стакан с воздухом, нагретым до $t_1 = 87$ °C, погружают в воду вверх дном (рис. 65). На какую глубину нужно погрузить стакан, чтобы он, приняв температуру воды $t_2 = 27$ °C, не всплывал и не тонул? Атмосферное давление $p_0 = 0{,}1$ МПа, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

§ 15. Элементы молекулярной физики

498. Вычислить массу одной молекулы водорода и кислорода.

499. Число молекул, содержащихся в единице объема неизвестного газа при нормальных условиях, равно $n_0 = 2{,}7 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Этот же газ при температуре $t = 91$ °C и давлении $p = 800$ кПа

имеет плотность $\rho = 5{,}4$ кг/м³. Найти массу m одной молекулы этого газа.

500. Вычислить число n_0 молекул, содержащихся в объеме $V = 1$ см³ газа при нормальных условиях.

501. В цилиндре под поршнем находится газ при нормальных условиях. Сначала объем газа увеличили в $k = 10$ раз, затем газ нагрели при постоянном давлении до температуры $t = 127$ °C. Определить концентрацию n молекул в конечном состоянии. Число Авогадро $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

502. Ампула объемом $V = 1$ см³, содержащая воздух при нормальных условиях, оставлена в космосе, где давление можно считать равным нулю. В ампуле пробито отверстие. Через какое время t давление в ампуле станет равным нулю, если считать, что через отверстие каждую секунду вылетает сто миллионов молекул?

503. Полая сфера радиусом a, содержащая газ при температуре T, находится в вакууме. Через отверстие в стенке сферы часть газа вытекает. Каким окажется давление p_2 газа в сфере, после того как вылетит n молекул газа, если начальное давление газа в сфере было p_1? При нормальных условиях в единице объема газа содержится n_0 молекул.

504. Диаметр молекулы азота примерно равен $d = 3 \cdot 10^{-8}$ см. Считая, что молекулы имеют сферическую форму, найти, какая часть объема, занимаемого газом, приходится на объем самих молекул при температуре $t = 0$ °C и нормальном атмосферном давлении $p_0 = 1$ атм ≈ 100 кПа, а также при давлении $p_1 = 500\ p_0$. (*Указание*: Считать, что при этих давлениях газ не отличается от идеального.)

505. На стенку площадью S налетает поток молекул со средней скоростью v. Число молекул, движущихся по направлению к стенке, в единице объема n_0, масса каждой молекулы m_0. Найти действующие на стенку силу и давление, если молекулы движутся перпендикулярно к стенке и удары молекул о стенку абсолютно упруги.

506. Сосуд, имеющий форму кубика, содержит $k = 10^{-3}$ молей идеального газа. Будем считать, что к каждой из шести граней кубика перпендикулярно к граням в любой момент времени движется одинаковое число молекул. Найти давление газа, если масса молекулы $m_0 = 3 \cdot 10^{-23}$ г и средняя скорость теплового движения молекул $v = 500$ м/с. Считать удары молекул о стенки сосуда абсолютно упругими.

507. В сосуде находится газ под давлением $p = 150$ кПа при температуре $t = 273$ °C. Какое количество n_0 молекул находится при этих условиях в единице объема сосуда?

508. Какова температура газа, находящегося под давлением $p = 0{,}5$ МПа, если в сосуде объемом $V = 15$ л содержится $n = 1{,}8 \cdot 10^{24}$ молекул? Газ считать идеальным.

509. В сосуде объемом $V_1 = 1$ л при температуре $t = 183$ °C находится $n = 1{,}62 \cdot 10^{22}$ молекул газа. Каково будет давление p газа, если объем сосуда изотермически увеличить до $V = kV_1$?

Пусть $k = 5$. Число молекул газа в единице объема при нормальных условиях $n_0 = 2{,}7 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$.

510. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до величины $p = 10^{-12}$ мм рт. ст. $\approx 1{,}33 \cdot 10^{-10}$ Па. Сколько молекул газа n_0 содержится в 1 см^3 при указанном давлении и температуре $t = 48$ °C?

511. Некоторое количество водорода находится при температуре $T_1 = 200$ K и давлении $p_1 = 3$ мм рт. ст. $= 400$ Па. Газ нагревают до температуры $T_2 = 10\,000$ K, при которой молекулы водорода практически полностью распадаются на атомы. Определить давление газа, если его объем и масса остались без изменения.

§ 16. Внутренняя энергия, теплоемкость и работа расширения газов

Энергия, сообщаемая телу в виде теплоты q, идет на изменение ΔU внутренней энергии этого тела и на совершение этим телом работы A над окружающими его телами. Согласно закону сохранения энергии

$$q = \Delta U + A. \qquad (10)$$

Внутренняя энергия тела складывается из кинетической энергии его молекул, зависящей от средней скорости их теплового хаотического движения, и потенциальной энергии взаимодействия молекул между собой, зависящей от взаимного расположения молекул. Потенциальная энергия взаимодействия молекул идеального газа равна нулю. Полная же кинетическая энергия газовых молекул, как это следует, в частности, из решения задач 505 и 506, пропорциональна (при постоянном объеме) давлению газа на стенку сосуда. С другой стороны, в этом случае по закону Шарля давление пропорционально абсолютной температуре. Таким образом, внутренняя энергия идеального газа пропорциональна его абсолютной температуре.

Работа, совершаемая газом при расширении от объема V_1 до V_2, если давление p остается постоянным, определяется выражением

$$A = p(V_2 - V_1). \qquad (11)$$

Согласно закону сохранения энергии (10) для увеличения внутренней энергии газа на одну и ту же величину, а следовательно, и для повышения на одинаковую величину температуры газа требуется сообщить ему различное количество теплоты в зависимости от величины работы, совершаемой при этом газом. Поэтому, в частности, теплоемкость газа при постоянном объеме c_V, когда процесс нагревания не сопровождается совершением работы, оказывается меньше, чем теплоемкость его при постоянном давлении c_p, когда газ, согласно формуле (11), совершает работу.

512. В вертикальном цилиндре под тяжелым поршнем находится кислород с массой $m = 2$ кг. Для повышения температуры кислорода на $\Delta T = 5$ К ему было сообщено количество теплоты $q = 9160$ Дж. Найти удельную теплоемкость кислорода, работу, совершаемую им при расширении, и увеличение его внутренней энергии. Молярная масса кислорода $\mu = 0{,}032$ кг/моль.

513. Полый шар, наполненный сухим воздухом при температуре 0 °С и давлении $p_1 = 747$ мм рт. ст. $= 99{,}4$ кПа, уравновешен на весах. Когда затем давление воздуха в нем было сделано равным $p_2 = 1$ кПа, то для равновесия потребовалось положить на одну из чашек весов груз массой $m = 37$ г. Определить объем V полости шара. Плотность воздуха при температуре 0 °С и давлении $p_0 = 760$ мм рт. ст. $= 101{,}3$ кПа равна $\rho_0 = 1{,}29$ кг/м³.

514. Некоторое количество газа находится в баллоне объемом $V = 1$ л. После выпускания части газа из баллона давление в нем уменьшилось на $\Delta p = 420$ мм рт. ст. $= 56$ кПа, а вес баллона с газом — на $\Delta P = 0{,}02$ Н. Температура газа при этом не изменилась. Найти плотность ρ_0 газа при нормальном давлении $p_0 = 760$ мм рт. ст. $= 101{,}3$ кПа и температуре опыта.

515. В баллоне объемом $V = 2{,}5$ л находится газ при температуре 0 °С. Баллон с газом весит $P_1 = 5{,}00$ Н. В баллон добавили порцию того же газа, после чего баллон стал весить $P_2 = 5{,}02$ Н. На какую величину Δp возросло давление в баллоне, если добавленный газ при температуре 0 °С и давлении $p_0 = 100$ кПа имел плотность $\rho_0 = 0{,}0012$ г/см³? Температура газа в баллоне осталась без изменения.

516. В цилиндре под поршнем находится кислород с массой $m = 2$ кг. Поршень закреплен. Какое количество теплоты q нужно сообщить кислороду, чтобы его температура повысилась на $\Delta t = 5$ °С? Каково увеличение внутренней энергии и удельная теплоемкость кислорода в этом случае? Для решения использовать условия и результаты решения задачи № 512.

517. Два полых металлических шара имеют одинаковые размеры и одинаковые массы. Один из них откачан, а другой заполнен кислородом при давлении $p = 2$ МПа. Внутренние радиусы шаров $a = 10$ см. Шары вносят в камеру, через которую идет поток насыщенных паров воды при температуре $t = 100$ °С ($T = 373$ К). После того как температура паров и шаров выравнялась, оказалось, что на пустом шаре сконденсировалось $m_1 = 10$ г воды, а на шаре с кислородом $m_2 = 12{,}33$ г. Начальная температура шаров $t_1 = 27$ °С. Удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2250$ Дж/г. Найти удельную теплоемкость c кислорода. Изменением объема шаров пренебречь. Молярная масса кислорода $\mu = 0{,}032$ кг/моль.

518. В сосуде с теплонепроницаемыми стенками объемом $V = 5{,}6$ л находится кислород при температуре $t_1 = 66$ °С ($T_1 = 339$ К) и давлении $p_1 = 0{,}25$ МПа. Для нагрева газа до температуры $t_2 = 68$ °С требуется сообщить газу теплоту $q = 21$ Дж. Какова удельная теплоемкость c кислорода при этих усло-

виях? Теплоемкостью и тепловым расширением сосуда пренебречь.

519. Температура газа с массой m и молярной массой μ повышается на величину ΔT один раз при постоянном давлении p, а другой раз при постоянном объеме V. На сколько отличаются друг от друга количества сообщенных газу теплот q_p и q_V и удельные теплоемкости c_p и c_V в первом и во втором случаях?

520. При изотермическом расширении идеальным газом совершена работа $A = 20$ Дж. Какое количество теплоты q сообщено газу?

521. В теплоизолированном цилиндре с поршнем находится азот с массой $m = 0{,}2$ кг при температуре $t_1 = 20$ °C. Азот, расширяясь, совершает работу $A = 4470$ Дж. Найти изменение внутренней энергии азота и его температуру t_2 после расширения. Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме $c_V = 745$ Дж/(кг·К).

522. Для повышения температуры газа с массой $m = 20$ кг и молярной массой $\mu = 0{,}028$ кг/моль на $\Delta T = 50$ К при постоянном давлении необходимо затратить количество теплоты $q_p = 0{,}5$ МДж. Какое количество теплоты q_V следует отнять от этого газа при постоянном объеме, чтобы его температура понизилась на $\Delta T = 50$ К?

523. Температура $m = 1$ кг воды повышается на $\Delta T = 1$ К. Вычислить увеличение внутренней энергии, приходящееся на одну молекулу. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), ее молярная масса $\mu = 0{,}018$ кг/моль.

524. Один моль кислорода ($\mu = 0{,}032$ кг/моль) нагревается при постоянном объеме от температуры $t_1 = 0$ °C. Какое количество теплоты необходимо сообщить кислороду, чтобы его давление увеличилось в три раза? Удельная теплоемкость кислорода при постоянном объеме $c_V = 657$ Дж/(кг·К).

525. Какое количество теплоты q требуется для того, чтобы воздух массой $m = 5$ г от температуры $T_1 = 290$ К нагреть при постоянном давлении настолько, чтобы его объем V_1 увеличился в два раза? Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении $c_p = 1018$ Дж/(кг·К).

526. Давление азота, находящегося в сосуде объемом $V = 3$ л, после нагревания возросло на $\Delta p = 2{,}2$ МПа. Определить количество теплоты q, сообщенной газу. Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме $c_V = 745$ Дж/(кг·К), его молярная масса $\mu = 0{,}028$ кг/моль.

527. В цилиндре под невесомым поршнем находится воздух, масса которого $m = 3$ кг. Температура воздуха увеличивается на $\Delta T = 100$ К при постоянном давлении. Чему равна работа A, совершаемая газом при расширении? Плотность воздуха при нормальных условиях $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3.

528. В цилиндре объемом $V_1 = 190$ см^3 под поршнем находится газ, имеющий температуру $T_1 = 323$ К. Найти работу расширения газа при нагревании его на $\Delta T = 100$ К, если вес поршня

$P = 1200$ Н, его площадь $S = 50$ см^2 и атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.

529. В цилиндре под поршнем находится газ, состояние которого меняется следующим образом: (*1—2*) увеличивается давление при постоянном объеме V, (*2—3*) увеличивается объем при постоянном давлении p_1, (*3—4*) увеличивается объем при постоянной температуре T_3 и (*4—1*) газ возвращается к первоначальному состоянию при постоянном давлении p_2. Нарисовать в координатах p, V; p, T и V, T графики изменения состояния газа и показать, при каких процессах газ получает теплоту, при каких отдает, как при этом меняется температура и какая совершается работа.

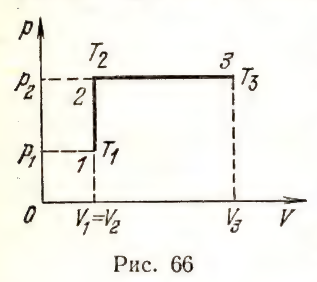


Рис. 66

530. Некоторое количество газа занимало объем $V_1 = 0{,}01$ м^3 и находилось под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа при абсолютной температуре $T_1 = 300$ К. Затем газ был нагрет без изменения объема до температуры $T_2 = 320$ К, а после этого нагрет при постоянном давлении до температуры $T_3 = 350$ К (рис. 66). Найти работу A, которую совершил газ, переходя из первоначального состояния (*1*) в состояние (*3*).

531. В цилиндре под поршнем в объеме $V = 1674$ см^3 находится насыщенный водяной пар, масса которого $m = 1$ г, а температура $t = 100$ °С. Какую работу A надо затратить, чтобы сжать весь пар до полного превращения его в жидкость при той же температуре? Плотность воды при температуре $t = 100$ °С под давлением ее насыщенного пара $\rho = 0{,}96$ г/см^3.

532. В двух цилиндрах, имеющих объемы $V_1 = 3$ л и $V_2 = 5$ л, находится одинаковый газ при давлениях $p_1 = 0{,}4$ МПа и $p_2 = 0{,}6$ МПа и температурах $t_1 = 27$ °С и $t_2 = 127$ °С. Цилиндры соединяют трубкой. Определить, какая температура ϑ и какое давление p установится в цилиндрах после смешения. Сосуды изолированы от обмена теплом с окружающими телами.

§ 17. Свойства паров

Парами называют обычно газы при температуре ниже критической, когда они могут быть превращены в жидкость повышением давления без понижения температуры. Насыщенные пары — это пары, находящиеся в равновесии со своей жидкостью. Если насыщенный пар содержит взвешенные капельки жидкости, то он называется мокрым или влажным, в противном случае — сухим. Ненасыщенный пар называют также перегретым паром.

Ненасыщенный пар по своей природе ничем не отличается от обычного газа. Поэтому для него справедливо уравнение газового состояния:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \qquad (12)$$

Однако по мере приближения температуры к критической в состояниях, близких к насыщению, наблюдаются заметные отклонения от этого уравнения, возникающие из-за взаимодействия молекул между собой. С этой же оговоркой это уравнение может быть применено и в качестве уравнения состояния для сухого насыщенного пара. В этом случае объем V в уравнении (12) будет уже не объемом всего сосуда, а лишь объемом, который занимает пар (в сосуде кроме насыщенного пара обычно содержится и некоторое количество жидкости).

При рассмотрении процессов, происходящих с насыщенным паром, нужно учитывать, что при изменении температуры, давления или объема меняется также и масса пара. В частности, при изотермическом изменении объема масса пара изменяется пропорционально объему. Следовательно, плотность пара $\rho = m/V$ и его давление не меняются. Поэтому для насыщенных паров уравнение состояния часто удобно применять в виде $\rho = \mu p/RT$.

---

533. В цилиндре с поршнем находится жидкость под большим давлением. Затем поршень очень медленно поднимают. Построить график зависимости давления p в цилиндре при безграничном увеличении объема V для двух постоянных температур T_1 и T_2 (изотермы $T_1 = \text{const}$ и $T_2 = \text{const}$; $T_1 < T_2$).

534. На рис. 67 представлена зависимость давления насыщенных паров от температуры (кривая *abck*). Объяснить, почему эта зависимость, в отличие от закона Шарля для газов, не является линейной, а также в каком случае зависимость давления паров от температуры будет изображаться линиями *abd* и *abce*.

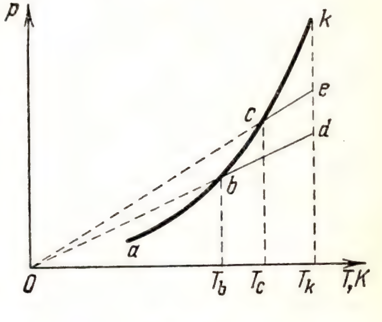


Рис. 67

535. Перегретый пар, находящийся в цилиндре под поршнем, сначала нагревают при постоянном объеме, затем медленно сжимают при постоянной температуре до полного сжижения. Начертить график зависимости давления p от объема V.

536. Сколько молекул содержится в 1 кг насыщенных и ненасыщенных паров ртути и воды? Число Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, молярная масса ртутных паров $\mu_1 = 0{,}2$ кг/моль, воды $\mu_2 = 0{,}018$ кг/моль.

537. При температуре $t = 4$ °С давление сухого насыщенного пара воды $p = 0{,}8$ кПа ≈ 6 мм рт. ст. Во сколько раз плотность воды ρ_1 при этой температуре больше плотности пара ρ_2? Какие объемы приходятся на одну молекулу воды и пара? Молярная масса воды $\mu = 0{,}018$ кг/моль.

538. Во сколько раз при $t = 400$ °C плотность ρ_1 паров ртути при атмосферном давлении отличается от плотности ρ_2 насыщенных паров ртути? Атмосферное давление $p_1 = 0{,}1$ МПа, упругость (давление) насыщенных паров ртути при температуре t составляет $p_2 = 0{,}22$ МПа.

539. В котел объемом $V = 5$ м³ накачали воду с массой $m_1 = 20$ кг и нагрели содержимое котла до температуры $t = 180$ °C. Найти массу m_2 и давление p паров в котле. Плотность насыщенных паров воды при температуре $T = 453$ K равна $\rho = 5{,}05$ кг/м³. Молярная масса воды $\mu = 0{,}018$ кг/моль.

540. В замкнутом сосуде с объемом $V = 1$ м³ находится вода с массой $m = 12$ г и некоторое количество ее насыщенного пара, плотность и давление которого при данной температуре равны соответственно $\rho = 8 \cdot 10^{-3}$ кг/м³ и $p = 1{,}1$ кПа. Какое давление p_1 установится при увеличении объема в $k = 5$ раз? Температура при увеличении объема не меняется.

541. Под колоколом воздушного насоса находится влажная губка. При откачивании газа со скоростью $v = 10$ л/с под колоколом установилось давление $p = 1$ кПа $\approx 7{,}5$ мм рт. ст. и температура $t = 7$ °C. Спустя время $\tau = 1$ ч после начала откачки давление резко упало. Определить массу m воды, которая содержалась в губке. Молярная масса воды $\mu = 0{,}018$ кг/моль.

542. Закрытый сосуд объемом $V_1 = 0{,}5$ м³, содержащий воду массой $m = 0{,}5$ кг, нагрели до температуры $t = 147$ °C. На какую величину V_2 следует изменить объем сосуда, чтобы в нем содержались только насыщенные пары воды? Давление насыщенных паров воды при температуре $T = 420$ K равно $p = 0{,}47$ МПа. Молярная масса воды $\mu = 0{,}018$ кг/моль.

543. В пароперегреватель, содержащий сухой пар с массой $m = 120$ кг при температуре $t = 177$ °C (450 K), подано некоторое количество тепла, из которого на долю пара пришлось $q = 18$ МДж. В результате давление пара достигло предельного и поднялся предохранительный клапан диаметром $d = 4$ см. Каково было начальное давление пара p_1, если сила, открывающая клапан, $F = 1570$ Н? Удельная теплоемкость пара $c = 1{,}5$ кДж/(кг·K).

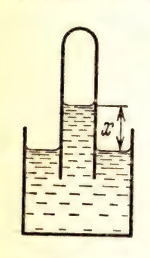


Рис. 68

544. В трубке (рис. 68) над водой в объеме $V = 30$ см³ находится смесь гелия и паров воды, имеющая температуру $t = 17$ °C. Высота столба воды в трубке $x = 10$ см. Найти массу m_1 гелия и массу m_2 паров воды в трубке. Давление насыщенных паров воды при температуре $t = 17$ °C равно $p_1 = 1{,}94$ кПа $\approx 14{,}5$ мм рт. ст. Молярная масса гелия $\mu_1 = 0{,}004$ кг/моль, молярная масса воды $\mu_2 = 0{,}018$ кг/моль, атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.

545. В цилиндре под поршнем в объеме $V_1 = 1$ м³ при температуре $t = 30$ °C находится смесь азота и насыщенных паров воды. Масса смеси $m_0 = 286$ г. Какая масса паров m сконденсируется,

если объем уменьшить в n раз ($n = 3$) при постоянной температуре? Какое давление p было у смеси до сжатия? Давление насыщенных паров воды при температуре $t = 30$ °C равно $p_1 = 4{,}2$ кПа. Молярная масса воды $\mu_1 = 0{,}018$ кг/моль, азота $\mu_2 = 0{,}028$ кг/моль.

546. Влажный отработанный пар, содержащий $n = 15\%$ (по массе) воды в виде капель, имеющий давление $p = 15$ кПа и температуру $t_0 = 100$ °C, конденсируют, смешивая с водой, температура которой $t_1 = 20$ °C. Какая масса воды требуется на единицу массы пара для получения смеси с температурой $\vartheta = 40$ °C? Температура кипения воды при данном давлении $t_2 = 54$ °C, удельная теплота ее испарения $\lambda = 2{,}2$ МДж/кг, удельные теплоемкости воды $c_1 = 4200$ Дж/(кг·К) и пара $c_2 = 1900$ Дж/(кг·К).

547. Когда в воде нет растворенных газов, она может быть нагрета при атмосферном давлении до температуры более высокой, чем температура кипения. При введении в воду каким-либо способом воздуха перегретая вода бурно, взрывообразно закипает, и температура ее быстро падает до температуры кипения при атмосферном давлении. Какая масса m пара получится из воды, нагретой до температуры $t_1 = 120$ °C, если масса воды $m_1 = 10$ кг, ее удельная теплоемкость $c = 4200$ Дж/(кг·К) и теплота испарения $\lambda = 226$ кДж/кг?

548. В закрытом сосуде объемом $V = 0{,}4$ м^3 находятся в тепловом равновесии при температуре $t_1 = -23$ °C лед и пары воды, общая масса которых $m = 2$ г. Какое количество теплоты q необходимо сообщить содержимому сосуда для повышения его температуры до $t_2 = -1$ °C? Давление насыщенных паров воды $p_1 = 77$ Па при температуре t_1 и $p_2 = 560$ Па при температуре t_2. Удельные теплоемкости при температуре ниже 0 °C льда $c_1 = 2100$ Дж/(кг·К) и паров воды $c_2 = 1300$ Дж/(кг·К), удельные теплоты плавления льда $r = 340$ кДж/кг и испарения воды $\lambda = 2{,}2$ МДж/кг. Молярная масса воды $\mu = 0{,}018$ кг/моль.

549. В объеме $V_1 = 20$ л содержатся насыщенные пары воды при температуре $t = 100$ °C. Какую работу надо совершить, чтобы путем изотермического сжатия уменьшить объем паров до $V_2 = 10$ л? Объемом воды, образовавшейся при конденсации, пренебречь.

550. Найти работу пара по перемещению поршня на расстояние $l = 40$ см, если давление пара равномерно убывает при перемещении поршня от значения $p_1 = 2{,}2$ МПа до значения $p_2 = 0{,}2$ кПа. Площадь поршня $S = 300$ см^2. Представить работу на графике зависимости давления от объема.

551. Производят опыт Торичелли со спиртом вместо ртути. Вычислить высоту h, до которой поднимется спирт, зная, что атмосферное давление в момент опыта равно $p = 93{,}6$ кПа, плотность спирта $\rho = 760$ кг/м^3, давление паров спирта при температуре опыта $p_1 = 600$ Па. Давлением паров ртути пренебречь.

552. Определить абсолютную влажность воздуха, если парциальное давление пара в нем $p = 14$ кПа, а температура $t = 60$ °C ($T = 333$ К). Молярная масса воды $\mu = 0{,}018$ кг/моль.

553. Абсолютная влажность при температуре $t_1 = 60$ °C равна $\rho_1 = 0{,}005$ кг/м³. Определить абсолютную влажность ρ_2 после понижения температуры до $t_2 = 20$ °C. Давление насыщенных паров при температуре t_2 равно $p_2 = 2335$ Па. Молярная масса воды $\mu = 0{,}018$ кг/моль.

554. Абсолютная влажность воздуха при температуре $t_1 = 60$ °C равна $\rho_1 = 0{,}05$ кг/м³. Найти абсолютную влажность ρ_2 при понижении температуры до $t_2 = 10$ °C. Давление насыщенных паров при температуре t_2 равно $p_2 = 1226$ Па. Молярная масса воды $\mu = 0{,}018$ кг/моль.

555. В сосуде находится воздух, относительная влажность которого при температуре $t_1 = 10$ °C равна $f_1 = 60\%$. Какова будет относительная влажность f_2 после уменьшения объема в n раз ($n = 3$) и нагревания до температуры $t_2 = 100$ °C? Плотность насыщенных паров при температуре t_1 равна $\rho = 9{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м³. Молярная масса воды $\mu = 0{,}018$ кг/моль.

556. Плотность влажного воздуха при температуре $t = 27$ °C и давлении $p = 103{,}0$ кПа равна $\rho = 1{,}190$ кг/м³. Определить абсолютную ρ_1 и относительную f влажность воздуха, если при температуре $t = 27$ °C плотность насыщенных паров равна $\rho_0 = 0{,}027$ кг/м³. Молярные массы воды $\mu_1 = 0{,}018$ кг/моль и воздуха $\mu_2 = 0{,}029$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

557. В комнате при температуре $t = 20$ °C относительная влажность $f_1 = 20\%$. Сколько нужно испарить воды для увеличения влажности до величины $f_2 = 50\%$, если объем комнаты $V = 40$ м³? Плотность насыщенных паров воды при температуре $t = 20$ °C равна $\rho = 1{,}73 \cdot 10^{-2}$ кг/м³.

558. В комнате объемом $V = 50$ м³ относительная влажность воздуха $f = 40\%$. Если испарить дополнительно воду с массой $m = 60$ г, то относительная влажность будет $f = 50\%$. Какова при этом будет абсолютная влажность ρ воздуха?

559. Определить отношение плотностей влажного (относительная влажность $f = 90\%$) и сухого воздуха при давлении $p_0 = 100$ кПа и температуре $t = 27$ °C. Плотность насыщенных паров воды при этой температуре $\rho_0 = 0{,}027$ кг/м³, молярные массы воздуха $\mu_1 = 0{,}029$ кг/моль, воды $\mu_2 = 0{,}018$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

В отличие от предыдущих разделов, при решении задач этой главы возникает ряд затруднений, связанных с использованием той или иной системы единиц. Дело в том, что в разделе электричества формулы, выражающие одни и те же физические законы, часто имеют несколько различный вид в системах единиц СГСЭ (электростатической), СГСМ (электромагнитной) и СИ (системе интернациональной). Различия эти проявляются в том, что формулы содержат коэффициенты, имеющие разные численные значения и размерности.

Поэтому во введениях к отдельным параграфам этой главы приводится запись основных формул в разных системах единиц, указываются формулы, по которым определяются электрические единицы в СИ, а также приводятся численные соотношения между единицами в системах СГСЭ, СГСМ и единицами СИ.

Рекомендуется в целях тренировки проводить решение одних и тех же задач как в системах единиц СГСЭ и СГСМ, так и в СИ (особенно это касается задач § 23 «Магнитное поле тока и электромагнитная индукция»).

§ 18. Закон Кулона. Поверхностная плотность электрических зарядов

По закону Кулона сила взаимодействия F двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся в пустоте (вакууме), прямо пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}. \qquad (1)$$

В системе единиц СГСЭ полагают коэффициент пропорциональности $k = 1$ и за единицу заряда принимают такой заряд, который действует в вакууме на равный ему заряд, помещенный на расстоянии 1 см, с силой в 1 дину. Таким образом, в этой системе единиц для вакуума

закон Кулона записывается в виде

$$F=\frac{q_1q_2}{r^2}. \qquad (2)$$

Если заряды находятся в среде с диэлектрической проницаемостью ε ($\varepsilon > 1$), то сила взаимодействия между ними в системе единиц СГСЭ

$$F=\frac{q_1q_2}{\varepsilon r^2}. \qquad (3)$$

Для пустоты $\varepsilon = 1$, т. е. формула (3) в этом случае совпадает с (2).

В системе единиц СИ основной электрической единицей является не единица заряда, а единица электрического тока — *ампер* (определение этой единицы дано в условии задачи 892). Единица заряда, являющаяся производной, в этой системе единиц носит название *кулон*. За один кулон принимается заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при электрическом токе в 1 А в течение 1 с; 1 Кл $= 3\cdot 10^9$ единиц заряда СГСЭ.

Чтобы получить при помощи формулы (1) значение силы в единицах СИ — ньютонах, если величины зарядов берутся в кулонах, а расстояния — в метрах, коэффициент пропорциональности в этой формуле записывают в виде

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная, имеющая размерность фарада/метр. Таким образом, в СИ коэффициент пропорциональности k — размерная величина.

Сила взаимодействия двух зарядов, находящихся в среде, в СИ выражается формулой

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{\varepsilon r^2},$$

где ε — безразмерная диэлектрическая проницаемость среды (относительно диэлектрической проницаемости пустоты), значения которой совпадают со значениями диэлектрической проницаемости в системе СГСЭ и приводятся в таблицах.

Если имеется несколько (более двух) электрических зарядов, то силы взаимодействия между каждой парой этих зарядов не зависят от наличия остальных. Поэтому результирующая сила, действующая на каждый заряд, складывается геометрически (по правилу сложения векторов) из сил, действующих на него со стороны всех других зарядов (принцип суперпозиции электрических сил).

Поверхностной плотностью σ электрического заряда называется количество заряда, приходящееся на единицу площади поверхности заряженного тела. При равномерном распределении заряда q по поверхности тела с площадью S

$$\sigma = q/S.$$

В системе единиц СИ поверхностная плотность измеряется в Кл/м².

---

560. Определить величину q одинаковых точечных электрических зарядов, взаимодействующих в пустоте с силой $F = 0{,}1$ Н. Расстояние между зарядами $r = 6$ м.

561. Какое число N электронов составляет заряд в одну единицу заряда в системе СГСЭ? Величина заряда электрона $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл.

562. Два точечных заряда q_1 и q_2 находятся на расстоянии l друг от друга. Если расстояние между ними уменьшается на $x = 50$ см, то сила взаимодействия увеличивается в два раза. Найти расстояние l.

563. Тонкая шелковая нить выдерживает максимальное натяжение $T = 1$ гс $= 9{,}8 \cdot 10^2$ дин. Подвешенный на этой нити шарик массой $m = 0{,}6$ г имеет заряд $q_1 = 32$ ед. заряда СГСЭ. Снизу в направлении линии подвеса к нему подносят шарик, имеющий заряд $q_2 = -40$ ед. заряда СГСЭ. При каком расстоянии r между шариками нить разорвется?

564. Отрицательный заряд расположен на прямой, соединяющей два одинаковых положительных заряда. Расстояния между отрицательным зарядом и каждым из положительных относятся между собой как 1 : 3. Во сколько раз изменится сила, действующая на отрицательный заряд, если его поменять местами с ближайшим положительным?

565. На расстоянии $r = 3$ м друг от друга расположены два точечных отрицательных заряда $q_1 = -9$ ед. заряда СГСЭ и $q_2 = -36$ ед. заряда СГСЭ. Когда в некоторой точке поместили заряд q_0, то все три заряда оказались в равновесии. Найти заряд q_0 и расстояние между зарядами q_1 и q_0.

566. Три одинаковых заряда величиной $q = 20$ ед. заряда СГСЭ каждый помещены в вершинах равностороннего треугольника. Сила, действующая на каждый заряд, $F_0 = 0{,}01$ Н. Определить длину a стороны треугольника.

567. Три отрицательных заряда величиной по 9 ед. заряда СГСЭ каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд q_0 нужно поместить в центре треугольника, чтобы система находилась в равновесии?

568. Четыре одинаковых положительных точечных заряда $q = 10$ ед. заряда СГСЭ закреплены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Найти силу, действующую со стороны трех зарядов на четвертый.

569. Четыре одинаковых по абсолютной величине точечных заряда, из которых два положительны и два отрицательны, расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 20$ см так, как показано на рис. 69. Абсолютная величина каждого заряда равна 20 ед. заряда СГСЭ. Найти силу, действующую на помещенный в центре квадрата точечный заряд $q_1 = 20$ ед. заряда СГСЭ.

+q +q

q1

−q −q

Рис. 69

570. На изолированной подставке расположен вертикальный тонкий фарфоровый стержень, на который надет металлический полый шарик A радиуса r (рис. 70). После сообщения шарику заряда $q = 60$ ед. заряда СГСЭ по стержню опущен другой такой же незаряженный металлический шарик B массы $m = 0{,}1$ г, который соприкасается с шариком A. На каком расстоянии h будет находиться шарик B от шарика A после соприкосновения, если $mg < \frac{(q/2)^2}{(4r)^2}$? Трение шариков о стержень пренебрежимо мало́.

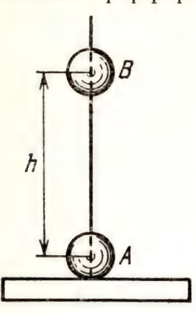


Рис. 70

571. Вокруг точечного заряда $q_0 = 5$ ед. заряда СГСЭ равномерно движется по окружности под действием сил притяжения маленький отрицательно заряженный шарик. Чему равно отношение заряда шарика к его массе, если радиус окружности $R = 2$ см, а угловая скорость вращения $\omega = 5$ рад/с?

572. Два одинаковых шарика имеют массы $m = 10$ г и находятся на расстоянии $r = 10$ см друг от друга. Какой величины равные заряды q необходимо поместить на шариках, чтобы их взаимодействие уравновешивало силы всемирного тяготения? Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ дин $\cdot$ см²/г² $= 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м²/кг².

573. Найти силу взаимодействия двух точечных электрических зарядов $q_1 = 4$ ед. заряда СГСЭ и $q_2 = 16$ ед. заряда СГСЭ в пустоте и в керосине ($\varepsilon = 2$) на расстоянии $r = 0{,}02$ м.

574. Два заряда, находясь в воздухе на расстоянии $r_1 = 5$ см, действуют друг на друга с силой $F_1 = 120$ мкН, а в некоторой непроводящей жидкости на расстоянии $r_2 = 10$ см — с силой $F_2 = 15$ мкН. Какова диэлектрическая проницаемость ε жидкости?

575. Определить расстояние r_1 между двумя одинаковыми электрическими зарядами, находящимися в масле с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$, если сила взаимодействия между ними такая же, как в пустоте на расстоянии $r_2 = 30$ см.

576. Два одинаково заряженных шарика, подвешенных на нитях равной длины, разошлись на некоторый угол α. Какова должна быть плотность ρ материала шариков, чтобы при погружении их в керосин угол между нитями не изменился? Плотность керосина $\rho_1 = 0{,}8$ г/см³, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2$.

577. Два одинаковых достаточно маленьких шарика подвешены на нитях равной длины, закрепленных вверху в одной точке. Шарикам сообщен одинаковый по величине и знаку заряд. После этого они погружены в жидкий диэлектрик. Плотность материала шариков равна ρ, плотность жидкости ρ_1. При какой величине диэлектрической проницаемости жидкости угол расхождения нитей в жидкости и в воздухе будет один и тот же?

578. В принятой в настоящее время международной системе единиц СИ (система интернациональная) закон Кулона выражается

формулой

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

Определить множитель ε_0, называемый электрической постоянной, если F задается в ньютонах, q — в кулонах, а r — в метрах. Множитель 4π вводится для того, чтобы ряд других формул имел более простой (рациональный) вид. ε — диэлектрическая проницаемость, показывающая, во сколько раз сила взаимодействия между зарядами в диэлектрической среде меньше, чем в пустоте (вакууме).

579. В вакууме расположены три заряда. Расстояние между первым и вторым r_{12}, сила их взаимодействия F_{12}. Расстояние между первым и третьим r_{13}, сила их взаимодействия F_{13}. Расстояние между вторым и третьим r_{23}, сила их взаимодействия F_{23}. Найти абсолютную величину третьего заряда.

580. С какой силой (в ньютонах) взаимодействовали бы точечные заряды в один кулон, находясь на расстоянии $r = 0{,}5$ км друг от друга?

581. Два шарика одинакового радиуса и веса подвешены в воздухе на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После того как каждому шарику был сообщен заряд $q = 4 \cdot 10^{-7}$ Кл, шарики разошлись на угол $2\alpha = 60°$. Найти вес шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика $l = 0{,}2$ м.

582. Составлен прибор из двух одинаковых маленьких проводящих шариков. Один шарик неподвижен, а другой привязан к концу вертикальной нити длиной $l = 20$ см. Масса каждого шарика равна $m = 5$ г. Шарики, находясь в соприкосновении, получают одинаковые электрические заряды, вследствие чего подвижный шарик отклоняет нить на угол $\alpha = 60°$ с вертикалью. Определить заряд q каждого шарика.

583. Маленький шарик, несущий заряд $q = 50$ ед. заряда СГСЭ, коснулся внутренней поверхности полого незаряженного металлического большого шара радиуса $R = 20$ см. Найти поверхностную плотность электрического заряда большого шара.

584. Найти поверхностную плотность электрического заряда на внешней поверхности полого металлического шара радиуса $R = 20$ см, если внутри него в центре сферы на изолирующей палочке находится заряженный шарик, несущий заряд $q = +50$ ед. заряда СГСЭ. Будет ли изменяться поверхностная плотность при изменении положения шарика внутри сферы?

§ 19. Электрическое поле

Напряженность электрического поля

Электрические заряды создают в пространстве вокруг себя электрическое поле. На электрический заряд, помещенный в точку пространства, где есть электрическое поле, действует сила.

Электрическое поле в каждой точке пространства характеризуется *напряженностью.* Напряженностью электрического поля E в данной точке называется отношение силы F, действующей на помещенный в эту точку точечный («пробный») заряд q_0, к величине этого заряда, т. е.

$$E = \frac{F}{q_0}. \tag{4}$$

Напряженность электрического поля — векторная величина, направление которой совпадает с направлением силы F при $q_0 > 0$.

В системе единиц СГСЭ за единицу напряженности принимается такая напряженность, при которой на заряд в 1 ед. заряда СГСЭ действует сила в 1 дину. В системе единиц СИ за единицу напряженности принимается такая напряженность, при которой на заряд в 1 Кл действует сила в 1 Н. Единица напряженности в СИ имеет размерность вольт/метр (см. формулу (11) на стр. 93).

Если известна напряженность электрического поля в данной точке, то согласно формуле (4) на помещенный в эту точку заряд q_1 действует сила

$$F = q_1 E.$$

Точечный заряд q создает вокруг себя электрическое поле, напряженность которого в точке, удаленной от этого заряда на расстояние r, согласно формуле (4) и закону Кулона в системе единиц СГСЭ выражается соотношением

$$E = \frac{q}{\varepsilon r^2}, \tag{5}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство вокруг заряда. В системе единиц СИ напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом q, вычисляется по формуле

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}. \tag{6}$$

Следует иметь в виду, что электрическое поле равномерно заряженного шара радиуса R, полный заряд которого q, совпадает вне шара с электрическим полем точечного заряда той же величины q, помещенного в центре шара. Поэтому напряженность в точках, удаленных от центра шара на расстояние $r > R$, можно вычислять по формулам (5) и (6).

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$, создаваемого несколькими точечными зарядами в некоторой точке, равна геометрической (векторной) сумме напряженностей, создаваемых в этой точке каждым зарядом по отдельности (принцип суперпозиции):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \ldots$$

---

585. На каком расстоянии от точечного заряда $q = 10^{-8}$ Кл, находящегося в дистиллированной воде ($\varepsilon = 81$), напряженность электрического поля будет равна $E = 0{,}25$ В/м?

586. В центре полого проводящего шара помещен точечный заряд $q = 10$ ед. заряда СГСЭ. Внутренний радиус шара $r = 10$ см, внешний радиус $R = 20$ см. Найти напряженности электрического поля у внутренней (E_1) и у внешней (E_2) границ шара.

587. Одинаковые по величине, но разные по знаку заряды $q = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ Кл расположены в двух вершинах равностороннего треугольника. Сторона треугольника $a = 2$ м. Определить напряженность E электрического поля в третьей вершине треугольника.

588. В вершинах при острых углах ромба, составленного из двух равносторонних треугольников со стороной a, помещены положительные заряды q. В вершине при одном из тупых углов ромба помещен также положительный заряд Q. Определить напряженность электрического поля E в четвертой вершине ромба.

589. Решить предыдущую задачу, если заряд Q — отрицательный, в случаях, когда абсолютная величина заряда Q: 1) больше, чем q; 2) равна q и 3) меньше, чем q.

590. Диагонали ромба имеют длину $d_1 = 96$ см и $d_2 = 32$ см. На концах длинной диагонали расположены точечные заряды $q_1 = 64$ ед. заряда СГСЭ и $q_2 = 352$ ед. заряда СГСЭ, на концах короткой — заряды $q_3 = 8$ ед. заряда СГСЭ и $q_4 = 40$ ед. заряда СГСЭ. Определить величину и направление (относительно короткой диагонали) напряженности электрического поля в центре ромба.

591. Какой угол α с вертикалью составляет нить, на которой висит заряженный шарик массы $m = 0{,}25$ г, помещенный в горизонтальное однородное электрическое поле напряженностью $E = 35$ ед. напряженности СГСЭ? Заряд шарика $q = 7$ ед. заряда СГСЭ.

592. В однородном электрическом поле с напряженностью E, направленной вертикально вверх, помещен положительно заряженный шарик с зарядом $q = 10$ ед. заряда СГСЭ, привязанный к концу шелковой нити, длина которой l велика по сравнению с размерами шарика. Другой конец нити закреплен. Масса шарика $m = 0{,}1$ г. С каким периодом будет колебаться шарик, если сила, действующая на него со стороны электрического поля, больше силы тяжести? Какой величины должна быть напряженность E, чтобы шарик колебался с периодом $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$?

593. Математический маятник представляет собой шарик массы $m = 1$ г, подвешенный на шелковой нити длиной $l = 36$ см. Как изменится период колебаний маятника, если, сообщив шарику положительный или отрицательный заряд $q = \pm 20$ ед. заряда СГСЭ, поместить маятник в однородном электрическом поле с напряженностью $E = 10$ ед. напряженности СГСЭ, силовые линии которого направлены вертикально вниз?

594. В однородном электрическом поле с напряженностью $E = 100$ ед. напряженности СГСЭ, силовые линии которого составляют

с вертикалью угол $\alpha = 30°$, висит на нити шарик с массой $m = 2$ г, имеющий электрический заряд $q = 10$ ед. заряда СГСЭ. Определить силу T натяжения нити.

595. Электрон движется по направлению силовых линий однородного электрического поля, напряженность которого $E = 120$ В/м. Какое расстояние пролетит электрон до полной потери скорости, если его начальная скорость $v_0 = 1000$ км/с? За какое время будет пройдено это расстояние? Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 1{,}758 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

596. Пучок катодных лучей, направленный параллельно обкладкам плоского конденсатора, на пути $l = 4$ см отклоняется на расстояние $h = 2$ мм от первоначального направления. Какую скорость v и кинетическую энергию T имеют электроны катодного луча в момент влета в конденсатор? Напряженность электрического поля внутри конденсатора $E = 22\,500$ В/м. Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Потенциал. Работа электрических сил

Разностью потенциалов или напряжением U_{ab} между точками a и b электрического поля называется отношение работы A, которую совершают электрические силы при перемещении заряда q из точки a в точку b, к величине этого заряда, т. е.

$$U_{ab} = \frac{A}{q}. \qquad (7)$$

Эта величина не зависит ни от формы пути, по которому происходит перемещение, ни от самого заряда q, а зависит только от свойств электрического поля и от выбора точек a и b. Поэтому если в качестве конечной точки перемещения заряда q выбрать некоторую постоянную точку c (например, как это часто делается, бесконечно удаленную точку), то величина A/q может служить характеристикой электрического поля в произвольной точке a. В этом случае ее называют потенциалом φ_a точки a (относительно точки c). Потенциал поля в точке c можно считать равным произвольной постоянной величине. Удобно эту постоянную величину положить равной нулю.

Если φ_a и φ_b — потенциалы точек a и b, то

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b. \qquad (8)$$

Согласно формулам (7) и (8) работа A, совершаемая электрическими силами при перенесении заряда q из точки a в точку b, если известна разность потенциалов U_{ab} между этими точками или потенциалы φ_a и φ_b этих точек, определяется выражением

$$A = qU_{ab} = q(\varphi_a - \varphi_b).$$

Как следует из формулы (7), за единицу разности потенциалов (единицу потенциала) принимается 1 эрг/ед. заряда СГСЭ в систе-

ме единиц СГСЭ и 1 Дж/Кл в системе единиц СИ. Единица разности потенциалов в СИ называется *вольтом*. Учитывая, что 1 Дж = 10^7 эрг и 1 Кл = $3 \cdot 10^9$ ед. заряда СГСЭ, получим:

$$1\ \text{В} = 1\ \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \frac{1}{300}\ \text{ед. потенциала СГСЭ.}$$

Если электрическое поле создается точечным электрическим зарядом q, помещенным в среде с диэлектрической проницаемостью ε, то потенциал в точке, удаленной на расстояние r от этого заряда, в системе единиц СГСЭ

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r} \tag{9}$$

и в системе единиц СИ

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \tag{10}$$

Здесь потенциал отсчитывается относительно бесконечно удаленной точки, в которой он равен нулю. Знак потенциала определяется знаком заряда q.

Потенциал электрического поля, создаваемого в данной точке несколькими точечными зарядами, равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом по отдельности: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$

При неподвижных зарядах потенциалы всех точек на поверхности и внутри проводника одинаковы.

Так как электрическое поле равномерно заряженного шара радиуса R совпадает вне шара с электрическим полем точечного заряда той же величины, помещенного в центре шара, то потенциалы точек поля, создаваемого шаром на расстояниях $r \geqslant R$ от его центра, можно вычислять по формулам (9) и (10). В частности, потенциал точек на поверхности и внутри проводящего шара радиуса R

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon R} \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}.$$

Между двумя характеристиками электрического поля — напряженностью и потенциалом — существует связь: если φ_a и φ_b — потенциалы точек a и b, лежащих на одной силовой линии в однородном электрическом поле на расстоянии d друг от друга, то напряженность электрического поля

$$E = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{d}. \tag{11}$$

Если поле неоднородно, то эта формула дает лишь среднее значение напряженности на силовой линии между двумя этими точками.

Из формулы (11) следует, что напряженность электрического поля можно измерять разностью потенциалов, приходящейся на единицу длины. Поэтому в системе единиц СИ за единицу напряжен-

ности принимается 1 В/м, т. е. такая напряженность, при которой разность потенциалов между точками, удаленными на 1 м друг от друга по силовой линии, равна 1 В. С другой стороны, эта же единица имеет наименование ньютон/кулон. Таким образом, 1 В/м = = 1 Н/Кл. Заметим еще, что 1 ед. напряженности СГСЭ = $3 \cdot 10^4$ В/м.

---

597. Определить потенциал шара, если известно, что на расстоянии $L = 10$ м от его поверхности потенциал электрического поля равен $\varphi = 20$ В. Радиус шара $R = 0{,}1$ м.

598. N одинаковых шарообразных капелек ртути заряжены одноименно до одного и того же потенциала φ_1. Каков будет потенциал φ большой капли ртути, получившейся в результате слияния этих капель?

599. В центре полого металлического шара с радиусом $R = 1$ м, несущего положительный заряд $q_1 = 10$ ед. заряда СГСЭ, находится маленький шарик с положительным или отрицательным зарядом $q = \pm 20$ ед. заряда СГСЭ. Определить потенциал φ электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r = 10R$ от центра шара.

600. До какого потенциала можно зарядить находящийся в воздухе уединенный металлический шар радиуса $R = 3 \cdot 10^{-2}$ м, если напряженность электрического поля, при которой происходит пробой в воздухе, $E = 3 \cdot 10^6$ В/м?

Рис. 71

601. Два одинаково заряженных шарика, расположенных друг от друга на расстоянии $r = 25$ см (между центрами), взаимодействуют с силой $F = 0{,}1$ дин. До какого потенциала заряжены шарики, если их диаметры $D = 1$ см?

602. В вершинах квадрата (рис. 71) расположены точечные заряды $q_1 = +1$, $q_2 = -2$, $q_3 = +3$ и $q_4 = -4$ ед. заряда СГСЭ. Определить потенциал и напряженность электрического поля в центре квадрата (точка A). Диагональ квадрата $2a = 20$ см.

603. Найти потенциалы и напряженности электрического поля в точках B и C, находящихся от заряда $q = 1{,}67 \cdot 10^{-7}$ Кл на расстояниях $r_1 = 5$ см и $r_2 = 20$ см. Определить работу электрических сил при перемещении заряда $q_1 = 10^{-9}$ Кл из точки B в точку C.

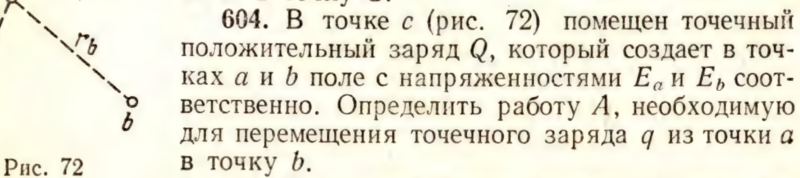


Рис. 72

604. В точке c (рис. 72) помещен точечный положительный заряд Q, который создает в точках a и b поле с напряженностями E_a и E_b соответственно. Определить работу A, необходимую для перемещения точечного заряда q из точки a в точку b.

605. В атомной физике энергию быстрых заряженных частиц часто выражают в электронвольтах. 1 эВ равен той энергии, которую приобретает электрон, пролетев в электрическом поле путь, разность потенциалов меж-

ду начальной и конечной точками которого равна 1 В. Выразить электрон-вольт в эргах. Какую скорость имеет электрон, обладающий энергией в 1 эВ? Заряд электрона $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ, его масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ г.

606. Электрон летит от точки A к точке B. Между этими точками имеется разность потенциалов $U = 100$ В. Какую скорость будет иметь электрон в точке B, если в A его скорость была равна нулю? Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

607. Какую работу надо совершить, чтобы перенести точечный заряд $q = 20$ ед. заряда СГСЭ из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $L = 10$ см от поверхности металлического шарика? Потенциал шарика равен $\varphi_0 = 200$ В, радиус шарика $R = 2$ см. Шарик находится в воздухе.

608. Для переноса точечного заряда $q = 10$ ед. заряда СГСЭ из бесконечности в точку O, находящуюся на расстоянии $L = 20$ см от поверхности положительно заряженного металлического шара, требуется совершить работу $A = 5 \cdot 10^{-7}$ Дж. Радиус шара $R = 4$ см. Определить потенциал φ точек на поверхности шара.

609. Два заряда по $+50$ ед. заряда СГСЭ каждый находятся на расстоянии $R_1 = 100$ см друг от друга. Какую работу A надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $R_2 = 50$ см?

610. Заряды $q_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл и $q_2 = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл расположены на расстоянии $l = 40$ см друг от друга в точках A и B (рис. 73). Вдоль прямой CD, проходящей параллельно линии AB на расстоянии $d = 30$ см от нее, перемещается заряд $q = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл. Определить работу электрических сил при перемещении заряда q из точки C в точку D, если отрезки AC и BD перпендикулярны к линии CD.

Рис. 73

611. Два параллельных тонких кольца радиуса r имеют общую ось. Расстояние между их центрами d. Найти работу A, совершаемую электрическими силами при перемещении заряда Q из центра первого кольца в центр второго, если по первому кольцу равномерно распределен заряд q_1, а по второму кольцу равномерно распределен заряд q_2.

612. На тонком кольце радиуса r равномерно распределен заряд Q. Какова наименьшая величина v скорости, которую нужно сообщить находящемуся в центре кольца шарику массы m с зарядом q, чтобы он мог удалиться от кольца в бесконечность?

613. На шарик радиуса $r = 2$ см помещен заряд $q = 4 \cdot 10^{-12}$ Кл. С какой скоростью подлетает к нему электрон, начавший движение из бесконечно удаленной от шарика точки? Масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-28}$ г, заряд электрона $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ.

614. Между горизонтально расположенными пластинами плоского конденсатора с высоты h свободно падает незаряженный

металлический шарик массы m. На какую высоту H после абсолютно упругого удара о нижнюю пластину поднимется шарик, если в момент удара на него переходит заряд q? Конденсатор подключен к батарее с э. д. с., равной $\mathscr{E}$, расстояние между пластинами d.

615. Два шарика заряжены одноименными равными зарядами q и расположены на одной вертикали, проходящей через их центры, на расстоянии H друг от друга. Нижний шарик закреплен неподвижно, а верхний, имеющий массу m, получает начальную скорость v, направленную вертикально вниз. На какое минимальное расстояние h приблизится верхний шарик к нижнему? Шарики можно считать точечными зарядами.

616. Определить максимальное расстояние h между шариками по условиям предыдущей задачи, если неподвижный шарик имеет отрицательный заряд величины q, а начальная скорость v верхнего шарика направлена вертикально вверх.

617. Электрон, пролетая в электрическом поле из точки a в b, увеличил свою скорость с $v_a = 1000$ км/с до $v_b = 3000$ км/с. Определить разность потенциалов между точками a и b электрического поля. Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

618. В плоский конденсатор влетает электрон со скоростью $v = 2 \cdot 10^7$ м/с, направленной параллельно обкладкам конденсатора. На какое расстояние h от своего первоначального направления сместится электрон за время пролета конденсатора, если расстояние между пластинами $d = 2$ см, длина конденсатора $l = 5$ см и разность потенциалов между пластинами $U = 200$ В? Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

619. Заряженная положительным зарядом пылинка массой $m = 10^{-8}$ г находится в равновесии внутри плоского конденсатора, пластины которого расположены горизонтально. Между пластинами создана разность потенциалов $U_1 = 6000$ В. На сколько необходимо изменить разность потенциалов, чтобы пылинка осталась в равновесии, если ее заряд уменьшился на 1000 электронов?

Расстояние между пластинами $d = 5$ см, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

620. Решить предыдущую задачу, считая пылинку заряженной отрицательно.

621. В вертикальное электрическое поле между пластинами плоского конденсатора помещена капелька масла, заряженная одним электроном. Напряженность электрического поля подобрана так, что капелька покоится. Определить радиус капельки, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 500$ В, расстояние между пластинами $d = 0{,}5$ см, плотность масла $\rho = 0{,}9$ г/см³. Заряд электрона $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ.

622. На рис. 74 представлено сечение горизонтальной плоскостью плоского конденсатора с вертикальными пластинами. Конден-

сатор присоединен к батарее с э. д. с. $\mathscr{E} = 3$ В. Расстояние между пластинами $d = 10$ см. Между пластинами помещается диэлектрическая палочка длиною $l = 1$ см с металлическими шариками на концах, несущими заряды $+q = 10^{-9}$ Кл и $-q = -10^{-9}$ Кл. Палочка может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее среднюю точку A. Какую работу необходимо затратить, чтобы повернуть палочку вокруг оси, проходящей через A, на 180° по отношению к тому положению, которое она занимает на рисунке?

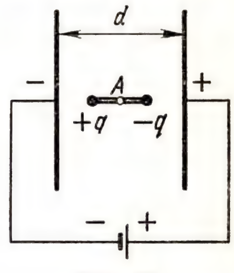


Рис. 74

623. Внутри плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого $d = 8$ см, помещен стержень длиной $l = 3$ см; на концах стержня имеются два точечных электрических заряда одинаковой величины $q = 2$ ед. заряда СГСЭ, но противоположного знака. Определить момент M сил, действующих на стержень с зарядами, если разность потенциалов между обкладками конденсатора $U = 3$ В, а стержень ориентирован параллельно пластинам.

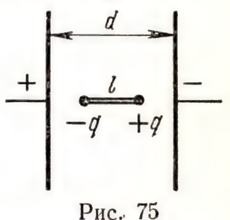


Рис. 75

624. На концах изолирующей палочки длиной $l = 0{,}5$ см прикреплены два маленьких шарика, на которых имеются заряды $+q$ и $-q$ ($q = 10$ ед. заряда СГСЭ). Палочка находится между пластинами плоского конденсатора (рис. 75). Расстояние между пластинами $d = 10$ см. При каком минимальном напряжении U между пластинами конденсатора палочка разорвется, если она выдерживает максимальную нагрузку $F = 0{,}01$ Н? Силы тяжести не учитывать.

625. Металлический шарик *1* радиуса $r_1 = 1$ см прикреплен с помощью диэлектрической палочки к коромыслу весов, после чего весы уравновешены гирями (рис. 76). Под шариком *1* помещают заряженный шарик *2* радиуса $r_2 = 2$ см. Расстояние между центрами шариков равно $h = 20$ см. Шарики *1* и *2* замыкают между собой проволочкой, а потом проволочку убирают. После этого оказывается, что для восстановления равновесия надо снять с чашки весов разновес массой 4 мг (вес $P = 4$ мгс). Найти, до какого потенциала φ был заряжен шарик *2* до замыкания его проволочкой с шариком *1*.

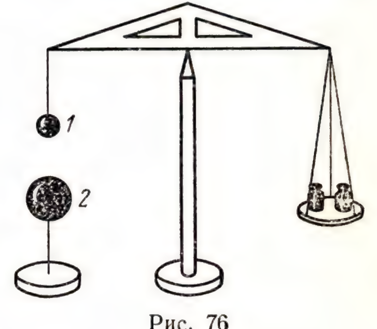


Рис. 76

Электроемкость

Электроемкостью (или просто емкостью) уединенного проводника называется величина

$$C=\frac{q}{\varphi}, \tag{12}$$

где q — его заряд, а φ — потенциал (относительно бесконечности). В частности, емкость уединенного шара радиуса R, помещенного в безграничную среду с диэлектрической проницаемостью ε, в системе единиц СГСЭ вычисляется по формуле

$$C=\varepsilon R,$$

а в системе единиц СИ — по формуле

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon R,$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

Два изолированных друг от друга проводника, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами, образуют конденсатор. Эти проводники часто называют обкладками конденсатора. Емкостью конденсатора называется положительная величина

$$C=\frac{q}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{q}{U}, \tag{13}$$

где q — заряд на одной из его обкладок, $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ — разность потенциалов между ними. Емкость конденсатора с диэлектриком, заполняющим пространство между обкладками,

$$C=\varepsilon C_0,$$

где C_0 — емкость этого же конденсатора без диэлектрика.

В частности, емкость плоского конденсатора, представляющего собой две параллельные пластины площадью S каждая, пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, в системе единиц СГСЭ вычисляется по формуле

$$C=\frac{\varepsilon S}{4\pi d},$$

а в системе единиц СИ

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d},$$

где d — расстояние между пластинами.

При параллельном соединении конденсаторов с емкостями C_1, C_2, ... , C_n общая их емкость

$$C=C_1+C_2+\ldots+C_n.$$

Общую емкость C последовательно соединенных конденсаторов с емкостями C_1, C_2, ... , C_n можно найти из соотношения

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots+\frac{1}{C_n}.$$

Конденсатор, емкость которого C, заряженный зарядом q до разности потенциалов U, обладает энергией

$$W=\frac{CU^2}{2}=\frac{q^2}{2C}=\frac{qU}{2}.$$

За единицу емкости согласно формулам (12) и (13) принимается в системе единиц СГСЭ

$$1\ \text{см}=\frac{1\ \text{ед. заряда СГСЭ}}{1\ \text{ед. потенциала СГСЭ}}$$

и в системе единиц СИ

$$1\ \text{фарада}=\frac{1\ \text{кулон}}{1\ \text{вольт}}.$$

Между этими единицами емкости имеет место следующее соотношение: $1\ \Phi=9\cdot10^{11}$ см.

Для измерения емкостей, обычно встречающихся на практике, фарада оказывается слишком крупной единицей, поэтому употребительны более мелкие единицы емкости: 1 мкФ (микрофарада) $=10^{-6}$ Ф и 1 пФ (пикофарада) $=10^{-12}$ Ф.

---

626. Во сколько раз изменится емкость проводящего шара радиуса R, если он сначала помещен в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 2$ (керосин), а затем в среде, диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon_2 = 56{,}2$ (глицерин)?

627. Конденсатор, состоящий из двух параллельных пластин, имеет емкость $C = 5$ пФ. Какой заряд находится на каждой из его обкладок, если разность потенциалов между ними $U = 1000$ В?

628. Поверхностная плотность заряда на пластинах плоского конденсатора, находящегося в вакууме, $\sigma = 3\cdot10^{-7}$ Кл/м². Площадь пластины $S = 1000$ см². Емкость конденсатора $C = 10$ пФ. Определить скорость, которую приобретает электрон, пройдя в конденсаторе путь от одной пластины к другой. Удельный заряд электрона $e/m = 1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

Рис. 77

629. Плоский воздушный конденсатор состоит из трех пластин, соединенных как показано на рис. 77. Определить емкость конденсатора, если площадь каждой пластины $S = 100$ см², а расстояние между пластинами $d = 0{,}5$ см. Как изменится емкость конденсатора при погружении его в глицерин (диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 56{,}2$)?

630. Конденсатор построен из n латунных листов, проложенных стеклянными прокладками толщиной $d = 2$ мм. Площадь латунных листов и стеклянных прокладок одинакова и равна $S = 200$ см². Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$. Найти емкость конденсатора, если $n = 21$ и выводы конденсатора присоединены к крайним листам.

631. Маленький шарик подвешен на тонкой шелковой нити в пространстве плоского воздушного конденсатора, круглые пластины которого расположены горизонтально. Шарик несет на себе заряд $q = -10$ ед. заряда СГСЭ. Когда пластинам конденсатора сообщили заряд $Q = 980$ ед. заряда СГСЭ, натяжение нити увеличилось в два раза. Определить вес шарика. Радиус пластины конденсатора $R = 10$ см. Весом нити пренебречь.

632. Между вертикальными пластинами плоского конденсатора, находящегося в воздухе, подвешен на тонкой шелковой нити маленький шарик, несущий заряд $q = 10$ ед. заряда СГСЭ. Какой величины заряд надо сообщить пластинам конденсатора, чтобы шарик отклонился от вертикали на угол $\alpha = 45°$? Вес шарика $P = 4$ гс, площадь каждой пластины конденсатора $S = 314$ см². Весом нити можно пренебречь.

633. Какое количество электричества пройдет по проводам, соединяющим обкладки плоского конденсатора с зажимами аккумулятора, при погружении конденсатора в керосин? Площадь пластины конденсатора $S = 150$ см², расстояние между пластинами $d = 5$ мм, э. д. с. аккумулятора $\mathcal{E} = 9{,}42$ В, диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$.

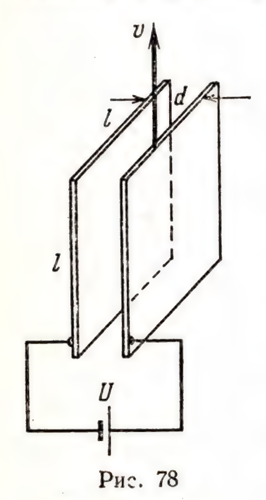


Рис. 78

634. Плоский конденсатор зарядили при помощи источника с напряжением $U = 200$ В. Затем конденсатор был отключен от источника. Каким станет напряжение между пластинами, если расстояние между ними увеличить от первоначального $d = 0{,}2$ мм до $d_1 = 0{,}7$ мм, а пространство между пластинами заполнить слюдой? Диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 7$.

635. Пластины плоского конденсатора присоединены к батарее, напряжение которой $U = 600$ В. Какой величины ток будет проходить по проводам при сдвигании одной пластины вдоль другой (рис. 78), если скорость движения $v = 6$ см/с? Пластины конденсатора квадратные, площадью $S_0 = 100$ см², расстояние между пластинами, равное $d = 0{,}1$ см, остается во время движения постоянным.

636. Определить величину заряда, который нужно сообщить двум параллельно соединенным конденсаторам, чтобы зарядить их до разности потенциалов $U = 20\,000$ В, если емкости конденсаторов $C_1 = 2000$ пФ и $C_2 = 1000$ пФ.

637. Два одинаковых плоских конденсатора соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов $U_0 = 6$ В. Определить разность потенциалов U_1 между пластинами конденсаторов, если после отключения конденсаторов от источника у одного конденсатора уменьшили расстояние между пластинами в два раза.

638. Конденсаторы емкостью $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ заряжены до разности потенциалов $U_1 = 20$ В и $U_2 = 50$ В соответственно. После зарядки конденсаторы соединены одноименными полюсами. Определить разность потенциалов U между обкладками конденсаторов после их соединения.

639. Конденсатор емкостью $C_1 = 20$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $U_1 = 100$ В, соединили параллельно с заряженным до разности потенциалов $U_2 = 40$ В конденсатором, емкость которого неизвестна. Определить емкость C_2 второго конденсатора, если разность потенциалов после соединения оказалась $U = 80$ В (соединяются обкладки, имеющие одноименные заряды).

640. Конденсатор емкостью $C_1 = 4$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 10$ В. Какой заряд будет на обкладках этого конденсатора, если к нему подключить параллельно другой конденсатор емкостью $C_2 = 6$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $U_2 = 20$ В? Соединены обкладки конденсаторов, имеющие разноименные заряды.

641. Конденсатор, заряженный до разности потенциалов $U_1 = 20$ В, соединили параллельно с заряженным до разности потенциалов $U_2 = 4$ В другим конденсатором, емкость которого $C_2 = 33$ мкФ. Определить емкость C_1 первого конденсатора, если напряжение на обкладках конденсаторов после их соединения $U = 2$ В (соединялись обкладки, имеющие разноименные заряды).

642. Конденсатор емкости $C_1 = 1$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 100$ В. Другой конденсатор емкости $C_2 = 2$ мкФ также заряжен, но разность потенциалов U_2 на его обкладках неизвестна. Найти U_2, если известно, что при соединении разноименных обкладок напряжение на пластинах оказалось равным $U = 200$ В.

643. Два металлических шара с радиусами R_1 и R_2 расположены так, что расстояние между ними во много раз больше радиуса большего из шаров. На шар радиуса R_1 помещен заряд Q. Каковы будут заряды на шарах после соединения их проводником, если второй шар не был заряжен? (Предполагается, что тонкий проводник, соединяющий шары, имеет малую емкость по сравнению с шаром, имеющим меньший радиус.)

644. Два проводящих шара с радиусами $R_1 = 8$ см и $R_2 = 20$ см, находящихся на большом расстоянии друг от друга, имели электрические заряды $q_{10} = 40$ ед. заряда СГСЭ и $q_{20} = -20$ ед. заряда СГСЭ соответственно. Как перераспределятся заряды, если шары соединить очень тонким проводником?

645. Два проводящих шара, радиусы которых $r_1 = 10$ см и $r_2 = 5$ см, заряженные до потенциалов $\varphi_1 = 20$ В и $\varphi_2 = 10$ В, соединяются тонким проводником. Найти поверхностные плотности σ_1 и σ_2 электрических зарядов шаров после их соединения. Расстояние между шарами велико по сравнению с их радиусами.

646. Воздушный конденсатор, заряженный до разности потенциалов $U_1 = 800$ В, соединяется параллельно с одинаковым по

размерам незаряженным конденсатором, заполненным диэлектриком. Какова диэлектрическая проницаемость ε диэлектрика, если после этого соединения разность потенциалов $U = 100$ В?

647. Определить общую емкость C трех плоских воздушных конденсаторов, соединенных параллельно. Геометрические размеры конденсаторов одинаковы ($S = 314$ см^2, $d = 1$ мм).

Как изменится общая емкость конденсаторов, если пространство между пластинами одного конденсатора заполнить слюдой ($\varepsilon_1 = 7$), а другого — парафином ($\varepsilon_2 = 2$)?

648. В заряженном плоском конденсаторе, отсоединенном от источника, напряженность электростатического поля равна E_0. Половину пространства между пластинами конденсатора заполнили диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (толщина диэлектрика равна расстоянию между пластинами). Чему стала равна напряженность E электрического поля в пространстве между пластинами, свободном от диэлектрика?

649. Электрическая схема, состоящая из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостью $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 3$ мкФ, присоединена к источнику постоянного напряжения $U = 220$ В. Определить напряжение на каждом конденсаторе.

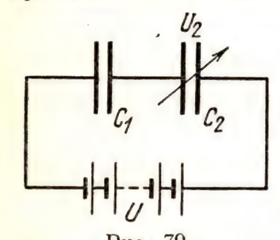


Рис. 79

650. На два конденсатора емкостью $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ, соединенных последовательно, подано напряжение $U = 900$ В. Возможна ли работа схемы при указанных условиях, если напряжение пробоя конденсаторов $U_0 = 500$ В?

651. Два последовательно включенных конденсатора присоединены к источнику напряжения $U = 200$ В (рис. 79). Один конденсатор имеет постоянную емкость $C_1 = 500$ см, а другой — переменную емкость от $C_{02} = 50$ см до $C_2 = 500$ см. В каких пределах изменяется напряжение на переменном конденсаторе при изменении его емкости от минимальной до максимальной?

652. Имеется три различных конденсатора, емкость одного из них $C_1 = 2$ мкФ. Когда все три конденсатора соединены последовательно, емкость цепи равна $C_0 = 1$ мкФ; когда параллельно, то $C = 11$ мкФ. Определить емкости двух неизвестных конденсаторов C_2 и C_3.

653. Имеется три конденсатора. Емкость одного из них $C_1 = 3$ мкФ. Когда конденсаторы соединены последовательно, то емкость цепи равна $C_0 = 0{,}75$ мкФ, а падение напряжения на конденсаторе с емкостью C_1 равно $U_1 = 20$ В. При параллельном соединении конденсаторов емкость цепи равна $C = 7$ мкФ. Определить неизвестные емкости C_2 и C_3 двух конденсаторов и падения напряжения U_2 и U_3 на них (при последовательном соединении).

654. Батарея из трех последовательно соединенных конденсаторов $C_1 = 100$ см, $C_2 = 200$ см, $C_3 = 500$ см присоединена к ак-

кумулятору, который сообщил батарее заряд $q = 10$ ед. заряда СГСЭ. Определить напряжение на каждом конденсаторе U_1, U_2 и U_3, э. д. с. аккумулятора $\mathscr{E}$ и общую емкость батареи конденсаторов.

655. Три последовательно соединенных конденсатора присоединены к источнику напряжения $U = 32$ В. Емкости конденсаторов $C_1 = 0{,}1$ мкФ, $C_2 = 0{,}25$ мкФ и $C_3 = 0{,}5$ мкФ. Определить напряжения U_1, U_2 и U_3 на каждом конденсаторе.

656. Два конденсатора с воздушным зазором, емкостью $C = 100$ пФ каждый, соединены последовательно и подключены к источнику, э. д. с. которого $\mathscr{E} = 10$ В. Как изменится заряд конденсаторов, если один из них погрузить в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$?

657. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику электрического тока с постоянной э. д. с. Внутрь одного из них вносят диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 9$. Диэлектрик заполняет все пространство между обкладками. Как и во сколько раз изменится напряженность электрического поля в этом конденсаторе?

658. Решить предыдущую задачу для случая, когда конденсаторы после зарядки отключаются от источника э. д. с.

659. Два плоских конденсатора, имеющих емкость по $C = 10$ пФ каждый, соединены в батарею последовательно. На сколько изменится емкость батареи, если пространство между пластинами одного из конденсаторов заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$?

660. В плоский воздушный конденсатор с площадью обкладок S и расстоянием между ними d вставлена параллельно обкладкам металлическая пластинка, размеры которой равны размерам обкладок. Определить емкость конденсатора после внесения пластинки, если ее толщина намного меньше d и расположена она на расстоянии l от одной из обкладок конденсатора.

661. Между обкладками плоского воздушного конденсатора (расстояние между обкладками d, площадь обкладки S) вводится параллельно обкладкам конденсатора металлическая пластинка, толщина которой $d_1 < d$. Определить емкость конденсатора с введенной проводящей пластиной. В частности, определить емкость при $d_1 = d/3$.

662. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов $U = 50$ В и отключен от источника. После этого в конденсатор параллельно обкладкам вносится металлический лист толщиной $d_1 = 1$ мм. Найти разность потенциалов U_1 между обкладками конденсатора, если расстояние между обкладками $d = 5$ мм. Площади обкладок и металлического листа равны.

663. В плоский воздушный конденсатор с расстоянием d между обкладками вводится параллельно обкладкам конденсатора диэлектрическая пластинка, толщина которой $d_1 < d$. Определить

емкость конденсатора с диэлектрической пластинкой. Диэлектрическая проницаемость материала пластинки равна ε. Площадь пластинки и каждой обкладки S.

664. Найти емкость C_0 плоского конденсатора, имеющего три диэлектрические прокладки равной толщины ($d = 2$ мм) из стекла ($\varepsilon_1 = 7$), слюды ($\varepsilon_2 = 6$) и парафина ($\varepsilon_3 = 2$), заполняющих весь объем между обкладками. Площадь обкладки конденсатора $S = 200$ см².

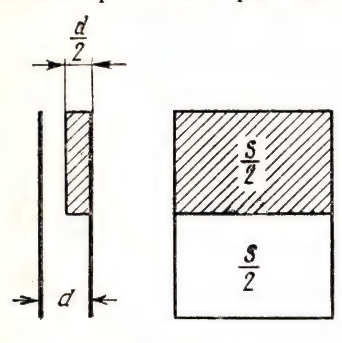


Рис. 80

665. В воздушный конденсатор внесена диэлектрическая пластинка с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ и расположена, как указано на рис. 80. Определить, во сколько раз изменилась емкость конденсатора при внесении пластинки в конденсатор.

666. Четыре конденсатора емкостью $C_1 = 3$ мкФ, $C_2 = 5$ мкФ, $C_3 = 6$ мкФ и $C_4 = 5$ мкФ соединены по схеме, указанной на рис. 81. Вычислить емкость всей батареи конденсаторов.

667. Найти емкость изображенной на рис. 82 схемы соединения одинаковых конденсаторов. Емкость каждого конденсатора C.

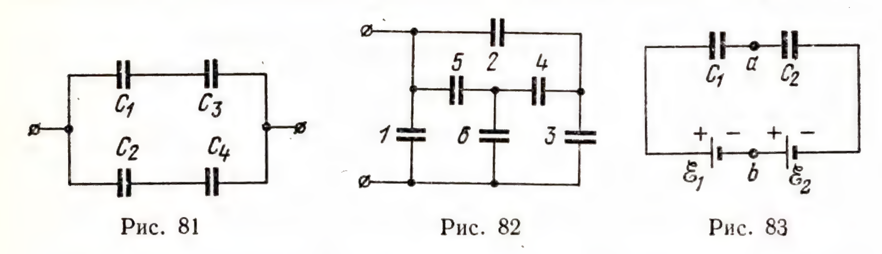


Рис. 81 Рис. 82 Рис. 83

668. Найти разность потенциалов между точками a и b схемы, изображенной на рис. 83. Емкости конденсаторов $C_1 = 0,5$ мкФ и $C_2 = 1$ мкФ, э. д. с. источников $\mathscr{E}_1 = 2$ В и $\mathscr{E}_2 = 3$ В.

669. Бумажный конденсатор емкостью $C_1 = 5$ мкФ и воздушный конденсатор емкостью $C_2 = 30$ см соединены последовательно и подключены к батарее с э. д. с. $\mathscr{E} = 200$ В. Затем второй конденсатор заливается керосином. Какой заряд Q протечет при этом по цепи? Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$.

670. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику тока с постоянной э. д. с. Во сколько раз изменится напряженность электрического поля в одном из них, если в другой конденсатор внести пластинку из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$ таким образом, чтобы диэлектрик заполнил все пространство между пластинами конденсатора?

671. На точечный заряд, находящийся внутри плоского конденсатора, заряженного зарядом Q_0, действует сила F. На какую величину ΔF изменится эта сила, если конденсатор в течение времени t заряжать током силы I?

672. Конденсаторы, соединенные по изображенной на рис. 84 схеме, заряжают, присоединив проводники A и B к батарее с э. д. с. $\mathscr{E} = 80$ В, а затем отключают от батареи. Найти заряд, который протечет по проводнику A, если замкнуть ключ K. Емкости конденсаторов указаны на схеме, где величина $C_0 = 100$ мкФ.

673. Четыре конденсатора соединены между собой, как показано на рис. 85. Полюсы источника тока можно присоединить либо к клеммам A и G, либо к клеммам D и B. Емкости конденсаторов имеют значения $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 5$ мкФ. Найти значения емкостей C_x и C_y, при которых заряды на обкладках всех конденсаторов будут равны между собой по абсолютной величине независимо от того, каким из двух указанных выше способов будет включен источник тока.

674. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора вставлены друг в друга так, что расстояния между любыми двумя соседними пластинами равны $d = 5$ мм. Каждый конденсатор соединен с батареей, э. д. с. которой $\mathscr{E} = 100$ В. Одна из пластин каждого конденсатора заземлена (рис. 86). Какова напряженность E электрического поля между пластинами A и B? Поле внутри конденсаторов считать однородным.

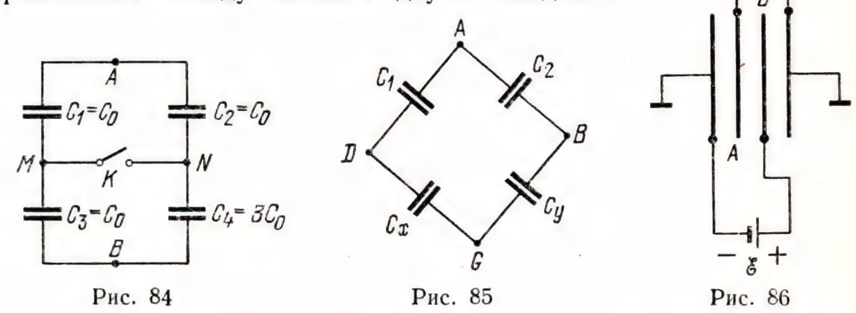


Рис. 84 Рис. 85 Рис. 86

675. Определить поверхностную плотность заряда на пластинах плоского конденсатора, если известно, что электрон, не имевший начальной скорости, пройдя путь от одной пластины к другой, приобретает скорость $v = 10^9$ см/с. Расстояние между пластинами $d = 3$ см. Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 5{,}3 \cdot 10^{17}$ ед. заряда СГСЭ/г.

676. Конденсатору с емкостью $C = 2$ мкФ сообщен заряд $q = 10^{-3}$ Кл. Обкладки конденсатора соединили проводником. Найти количество теплоты, выделившейся в проводнике при разрядке конденсатора, и разность потенциалов между обкладками конденсатора до разрядки.

677. При разрядке батареи, состоящей из $n = 20$ параллельно включенных одинаковых конденсаторов, выделилось 10 Дж тепла. Емкость каждого конденсатора $C = 4$ мкФ. Определить, до какой разности потенциалов были заряжены конденсаторы.

678. Определить, какое количество теплоты выделится при заземлении заряженного до потенциала $\varphi = 3000$ В шара радиусом $R = 5$ см.

679. Какой заряд сообщен шару, если шар заряжен до потенциала $\varphi = 100$ В? Электрическая энергия, запасенная шаром, $W = 2{,}02$ Дж.

680. Определить количество теплоты, выделившейся при соединении проводом верхних (незаземленных) обкладок двух конденсаторов (рис. 87). Разности потенциалов между верхними обкладками конденсаторов и землей равны соответственно $U_1 = 100$ В и $U_2 = -50$ В. Емкости конденсаторов $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 0{,}5$ мкФ.

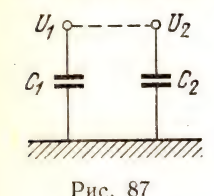


Рис. 87

681. Определить количество электрической энергии, перешедшей в тепло при соединении конденсаторов $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 0{,}5$ мкФ, заряженных до напряжений $U_1 = 100$ В и $U_2 = 50$ В соответственно, одноименно заряженными обкладками.

§ 20. Постоянный электрический ток

Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников

Постоянный электрический ток (сила тока) определяется по формуле

$$I = \frac{q}{t},$$

где q — заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за время t. В системе единиц СИ, когда заряды измеряются в кулонах, а время в секундах, единицей тока является 1 А.

Плотностью электрического тока (при равномерном распределении тока по поперечному сечению проводника) называется величина

$$j = \frac{I}{S},$$

где S — площадь поперечного сечения проводника.

Для участка цепи, содержащего проводники первого и второго рода (металлы и растворы или расплавы электролитов), справедлив закон Ома:

$$I = kU, \quad \text{или} \quad I = \frac{U}{R},$$

где R — сопротивление проводника, $k = 1/R$ — его проводимость, а U — падение напряжения на этом участке цепи (разность потенциалов между его концами).

В системе единиц СИ за единицу сопротивления принят 1 Ом = = 1 В/А.

1 единица сопротивления СГСЭ = $9 \cdot 10^{11}$ Ом.

Проводимость измеряется в сименсах, причем 1 См = 1 $Ом^{-1}$.

Сопротивление проводника с постоянным поперечным сечением, изготовленного из однородного материала, связано с длиной проводника l и площадью его поперечного сечения S соотношением

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ — удельное сопротивление материала проводника. Между единицами удельного сопротивления имеет место соотношение:

$$1 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м} = 10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{см} = 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Зависимость сопротивления металлических проводников от температуры t определяется выражением

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t),$$

где α — температурный коэффициент сопротивления и R_0 — сопротивление проводника при температуре $t_0 = 0$ °С.

---

682. Определить плотность тока, если известно, что за время $t = 10$ с через поперечное сечение проводника прошло $q = 100$ Кл электричества. Площадь поперечного сечения проводника $S = 5$ мм².

683. Вольтметр постоянного тока рассчитан на измерение максимального напряжения до $U = 3$ В. Сопротивление прибора $R = 300$ Ом. Шкала прибора имеет $n = 100$ делений. Какова будет цена деления прибора, выраженная в миллиамперах, если использовать этот прибор в качестве миллиамперметра?

684. Каким сопротивлением должен обладать электроизмерительный прибор, чтобы его можно было использовать либо в качестве вольтметра с пределом измерения $U = 15$ В, либо в качестве миллиамперметра с пределом измерения $I = 7{,}5$ мА?

685. Отклонение стрелки вольтметра до конца шкалы соответствует напряжению $U_1 = 15$ В. Ток, текущий при этом через вольтметр, $I_1 = 7{,}5$ мА. Определить ток, текущий через вольтметр, когда вольтметр показывает напряжение $U = 5$ В, и внутреннее сопротивление вольтметра.

686. Найти ток в цепи аккумулятора, замкнутого на сопротивление $R = 1000$ Ом, если при последовательном включении в эту цепь миллиамперметра с внутренним сопротивлением $R_1 = 100$ Ом он показал $I_1 = 25$ мА. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

687. Определить падение напряжения на проводнике, имеющем сопротивление $R = 10$ Ом, если известно, что за время $t = 5$ мин по проводнику прошел заряд $q = 120$ Кл.

688. В электрическую сеть включены последовательно плитка, реостат и амперметр, сопротивления которых $R_1 = 50$ Ом, $R_2 =$

$= 30$ Ом и $R_3 = 0{,}1$ Ом соответственно. Определить падение напряжения на плитке, реостате и амперметре по отдельности, если ток в цепи $I = 4$ А.

689. Сопротивление одного метра медной проволоки диаметром $D = 0{,}1$ мм равно 2,23 Ом. Каково удельное сопротивление ρ меди?

690. Определить сопротивление R медной проволоки, масса которой $m = 1$ кг, а площадь поперечного сечения $S = 0{,}1$ мм². Плотность меди $\rho_0 = 8900$ кг/м³, ее удельное сопротивление $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

691. Удельное сопротивление графитового стержня от карандаша $\rho = 400$ Ом·мм²/м. Какой величины ток I пройдет по стержню, если на него подать напряжение $U = 6$ В? Длина стержня $l = 20$ см, его диаметр $d = 2$ мм.

692. При включении в электрическую цепь проводника диаметром $d = 0{,}5$ мм и длиной $l = 47$ мм разность потенциалов на концах проводника $U = 1{,}2$ В при величине тока в цепи $I = 1$ А. Определить удельное сопротивление ρ материала проводника.

693. Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных кусков провода одинаковой длины и сделанных из одного материала, но имеющих разные сечения: $S_1 = 1$ мм², $S_2 = 2$ мм², $S_3 = 3$ мм². Разность потенциалов на концах цепи равна $U = 11$ В. Определить падение напряжения на каждом проводнике.

694. Для измерения температуры применяли железную проволочку, имеющую при температуре $t = 10$ °С сопротивление $R = 15$ Ом. При некоторой температуре t_1 сопротивление ее стало $R_1 = 18{,}25$ Ом. Определить эту температуру, если температурный коэффициент сопротивления железа $\alpha = 0{,}006$ К$^{-1}$.

695. Определить температуру t_1 нити лампочки, если при включении в сеть с напряжением $U = 220$ В по нити идет ток $I = 0{,}68$ А. Сопротивление вольфрамовой нити электрической лампочки при $t = 20$ °С равно $R = 36$ Ом. Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Последовательное и параллельное соединение проводников. Добавочные сопротивления и шунты

Общее сопротивление цепи при последовательном соединении проводников равно сумме сопротивлений этих проводников:

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n.$$

Общее сопротивление R параллельно соединенных проводников связано с сопротивлением этих проводников соотношением

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$

Соответственно общая проводимость последовательно включенных проводников удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n},$$

а общая проводимость параллельно включенных проводников равна сумме их проводимостей:

$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n.$$

---

696. Какой величины надо взять дополнительное сопротивление, чтобы можно было включить в сеть с напряжением $U = 220$ В лампу, которая горит нормально при напряжении $U_1 = 120$ В и токе $I_1 = 4$ А?

697. Две дуговые лампы и добавочное сопротивление соединены последовательно и включены в сеть с напряжением $U = 110$ В. Найти величину добавочного сопротивления, если падение напряжения на каждой лампе $U_1 = 40$ В, а ток в цепи $I = 12$ А.

698. Для измерения напряжения на участке электрической цепи включены последовательно два вольтметра (рис. 88). Первый вольтметр с сопротивлением $R_1 = 5000$ Ом дал показание $U_1 = 20$ В, а второй $U_2 = 80$ В. Определить сопротивление второго вольтметра.

Рис. 88

699. Реостат из железной проволоки, миллиамперметр и источник э. д. с. включены последовательно. При температуре $t_0 = 0$ °С сопротивление реостата $R_0 = 200$ Ом. Сопротивление миллиамперметра $r = 20$ Ом. Показание миллиамперметра $I_0 = 30$ мА. Что будет показывать миллиамперметр, если реостат нагреется на 50 °С? Температурный коэффициент сопротивления железа $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

700. Сопротивление $R = 2000$ Ом состоит из двух последовательно соединенных частей. Первое сопротивление (угольное) имеет температурный коэффициент сопротивления $\alpha_1 = -0{,}01$ К$^{-1}$, а второе (проволочное) — температурный коэффициент $\alpha_2 = +0{,}002$ К$^{-1}$. Какой величины следует выбрать угольное и проволочное сопротивления, чтобы суммарное сопротивление цепи R не зависело от температуры?

701. Составить такую схему электропроводки для освещения одной лампочкой проходного коридора, которая позволяет включать и выключать свет независимо в любом конце коридора.

702. В сеть с напряжением $U = 120$ В включены две электрические лампы, сопротивлением по $R = 200$ Ом каждая. Какой ток пойдет через каждую лампу при параллельном и последовательном их соединении?

703. Реостат со скользящим контактом (или штепсельными контактами), соединенный по схеме, приведенной на рис. 89, является делителем напряжения (потенциометром). При перемещении контакта *а* от *О* до *б* напряжение U_x непрерывно меняется от нуля до U — напряжения на клеммах источника. Найти зависимость сни-

маемого с потенциометра напряжения U_x от положения контакта a. Построить график этой зависимости для случая, когда сопротивление вольтметра R_1 во много раз больше сопротивления реостата R.

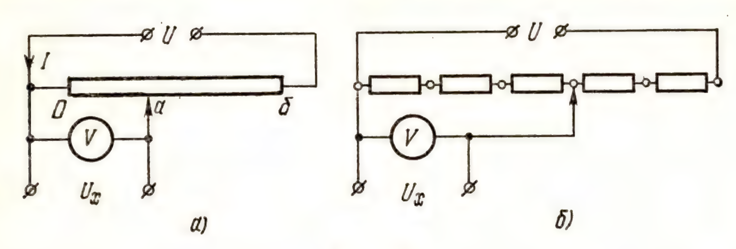


Рис. 89

704. Найти сопротивление биметаллического (железо — медь) провода длиной $l = 100$ м. Внутренняя железная основа (усиливающая прочность провода) имеет диаметр $d = 2$ мм. Общий диаметр провода $D = 5$ мм. Удельное сопротивление железа $\rho_1 = 0{,}12$ Ом·мм²/м, меди $\rho_2 = 0{,}017$ Ом·мм²/м. Для сравнения подсчитать сопротивления однородного железного R_3 и медного R_4 проводников диаметра D и длины l.

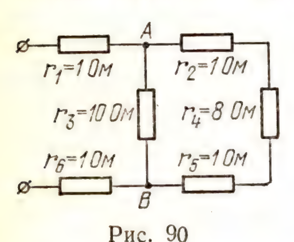


Рис. 90

705. Определить общее сопротивление цепи, изображенной на рис. 90.

706. Общее сопротивление двух последовательно соединенных проводников $R = 5$ Ом, а параллельно соединенных — $R_0 = 1{,}2$ Ом. Определить сопротивление каждого проводника.

707. К проволочному кольцу в двух точках присоединены подводящие ток провода. В каком отношении делят точки присоединения длину окружности кольца, если общее сопротивление получившейся цепи в $n = 4{,}5$ раза меньше сопротивления проволоки, из которой сделано кольцо?

708. В электрической цепи, изображенной на рис. 91, амперметр показывает ток $I = 0{,}04$ А, а вольт-

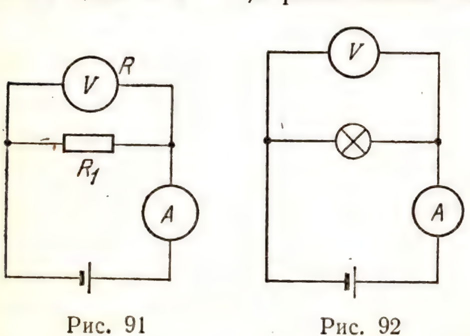


Рис. 91 Рис. 92

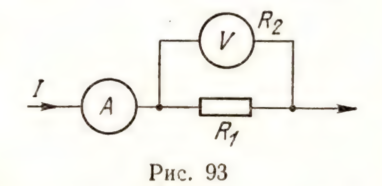


Рис. 93

метр — напряжение $U = 20$ В. Определить сопротивление R вольтметра, если $R_1 = 1000$ Ом.

709. Определить сопротивление R_1 нити лампочки по показаниям вольтметра ($U = 50$ В) и амперметра ($I = 0{,}5$ А), включенных по схеме рис. 92. Сопротивление вольтметра $R_2 = 40$ кОм.

710. Определить сопротивление R_1, если амперметр показывает (рис. 93) ток $I = 5$ А, а вольтметр $U = 100$ В. Внутреннее сопротивление вольтметра $R_2 = 2500$ Ом. Какова ошибка в определении R_1, если, предположив, что внутреннее сопротивление вольтметра много больше R_1, при расчетах пренебречь током, текущим через вольтметр?

711. Два проводника с одинаковыми сопротивлениями R соединены последовательно с источником, э. д. с. которого $\mathscr{E}$. Какова будет разница в показаниях вольтметров с внутренними сопротивлениями R и $10R$, если их поочередно подключить к концам одного из проводников? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

712. К источнику с напряжением $U = 12$ В присоединена линия, питающая две лампы. Схема включения ламп показана на рис. 94. Сопротивление участков линии $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r = 1{,}5$ Ом. Сопротивление каждой лампы $R = 36$ Ом. Определить падение напряжения на каждой лампе.

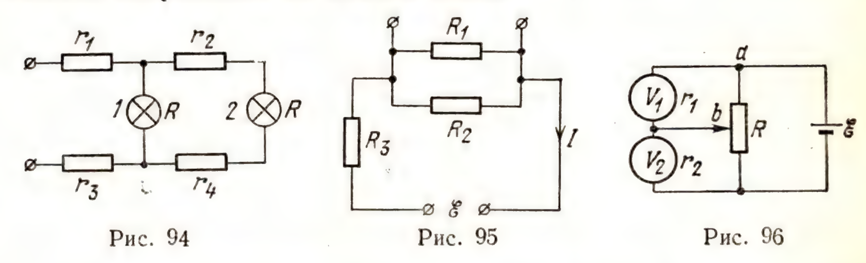


Рис. 94 Рис. 95 Рис. 96

713. В электрической схеме, показанной на рис. 95, э. д. с. генератора $\mathscr{E} = 200$ В и сопротивления $R_1 = 60$ Ом, $R_2 = R_3 = 30$ Ом. Вычислить падение напряжения на сопротивлении R_1. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

714. Электрическая цепь состоит из источника с э. д. с. $\mathscr{E} = 180$ В и реостата $R = 5$ кОм. Определить показания вольтметров, присоединенных к реостату по схеме, изображенной на рис. 96. Внутренние сопротивления вольтметров $r_1 = 6$ кОм и $r_2 = 4$ кОм. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь. Подвижный контакт b стоит посередине реостата.

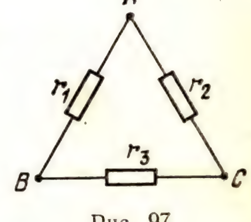


Рис. 97

715. Три реостата включены по схеме, изображенной на рис. 97. Если реостаты включены в цепь в точках AB, то сопротивление цепи $R_1 = 20$ Ом, а если в точках AC, то $R_2 = 15$ Ом. Определить сопротивления r_1, r_2, r_3, если известно, что $r_1 = 2r_2$.

716. На сколько равных частей нужно разрезать однородный проводник, имеющий сопротивление $R = 36$ Ом, чтобы сопротивление его частей, соединенных параллельно, было $R_0 = 1$ Ом?

717. Из однородной проволоки сделан каркас в форме куба (рис. 98), каждое ребро которого обладает сопротивлением r. Как велико сопротивление R этого каркаса, если ток идет от вершины A к вершине B? Какой величины ток будет в каждом ребре каркаса, если ток в общей цепи I?

718. Из проволоки, единица длины которой имеет сопротивление ρ, составлен изображенный на рис. 99 контур (окружность радиуса R и два взаимно перпендикулярных диаметра). Найти сопротивление x между точками C и D.

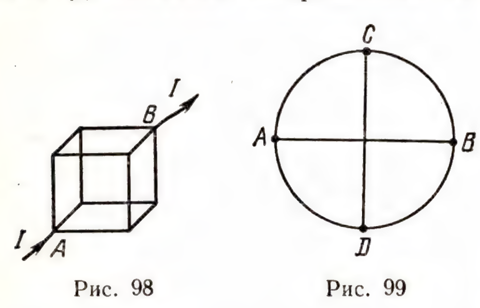


Рис. 98 Рис. 99

719. Провод длиной $L = 1$ м сплетен из трех жил, каждая из которых представляет собой кусок неизолированной проволоки с сопротивлением единицы длины $\rho = 0{,}02$ Ом/м. Между концами провода создано напряжение $U = 0{,}01$ В. На какую величину ΔI изменится сила тока в этом проводе, если от одной жилы удалить кусок длиной $l = 20$ см?

720. Полюсы источника постоянного тока первоначально присоединяются к двум соседним вершинам проволочной рамки, имеющей вид правильного выпуклого n-угольника. Затем полюсы источника присоединяются к вершинам, расположенным через одну. При этом сила тока уменьшается в 1,5 раза. Определить число сторон n-угольника. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

721. Как надо соединить четыре проводника, сопротивления которых $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом, $r_3 = 3$ Ом и $r_4 = 4$ Ом, чтобы получить сопротивление $R = 2{,}5$ Ом?

722. Определить проводимость электрической цепи, состоящей из двух последовательных групп параллельно включенных проводников. Провода первой группы имеют проводимость $k = 0{,}5$ См (сименс) каждый, а провода второй — по $k' = 0{,}25$ См каждый. Первая группа состоит из четырех проводников, вторая — из двух.

723. Вольтметр рассчитан на измерение максимального напряжения до $U_1 = 30$ В. При этом через вольтметр идет ток $I_1 = 10$ мА. Какое дополнительное сопротивление нужно присоединить к вольтметру, чтобы им можно было измерять напряжение $U = 150$ В?

724. Стрелка миллиамперметра отклоняется до конца шкалы, если через миллиамперметр идет ток $I = 0{,}01$ А. Сопротивление прибора $R = 5$ Ом. Какое дополнительное сопротивление $R_д$ нужно присоединить к прибору, чтобы его можно было использовать в качестве вольтметра на $U = 300$ В?

725. Вольтметр, соединенный последовательно с сопротивлением $R_1 = 10$ кОм, при включении в сеть напряжением $U = 220$ В показывает $U_1 = 70$ В, а соединенный последовательно с сопротивлением R_2 показывает $U_2 = 20$ В. Найти величину сопротивления R_2.

726. Вольтметр с внутренним сопротивлением $R = 3000$ Ом, включенный в городскую осветительную сеть, показал $U = 125$ В. При включении последовательно к вольтметру проводника с неизвестным сопротивлением R_1 его показание уменьшилось до $U_1 = 115$ В. Найти величину неизвестного сопротивления.

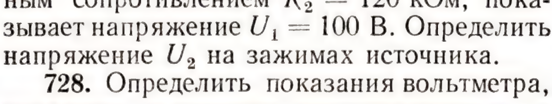


Рис. 100

727. Вольтметр, внутреннее сопротивление которого $R_1 = 50$ кОм, подключенный к источнику вместе с дополнительным сопротивлением $R_2 = 120$ кОм, показывает напряжение $U_1 = 100$ В. Определить напряжение U_2 на зажимах источника.

728. Определить показания вольтметра, имеющего внутреннее сопротивление r_1, в цепи, изображенной на рис. 100, если ток до разветвления равен I. Сопротивления r_2 и R даны.

729. Имеется прибор с ценой деления $i_0 = 1$ мкА/дел и числом делений $N = 100$. Внутреннее сопротивление прибора $R_a = 50$ Ом. Как этот прибор приспособить для измерения токов до величины $I = 10$ мА или напряжений до величины $U = 1$ В?

730. Миллиамперметр на $I_a = 25$ мА с внутренним сопротивлением $R_a = 10$ Ом необходимо использовать как амперметр для токов до $I = 5$ А. Какое сопротивление должен иметь шунт? Во сколько раз уменьшается чувствительность прибора?

731. Амперметр, накоротко присоединенный к гальваническому элементу с э. д. с. $\mathscr{E} = 1{,}5$ А и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом, показывает ток $I = 5$ А. Какой ток I_a покажет амперметр, если его зашунтировать сопротивлением $R_ш = 0{,}1$ Ом?

732. При шунтировании гальванометра сопротивлениями r_1, r_2 и r_3 в них ответвляется 90%, 99% и 99,9% тока I в общей цепи. Определить величину этих сопротивлений, если сопротивление гальванометра $R = 27$ Ом.

733. Миллиамперметр со шкалой от 0 до 50 делений имеет цену деления $\alpha = 500$ мкА/дел и внутреннее сопротивление $R_a = 200$ Ом. Какой величины и как нужно включить сопротивление, чтобы этим прибором можно было измерять ток до $I = 1$ А?

734. К амперметру, внутреннее сопротивление которого $R_a = 0{,}1$ Ом, подключен шунт сопротивлением $R_ш = 0{,}0111$ Ом. Определить ток, текущий через амперметр, если ток в общей цепи $I = 27$ А.

735. Параллельно амперметру, имеющему сопротивление $R_a = 0{,}03$ Ом, включен медный проводник длиной $l = 10$ см и диаметром $d = 1{,}5$ мм. Определить величину тока в цепи, если амперметр показывает $I_a = 0{,}4$ А. Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017$ Ом $\cdot$ мм^2/м.

Закон Ома для полной цепи

Электрический ток в полной замкнутой цепи, состоящей из внешнего сопротивления R и источника с электродвижущей силой $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Напряжение на участке цепи, если этот участок содержит э. д. с. $\mathcal{E}$ и имеет сопротивление R (включая и внутреннее сопротивление источника),

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E} - IR,$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы начала и конца этого участка (рис. 101, *а*). Здесь предполагается, что начало участка — у положительного полюса источника, конец участка — у отрицательного полюса и что

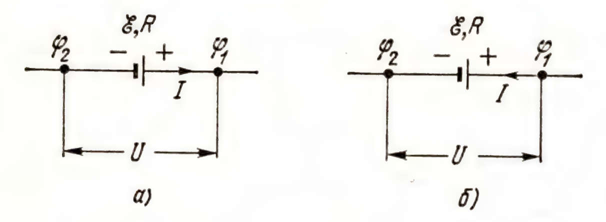


Рис. 101

ток I внутри источника течет от отрицательного полюса к положительному. Если другие участки этой цепи также содержат источники э. д. с., то на данном участке возможно противоположное направление тока внутри источника (рис. 101, *б*). В этом случае

$$U = \mathcal{E} + IR.$$

---

736. Ток в цепи батареи, э. д. с. которой $\mathcal{E} = 30$ В, равен $I = 3$ А. Напряжение на зажимах батареи $U = 18$ В. Найти сопротивление R внешней цепи и внутреннее сопротивление r батареи.

737. В цепи, состоящей из источника (э. д. с. $\mathcal{E} = 6$ В, внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом) и реостата, идет ток $I = 0{,}5$ А. Какой ток I_1 пойдет при уменьшении сопротивления реостата R в три раза?

738. Источник с э. д. с., равной $\mathcal{E}$, и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнее сопротивление R. Определить, как меняется ток в цепи и напряжение на зажимах источника в зависимости от R. Построить графики при $\mathcal{E} = 15$ В и $r = 2{,}5$ Ом.

739. Нить накала радиолампы включена последовательно с реостатом в цепь аккумулятора с э. д. с. $\mathcal{E} = 2{,}5$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом (рис. 102). Необходимый ток накала достигается, когда сопротивление реостата $R_1 = 8{,}4$ Ом. Определить ток накала I, если сопротивление нити накала $R_2 = 30$ Ом.

740. Для питания накала радиолампы необходимо напряжение $U = 4$ В и ток $I = 1$ А. Определить величину дополнительного сопротивления R_1 в цепи накала (рис. 102), если питать лампу от батареи аккумуляторов с э. д. с. $\mathscr{E} = 12$ В. Внутреннее сопротивление батареи $r = 0,6$ Ом.

741. Лампочка подключена медными проводами к аккумулятору, имеющему э. д. с. $\mathscr{E} = 2$ В и внутреннее сопротивление $r = 0,04$ Ом. Длина проводов $l = 4$ м и диаметр $d = 0,8$ мм. Напряжение на зажимах аккумулятора $U = 1,98$ В. Найти сопротивление R_2 лампочки. Удельное сопротивление меди 0,017 Ом · мм²/м.

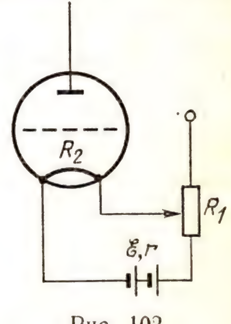


Рис. 102

742. Вольтметр, подключенный к источнику тока с э. д. с. $\mathscr{E} = 120$ В и внутренним сопротивлением $r = 50$ Ом, показывает $U = 118$ В. Определить внутреннее сопротивление R вольтметра.

743. После включения внешней цепи разность потенциалов на зажимах батареи оказалась равной $U = 18$ В. Чему равно внутреннее сопротивление батареи r, если э. д. с. батареи $\mathscr{E} = 30$ В, а сопротивление внешней цепи $R = 6$ Ом?

744. Определить падение напряжения U_1 на подводящих проводах и их сопротивление R_1, если на зажимах лампочки, имеющей сопротивление $R_2 = 10$ Ом, напряжение $U_2 = 1$ В. Э. д. с. источника $\mathscr{E} = 1,25$ В, его внутреннее сопротивление $r = 0,4$ Ом.

745. Динамомашина питает током $n = 100$ ламп, соединенных параллельно, имеющих сопротивление $R = 1200$ Ом каждая и рассчитанных на напряжение $U_0 = 220$ В. Сопротивление линии $R_1 = 4$ Ом. Внутреннее сопротивление машины $r = 0,8$ Ом. Найти э. д. с. машины и напряжение на ее зажимах.

746. Какова должна быть э. д. с. батареи, включенной в схему, изображенную на рис. 103, чтобы напряженность электростатического поля в плоском конденсаторе была $E = 2250$ В/м? Внутреннее сопротивление батареи $r = 0,5$ Ом. Сопротивление $R = 4,5$ Ом. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 0,2$ см.

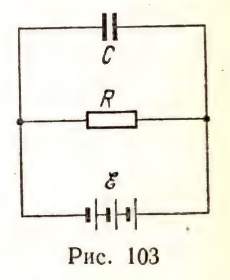


Рис. 103

747. Батарея гальванических элементов с э. д. с. $\mathscr{E} = 15$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом замкнута проводником, имеющим сопротивление $R = 10$ Ом. К зажимам батареи подключен конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ. Определить величину заряда на конденсаторе.

748. Замкнутая электрическая цепь состоит из источника тока и двух соединенных последовательно одинаковых сопротивлений R. К концам одного из сопротивлений присоединяют по очереди два вольтметра: один имеет сопротивление R, а второй — сопротивление $10R$. Во сколько раз будут отличаться показания вольтметров? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

749. К источнику э. д. с. $\mathscr{E} = 8{,}8$ В присоединены последовательно сопротивление R_1, величина которого неизвестна, и сопротивление $R_2 = 1000$ Ом. К концам сопротивления R_1 подключен вольтметр с сопротивлением $r = 5000$ Ом, показывающий напряжение $U = 4$ В. Какое падение напряжения U_1 будет на сопротивлении R_1, если отключить вольтметр? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

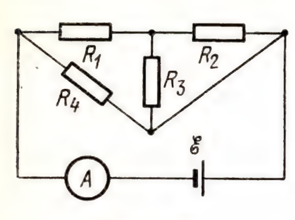


Рис. 104

750. Какой ток I покажет амперметр, включенный в схему, изображенную на рис. 104, если $R_1 = 1{,}25$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 7$ Ом и э. д. с. источника $\mathscr{E} = 2{,}8$ В? Сопротивлением амперметра и источника пренебречь.

751. Найти ток I, идущий через источник тока в схеме, изображенной на рис. 105, если все сопротивления одинаковы и равны $R = 34$ Ом, а э. д. с. источника $\mathscr{E} = 7{,}3$ В. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

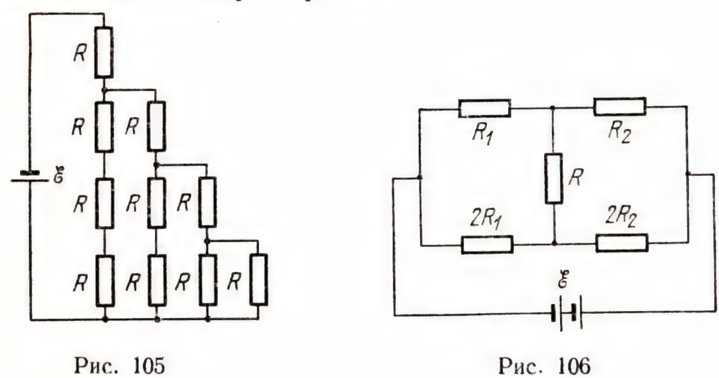


Рис. 105 Рис. 106

752. Определить величину тока I, идущего через сопротивление R_2 в схеме, изображенной на рис. 106. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

753. Генератор с э. д. с. $\mathscr{E} = 1400$ В и внутренним сопротивлением $r_0 = 2{,}2$ Ом подключен одним полюсом к центральной алюминиевой жиле кабеля (диаметр жилы $d = 8$ мм), другим — к его свинцовой оболочке с наружным диаметром $D_1 = 18$ мм и внутренним $D_2 = 16$ мм. На каком расстоянии l (вдоль кабеля) от генератора кабель порвался и произошло замыкание жилы с оболочкой, если начальный ток короткого замыкания $I = 120$ А? Удельное сопротивление алюминия $\rho_1 = 0{,}03$ Ом$\cdot$мм^2/м, свинца $\rho_2 = 0{,}20$ Ом$\cdot$мм^2/м.

754. Чему будет равна сила тока I, текущего по сопротивлению R в схеме, изображенной на рис. 107, в первый момент после замыкания ключа, если до этого напряжение на конденсаторе было постоянным?

755. Определить разности потенциалов U_1 и U_2 на обкладках конденсаторов C_1 и C_2 в схеме, изображенной на рис. 108.

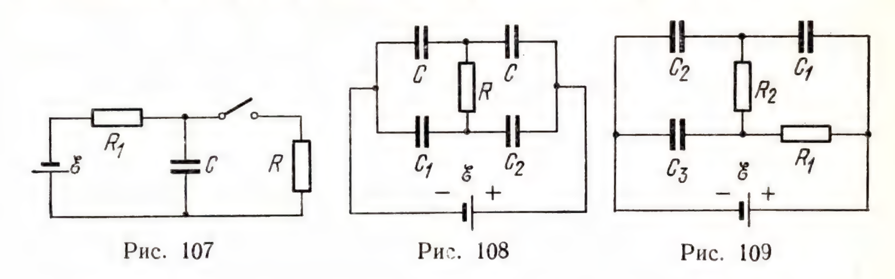


Рис. 107 Рис. 108 Рис. 109

756. Определить величины зарядов q_1, q_2 и q_3 на каждом из конденсаторов в схеме, изображенной на рис. 109.

757. В цепь, питаемую элементом с внутренним сопротивлением $r_0 = 3$ Ом, входят, как показано на рис. 110, два сопротивления $R_1 = R_2 = 28$ Ом, включенные параллельно, и сопротивление $R_3 = 40$ Ом. Параллельно сопротивлению R_3 подключен конденсатор емкостью $C = 5$ мкФ, заряд которого $q = 4{,}2 \cdot 10^{-6}$ Кл. Определить э. д. с. $\mathscr{E}$ элемента.

758. Два одинаковых сопротивления $r = 25$ Ом и сопротивление $R = 50$ Ом подключены к источнику по схеме, указанной на рис. 111. К участку AB подключен конденсатор емкостью $C = 5$ мкФ. Определить э. д. с. источника, если заряд на конденсаторе $q = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ Кл. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь.

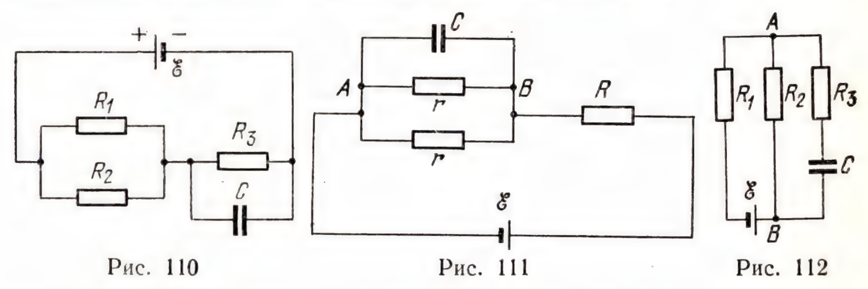


Рис. 110 Рис. 111 Рис. 112

759. Каков заряд пластин конденсатора C в электросхеме, изображенной на рис. 112? Выразить величину заряда через обозначенные на рисунке величины. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

760. Определить разность потенциалов на обкладках конденсатора C в электрической схеме, указанной на рис. 113. Э. д. с. $\mathscr{E}$ и все сопротивления заданы. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

761. Батарея с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнута на сопротивление R. Вольтметр, подключенный к зажимам

батареи, показывает напряжение $U_1 = 20$ В. Когда параллельно R присоединяется такое же сопротивление R, показание вольтметра уменьшается до $U_2 = 15$ В. Определить R, считая, что сопротивление вольтметра намного больше R. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

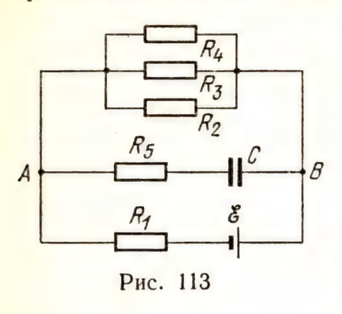


Рис. 113

762. В цепь генератора включены последовательно два сопротивления $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 500$ Ом. К концам второго сопротивления подключен вольтметр. Найти сопротивление R вольтметра, если он показывает $U = 160$ В. Э. д. с. генератора $\mathscr{E} = 200$ В, его внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ Ом.

763. Проволока из нихрома изогнута в виде кольца радиусом $a = 1$ м (рис. 114). В центре кольца помещен гальванический элемент Грене с э. д. с. $\mathscr{E} = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 1{,}5$ Ом. Элемент соединен с точками A и B кольца по диаметру с помощью такой же нихромовой проволоки. Определить напряжение между точками A и B. Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м. Сечение проволоки $S = 1$ мм². Длину проволоки AB считать равной диаметру кольца.

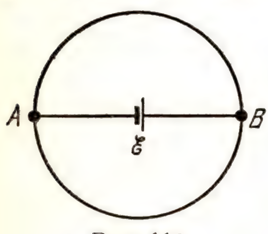


Рис. 114

764. К клеммам источника подключены два параллельно соединенных сопротивления $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 2$ Ом. Определить отношение токов, протекающих через первое сопротивление до и после обрыва в цепи второго сопротивления. Внутреннее сопротивление источника $r = 1$ Ом.

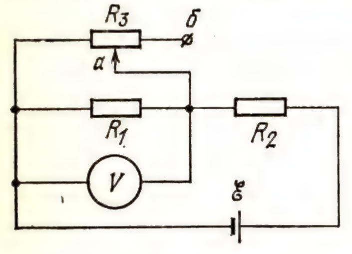


Рис. 115

765. Два сопротивления $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 1$ Ом и реостат $R_3 = 2$ Ом присоединены к источнику с внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом (рис. 115). К разветвленному участку цепи подключен вольтметр. Когда движок реостата находится на его середине (точка a), вольтметр показывает напряжение $U_0 = 13$ В. Каково будет показание вольтметра, если движок передвинуть в крайнее правое положение на реостате (точка $б$)? Сопротивление вольтметра велико по сравнению с R_1 и R_2. Сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь.

766. Шесть одинаковых проводников, сопротивление каждого из которых $r = 2$ Ом, соединены попарно параллельно. Все три пары соединены последовательно и подключены к батарее с внутренним сопротивлением $r_1 = 1$ Ом. При этом по каждому проводнику течет

ток $I = 2{,}5$ А. Какой ток будет течь по каждому проводнику, если один из них удалить?

767. Электрическая цепь состоит из источника э. д. с. и трех сопротивлений $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 2$ Ом и $R_3 = 18{,}8$ Ом, включенных по схеме, изображенной на рис. 116. Найти токи, текущие через сопротивления R_1 и R_2. Э. д. с. источника $\mathscr{E} = 100$ В и его внутреннее сопротивление $r = 0{,}2$ Ом.

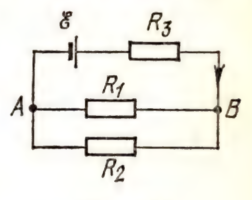


Рис. 116

768. К полюсам батареи с э. д. с. $\mathscr{E} = 120$ В и внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом подключены два параллельных провода сопротивлением по $R = 20$ Ом каждый. Свободные концы проводов и их середины соединены друг с другом через две лампочки сопротивлением по $R_1 = 200$ Ом. Найти ток, текущий через батарею.

769. При замыкании источника электрического тока на сопротивление $R_1 = 5$ Ом в цепи идет ток $I_1 = 5$ А, а при замыкании на сопротивление $R_2 = 2$ Ом идет ток $I_2 = 8$ А. Найти внутреннее сопротивление и э. д. с. источника.

770. Определить внутреннее сопротивление аккумулятора, если известно, что при замыкании его на внешнее сопротивление $R_1 = 14$ Ом напряжение на зажимах аккумулятора $U_1 = 28$ В, а при замыкании на сопротивление $R_2 = 29$ Ом напряжение на зажимах $U_2 = 29$ В. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

771. Амперметр с внутренним сопротивлением $R_1 = 2$ Ом, подключенный к зажимам батареи, показывает ток $I_1 = 5$ А. Вольтметр с внутренним сопротивлением $R_2 = 150$ Ом, подключенный к зажимам такой же батареи, показывает $U = 12$ В. Найти ток короткого замыкания батареи.

772. Электрическая схема составлена из двух параллельно соединенных сопротивлений $R_1 = 40$ Ом и $R_2 = 10$ Ом, подключенных к зажимам аккумулятора, э. д. с. которого $\mathscr{E} = 10$ В. Ток в общей цепи $I = 1$ А. Найти внутреннее сопротивление аккумулятора и ток короткого замыкания.

773. Аккумулятор, э. д. с. которого $\mathscr{E} = 25$ В и внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом, заряжается от сети напряжением $U = 40$ В через дополнительное сопротивление $R = 5$ Ом. Определить напряжение U_1 на зажимах аккумулятора.

Последовательное и параллельное соединение источников э. д. с.

Электрический ток в общей цепи при последовательном соединении n одинаковых элементов в батарею

$$I = \frac{n\mathscr{E}}{R + nr},$$

где R — сопротивление внешней цепи, r — внутреннее сопротивление каждого элемента, $\mathscr{E}$ — э. д. с. элемента.

При параллельном соединении n одинаковых элементов ток в общей цепи

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R+\frac{r}{n}}.$$

Правила Кирхгофа. При решении задач на разветвленные электрические цепи, особенно если в этих цепях имеется несколько источников тока, удобно пользоваться правилами Кирхгофа, которые заключаются в следующем.

Алгебраическая сумма всех токов, приходящих в точку разветвления (узел) и выходящих из нее, равна нулю:

$$I_1+I_2+\ldots+I_n=0. \qquad (14)$$

Токи, входящие в узел, считаются положительными, а выходящие из узла — отрицательными. Например, для узла *а* на рис. 117 уравнение для токов будет: $I_5-I_1-I_4=0$.

Направление тока на каждом участке цепи между двумя узлами можно выбирать произвольно, сохраняя, однако, это направление на всех этапах решения задачи. Если в результате решения для каких-либо токов получатся отрицательные численные значения, то это означает, что первоначальные направления токов были выбраны неправильно.

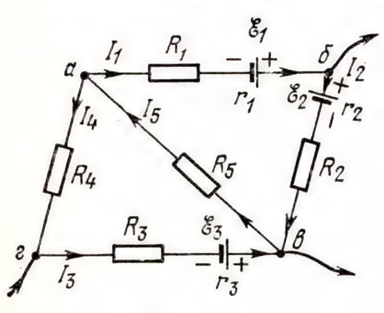


Рис. 117

При обходе любого замкнутого контура в сложной электрической цепи алгебраическая сумма падений напряжения на сопротивлениях (включая и внутренние сопротивления источников) равна алгебраической сумме э. д. с., имеющихся в этом контуре, т. е.

$$I_1R_1+I_2R_2+\ldots+I_nR_n=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\ldots+\mathscr{E}_n. \qquad (15)$$

Направление обхода каждого контура (по часовой стрелке или против нее) произвольно. Падение напряжения считается положительным, если выбранное заранее направление тока на этом участке между двумя узлами совпадает с направлением обхода контура, и отрицательным, если направление тока противоположно направлению обхода. Э. д. с. считается положительной, если при обходе по контуру источник тока проходится от отрицательного полюса к положительному, и отрицательной — в противном случае. Например, для контура *абвг*, показанного на рис. 117, при обходе по часовой стрелке уравнение (15) запишется в виде

$$I_1(R_1+r_1)+I_2(R_2+r_2)-I_3(R_3+r_3)-I_4R_4=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3.$$

Если полная схема содержит m узлов, то уравнения (14) составляются для $m-1$ узлов. При составлении уравнений (15) для кон-

туров нужно следить за тем, чтобы каждый вновь взятый контур не мог быть получен сложением или вычитанием уже рассмотренных контуров. Полное число уравнений, составленных по правилам Кирхгофа, должно совпадать с числом участков между узлами, т. е. с числом различных токов в данной схеме.

---

774. Чему равна разность потенциалов между точками A и B (рис. 118), если э. д. с. источников $\mathscr{E}_1 = 1$ В и $\mathscr{E}_2 = 1{,}3$ В, а сопротивления цепи $r_1 = 10$ Ом и $r_2 = 5$ Ом? Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

775. Два элемента соединены по схеме, изображенной на рис. 119. Первый имеет э. д. с. $\mathscr{E}_1 = 1{,}5$ В и внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}6$ Ом, второй — $\mathscr{E}_2 = 2$ В и $r_2 = 0{,}4$ Ом. Какое напряжение U на зажимах элементов (между точками a и $б$) покажет вольтметр, если сопротивление вольтметра во много раз больше, чем внутреннее сопротивление элементов?

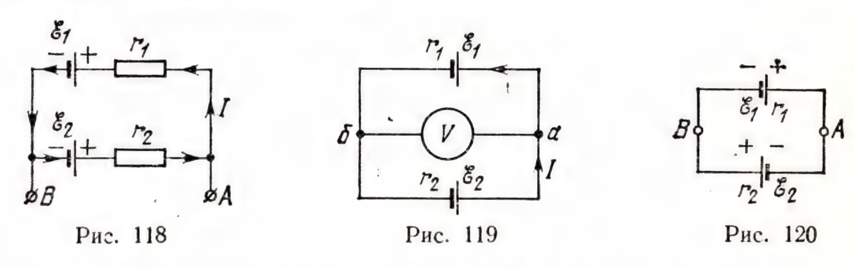


Рис. 118 Рис. 119 Рис. 120

776. Два элемента с э. д. с. $\mathscr{E}_1 = 1{,}4$ В и $\mathscr{E}_2 = 1{,}1$ В и внутренними сопротивлениями соответственно $r_1 = 0{,}3$ Ом и $r_2 = 0{,}2$ Ом замкнуты разноименными полюсами. Определить напряжение на зажимах элементов. Выяснить, при каких условиях разность потенциалов между точками B и A равна нулю (рис. 120).

777. Два источника тока с одинаковыми э. д. с. $\mathscr{E} = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}4$ Ом и $r_2 = 0{,}2$ Ом соединены последовательно. При каком внешнем сопротивлении напряжение на зажимах одного из источников станет равным нулю?

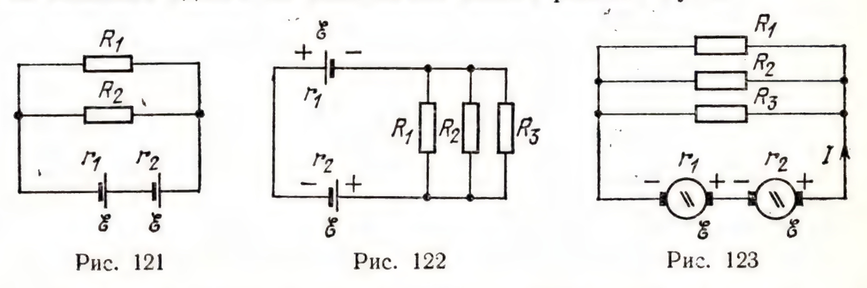


Рис. 121 Рис. 122 Рис. 123

778. Чему равно внутреннее сопротивление элемента r_1 (рис. 121), если разность потенциалов на его зажимах равна нулю? $R_1 = 3$ Ом,

$R_2 = 6$ Ом и $r_2 = 0{,}4$ Ом. Электродвижущие силы элементов одинаковы.

779. При каком соотношении между сопротивлениями R_1, R_2, R_3, r_1 и r_2 (рис. 122) разность потенциалов на зажимах одного из элементов будет равна нулю? Э. д. с. источников одинаковы.

780. Определить разности потенциалов U_1 и U_2 на зажимах генераторов, включенных по схеме, изображенной на рис. 123. Э. д. с. генераторов одинаковы, $\mathscr{E} = 6$ В, их внутренние сопротивления $r_1 = 0{,}5$ Ом и $r_2 = 0{,}38$ Ом. Сопротивления внешней цепи $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом и $R_3 = 7$ Ом.

781. Три гальванических элемента с э. д. с. $\mathscr{E}_1 = 2{,}2$ В, $\mathscr{E}_2 = 1{,}1$ В и $\mathscr{E}_3 = 0{,}9$ В и внутренними сопротивлениями соответственно $r_1 = 0{,}2$ Ом, $r_2 = 0{,}4$ Ом и $r_3 = 0{,}5$ Ом включены в цепь последовательно. Внешнее сопротивление цепи $R = 1$ Ом. Определить напряжение на зажимах каждого элемента.

782. Батарея из четырех последовательно включенных элементов с э. д. с. $\mathscr{E} = 1{,}25$ В и внутренним сопротивлением по $r = 0{,}1$ Ом каждый питает два параллельно включенных проводника с сопротивлениями $R_1 = 50$ Ом и $R_2 = 200$ Ом. Определить напряжение на зажимах батареи.

783. Сколько одинаковых аккумуляторов с внутренним сопротивлением $r = 0{,}004$ Ом каждый нужно взять, чтобы составить батарею, которая давала бы на зажимах $U = 115$ В при токе $I = 25$ А, если э. д. с. аккумулятора $\mathscr{E} = 1{,}25$ В?

784. Батарея из $n = 40$ последовательно включенных в цепь аккумуляторов заряжается от сети с напряжением $U = 127$ В. Чему равен зарядный ток, если э. д. с. аккумулятора $\mathscr{E} = 2{,}5$ В, внутреннее сопротивление аккумулятора $r = 0{,}2$ Ом и последовательно в цепь введено сопротивление $R = 2$ Ом?

785. Два элемента с э. д. с. $\mathscr{E}_1 = 1{,}25$ В и $\mathscr{E}_2 = 1{,}5$ В с одинаковым внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом соединены параллельно (рис. 124). Сопротивление внешней цепи $R = 10$ Ом. Найти токи, текущие во внешней цепи и в каждом элементе.

786. Найти ток, идущий через сопротивление $R = 10$ Ом (рис. 125). Э. д. с.

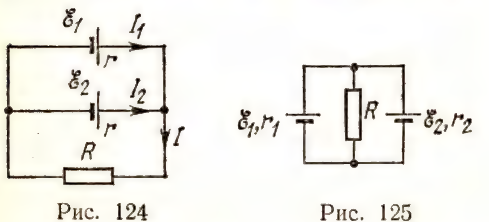


Рис. 124 Рис. 125

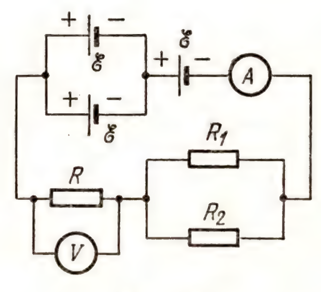


Рис. 126

источников тока $\mathscr{E}_1 = 6$ В и $\mathscr{E}_2 = 5$ В, внутренние сопротивления их $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 2$ Ом.

787. Какое напряжение U показывает вольтметр в цепи, изображенной на рис. 126, если миллиамперметр показывает ток $I = 100$ мА, сопротивления $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 15$ Ом, сопротивление R неизвестно, каждый элемент имеет э. д. с. $\mathcal{E} = 1{,}6$ В и внутреннее сопротивление $r = 0{,}8$ Ом? Сопротивление вольтметра очень велико, сопротивление миллиамперметра пренебрежимо мало.

788. Сопротивления R_1 и R_2 и э. д. с. источников $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ в схеме, изображенной на рис. 127, известны. При какой величине $\mathcal{E}$ э. д. с. третьего источника по сопротивлению R ток не течет?

789. Цепь, состоящая из трех одинаковых последовательно соединенных элементов с э. д. с.

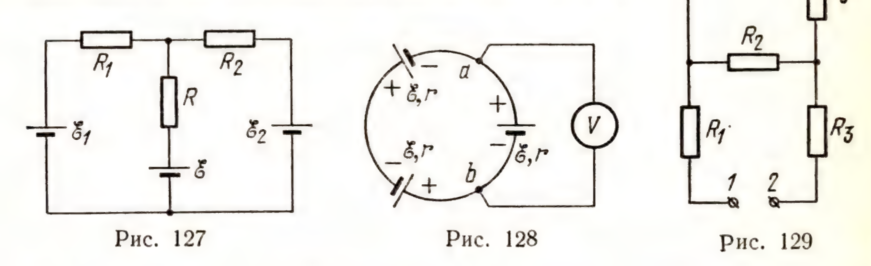


Рис. 127 Рис. 128 Рис. 129

$\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r у каждого, замкнута накоротко (рис. 128). Какое напряжение покажет вольтметр, подключенный к выводам одного из элементов? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

790. При каком значении $\mathcal{E}$ э. д. с. источника, подключенного к зажимам *1—2*, и при каком направлении его включения в схеме, изображенной на рис. 129, ток, текущий по сопротивлению R_2, будет равен нулю? Величины сопротивлений R_0, R_1, R_2, R_3 и э. д. с. $\mathcal{E}_0$ известны. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

791. Два элемента с одинаковыми э. д. с. $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ включены в цепь последовательно. Внешнее сопротивление цепи $R = 5$ Ом. Отношение напряжения на зажимах первого элемента к напряжению на зажимах второго элемента равно $^2/_3$. Найти внутренние сопротивления элементов r_1 и r_2, если известно, что $r_1 = 2r_2$.

792. Имеются два элемента с равными э. д. с. $\mathcal{E} = 1{,}5$ В и внутренними сопротивлениями $r = 0{,}2$ Ом, сопротивление нагрузки составляет в одном случае $R_1 = 0{,}2$ Ом, в другом $R_2 = 20$ Ом. Как нужно соединить элементы (последовательно или параллельно) в первом и во втором случаях, чтобы получить наибольший ток в цепи?

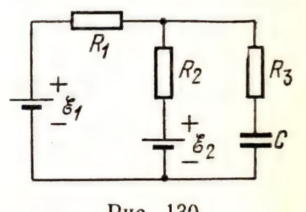


Рис. 130

793. Найти заряд q конденсатора, включенного в схему, изображенную на рис. 130, если величины сопротивлений $R_1 = 1$ Ом,

$R_2 = 3$ Ом, емкость конденсатора $C = 2$ мкФ, э. д. с. источников $\mathscr{E}_1 = 4$ В, $\mathscr{E}_2 = 2$ В, их внутренние сопротивления $r_1 = 0{,}25$ Ом, $r_2 = 0{,}75$ Ом.

794. К батарее, состоящей из двух параллельно включенных элементов с э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, подключена внешняя цепь, имеющая сопротивление R. Определить ток I во внешней цепи, токи I_1 и I_2 в первом и втором элементах. Внутренние сопротивления элементов r_1 и r_2 соответственно. Выяснить условия, при которых токи в отдельных цепях могут быть равными нулю или изменять свое направление на обратное.

795. Несколько одинаковых аккумуляторов соединены один раз последовательно, другой — параллельно и каждый раз батарея замыкается проводником с сопротивлением R. При каких условиях ток в проводнике будет в обоих случаях одинаков?

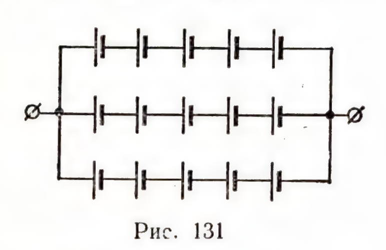


Рис. 131

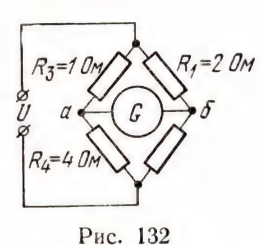


Рис. 132

796. Есть две батареи, одна составлена из $n = 4$ одинаковых гальванических элементов, соединенных последовательно, а другая — из таких же четырех элементов, соединенных параллельно. Эти батареи замкнуты на одинаковое сопротивление $R = 10$ Ом. Во сколько раз будут отличаться показания вольтметров, подключенных к зажимам батарей? Внутреннее сопротивление каждого гальванического элемента $r = 2$ Ом. Сопротивление вольтметра велико по сравнению с R и r.

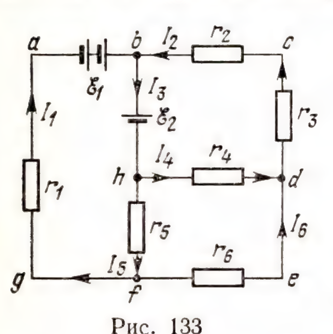


Рис. 133

797. Как изменится ток во внешней цепи, сопротивление которой $R = 2$ Ом, если десять одинаковых элементов, соединенных последовательно с этим сопротивлением, включить параллельно ему? Э. д. с. элемента $\mathscr{E} = 2$ В, его внутреннее сопротивление $r = 0{,}2$ Ом.

798. Батарея составлена из $N = 600$ одинаковых элементов, так, что n групп соединены последовательно и в каждой из них содержится по m элементов, соединенных параллельно. Э. д. с. каждого элемента $\mathscr{E} = 2$ В и внутреннее сопротивление $r = 0{,}4$ Ом. При каких значениях n и m батарея, будучи замкнута на внешнее сопротивление $R = 0{,}6$ Ом, отдаст во внешнюю цепь максимальную мощность? Определить при этом ток во внешней цепи.

799. Емкость щелочного аккумулятора $Q_0 = 80$ ампер-часов. Какова емкость батареи из $n = 3$ таких аккумуляторов, включенных: 1) последовательно, 2) параллельно?

800. Определить емкость батареи аккумуляторов, включенных по схеме, данной на рис. 131. Емкость отдельного аккумулятора 64 А·ч.

801. Мост для измерения сопротивлений (рис. 132) сбалансирован так, что ток через гальванометр не идет. Ток в правой ветви $I_1 = 0,2$ А. Определить напряжение U источника питания.

802. Найти токи, протекающие в каждой ветви электрической цепи, показанной на рис. 133. $\mathscr{E}_1 = 6,5$ В, $\mathscr{E}_2 = 3,9$ В, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 10$ Ом. Внутренних сопротивлений источников э. д. с. не учитывать.

§ 21. Работа и мощность тока. Тепловое действие тока

При перемещении заряда q в электрическом поле из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 электрические силы совершают работу

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU.$$

Если по проводнику течет ток I, то через поперечное сечение проводника в течение времени t проходит заряд $q = It$. Поэтому при прохождении тока I по проводнику, напряжение между концами которого U, за время t совершается работа

$$A = IUt.$$

По закону сохранения энергии результатом этой работы является то, что проводник приобретает сам и передает окружающим телам эквивалентное количество энергии W в различных видах (в виде теплоты, механической, химической энергии и т. д.). В частности, если происходит выделение энергии только в виде теплоты Q, то

$$Q = kIUt,$$

или, учитывая, что по закону Ома $U = IR$,

$$Q = kI^2Rt = k\frac{U^2}{R}t,$$

где R — сопротивление проводника и k — тепловой эквивалент электрической энергии. В системе единиц СИ общей единицей для измерения работы, энергии и теплоты является джоуль. Поэтому если электрические единицы измерять в системе СИ (заряд в кулонах, ток в амперах, сопротивление в омах и разность потенциалов в вольтах), то работа и теплота, вычисляемые по всем этим формулам, получаются в джоулях при $k = 1$. Если электрические величины измеряются в единицах системы СИ, а теплоту желательно получить в калориях, то $k = 0,24$ кал/Дж.

Мощность постоянного тока I при прохождении по проводнику с сопротивлением R

$$N = \frac{W}{t} = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

Единица мощности в системе СИ

$$1 \text{ ватт} = 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ А} \cdot \text{В}.$$

Электрическая энергия может измеряться также в единицах, являющихся произведением единиц мощности на единицы времени. В частности, так как 1 Дж = 1 Вт·с, то

$$1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 10 \text{ гВт} \cdot \text{ч} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Коэффициентом полезного действия системы называется величина

$$\eta = \frac{A_{пол}}{W_{затр}} 100\% = \frac{W_{затр} - W_{потер}}{W_{затр}} 100\%,$$

где $A_{пол}$ — полезная работа (энергия), $W_{затр}$ — полная затраченная энергия и $W_{потер}$ — потерянная энергия.

---

803. Какое количество энергии (в гектоватт-часах и джоулях) запасено в аккумуляторе емкостью в 240 ампер-часов, имеющем э. д. с. $\mathscr{E} = 2$ В?

804. Какое количество электричества пройдет по проводнику сопротивлением $R = 10$ Ом за время $t = 20$ с, если к его концам приложено напряжение $U = 12$ В? Какая при этом будет произведена работа?

805. На сколько изменится температура воды в калориметре, если через проводник, помещенный в него, прошло количество электричества $q = 100$ Кл, а напряжение на концах проводника $U = 20$ В? Масса воды в калориметре $m = 0{,}2$ кг. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/кг.

806. Можно ли вместо двух соединенных параллельно электроплиток, мощностью по $N = 500$ Вт каждая, включить электрокамин, который потребляет ток $I = 12{,}5$ А при напряжении $U = 127$ В, если предохранитель рассчитан на ток, потребляемый электроплитками?

807. Определить сечение медных проводов, отводящих ток от генератора мощностью $N = 10^6$ кВт, если ток передается на трансформатор под напряжением $U = 15$ кВ. Плотность тока в проводе не должна превышать $j = 10$ А/мм².

808. Дуговая печь потребляет ток $I = 200$ А от сети, имеющей напряжение $U = 127$ В, через ограничивающее сопротивление $R_1 = 0{,}2$ Ом. Определить мощность, потребляемую печью.

809. Нагревательная спираль электрического аппарата для испарения воды имеет при 100° С сопротивление $R = 10$ Ом. Какой

величины ток I надо пропускать через эту спираль, чтобы аппарат испарял $m = 100$ г кипящей воды за время $t = 1$ мин? Удельная теплота парообразования воды $r = 22{,}6 \cdot 10^5$ Дж/кг.

810. Электропечь должна давать количество тепла $Q = 24$ ккал за время $t = 10$ мин. Какова должна быть длина нихромовой проволоки сечением $S = 5 \cdot 10^{-7}$ м², если печь предназначается для электросети с напряжением $U = 36$ В? Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

811. Комната теряет в сутки $Q = 8{,}7 \cdot 10^7$ Дж теплоты. Какой длины l надо взять нихромовую проволоку диаметром $d = 10^{-3}$ м для намотки электрической печи, поддерживающей температуру комнаты неизменной? Печь включается в сеть с напряжением $U = 120$ В. Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

812. В калориметре с $m = 480$ г воды помещен электрический нагреватель мощностью $N = 40$ Вт. Насколько изменится температура воды, если ток через нагреватель проходил в течение времени $\tau = 21$ мин? Теплоемкость калориметра вместе с нагревателем $C_0 = 100$ Дж/К. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

813. Определить мощность N нагревателя электрической кастрюли, если в ней за время $\tau = 20$ мин можно вскипятить 2 л воды. Начальная температура воды $t_1 = 20$°С. К. п. д. электроприбора $\eta = 70\%$. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

814. Сколько времени надо нагревать на электрической плитке мощностью $N = 600$ Вт при к. п. д. $\eta = 75\%$ массу $m = 2$ кг льда, взятого при температуре $t_1 = -16$°С, чтобы обратить его в воду, а полученную воду нагреть до температуры $t_2 = 100$°С? Удельная теплоемкость льда $c_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

815. Сколько метров нихромовой проволоки диаметром $d = 3 \cdot 10^{-4}$ м надо включить последовательно со 120-вольтовой лампочкой мощностью $N = 40$ Вт, чтобы она давала нормальный накал при напряжении в сети $U = 220$ В? Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

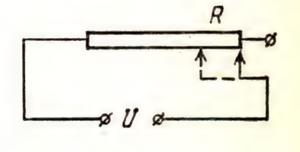


Рис. 134

816. Реостат с сопротивлением R подключен к сети с напряжением U (рис. 134). Определить, во сколько раз изменится потребляемая от сети мощность, если движок реостата перемещен на $^1/_4$ длины от конца реостата.

817. Найти к. п. д. насосной установки, которая подает в секунду $Q = 75$ л воды на высоту $h = 4{,}7$ м через трубу сечением $S = 0{,}01$ м², если мотор потребляет мощность $N = 10$ кВт.

818. Моторы электропоезда при движении со скоростью $v = 54$ км/ч потребляют мощность $N = 900$ кВт. Коэффициент полезного действия моторов и передающих механизмов вместе равен $\eta = 0{,}8$. Определить силу тяги F, развиваемую моторами.

819. Железная и медная проволоки, равные по длине и сечению, соединены последовательно и включены в сеть. Найти отношение количеств теплоты, выделяющихся в этих проводниках. Решить ту же задачу для параллельного соединения проволок. Удельное сопротивление железа $\rho_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м, удельное сопротивление меди $\rho_2 = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

820. Железная и медная проволоки, равные по длине и сечению, включены в цепь на одинаковые промежутки времени сначала последовательно, а затем параллельно. Найти отношение количества тепла, выделившегося при последовательном соединении, к количеству тепла, выделившегося при параллельном соединении, если в обоих случаях по железной проволоке тек один и тот же ток. Удельное сопротивление железа $\rho_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м, меди $\rho_2 = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

821. За время $t_1 = 40$ с в цепи, состоящей из трех одинаковых проводников, соединенных параллельно и включенных в сеть, выделилось некоторое количество теплоты. За какое время t_2 выделится такое же количество теплоты, если проводники соединить последовательно?

822. Два одинаковых нагревателя потребляют каждый мощность $N = 200$ Вт при напряжении $U = 120$ В. Эти нагреватели длинными и тонкими проводами подключены к источнику, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь. Определить сопротивление R проводов, если известно, что при последовательном и при параллельном соединении нагревателей они выделяют равное количество теплоты в единицу времени.

823. В электрочайнике с двумя нагревателями необходимо нагреть 2 л воды от комнатной температуры $t_1 = 20$°C до кипения. Каждый из нагревателей, включенный в электросеть отдельно, выделяет мощность $N_1 = 250$ Вт. Через сколько времени закипит вода, если воду подогревать одним нагревателем или двумя, включенными последовательно или параллельно друг другу в ту же сеть? К. п. д. электрочайника 80%. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

824. Электрический чайник имеет в нагревателе две секции. При включении первой секции вода в чайнике закипает за время $t_1 = 10$ мин, а при включении второй секции — за $t_2 = 40$ мин. Через сколько времени закипит вода, если включить обе секции параллельно или последовательно? Условия нагревания во всех случаях одинаковы.

825. Две лампы имеют одинаковую мощность. Одна из ламп рассчитана на напряжение $U_1 = 127$ В, другая — на напряжение $U_2 = 220$ В. Во сколько раз отличаются сопротивления ламп?

826. Какое сопротивление имеют 40- и 75-ваттные лампы накаливания, рассчитанные на включение в сеть с напряжением $U = 127$ В? Какой ток течет через каждую лампу?

827. Какую мощность потребляет 25-ваттная лампочка, рассчитанная на напряжение $U_1 = 120$ В, если ее включить в сеть с на-

пряжением $U_2 = 220$ В? Изменение сопротивления лампочки не учитывать.

828. Электролампочка мощностью $N = 100$ Вт включена в сеть с напряжением $U = 120$ В. Сопротивление лампочки в накаленном состоянии больше, чем в холодном (температура $t_0 = 0°$C), в 10 раз. Найти сопротивление лампочки в холодном состоянии и температурный коэффициент материала нити, если во время горения лампы температура нити $t = 2000°$C.

829. Определить сопротивление нити 100-ваттной электрической лампочки при комнатной температуре $t = 20°$C. При нормальном напряжении сети $U = 220$ В температура нити $t_1 = 2800°$C. Термический коэффициент сопротивления нити $\alpha = 0{,}004$ К$^{-1}$.

830. К источнику постоянного тока с э. д. с. $\mathscr{E} = 140$ В подключена лампа, находящаяся на расстоянии $l = 400$ м от источника. Лампа рассчитана на напряжение $U = 120$ В и мощность $N = 100$ Вт. На какую величину изменится напряжение на лампе, если параллельно ей подключить вторую такую же лампу?

Сечение провода $S = 1$ мм^2, удельное сопротивление провода $\rho = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м (алюминий).

831. На какое расстояние L можно передавать электрическую энергию от источника с э. д. с. $\mathscr{E} = 5$ кВ при помощи провода с удельным сопротивлением $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м и площадью поперечного сечения $S = 10^{-6}$ м^2 так, чтобы на нагрузке с сопротивлением $R = 1{,}6$ кОм выделялась мощность $N = 10$ кВт? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

832. Под каким напряжением U нужно передавать электроэнергию на расстояние $l = 10$ км, чтобы при плотности тока $j = 0{,}5$ А/мм^2 в стальных проводах двухпроводной линии электропередачи потери в линии составляли один процент от передаваемой мощности? Удельное сопротивление стали $\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом $\cdot$ м.

833. Определить напряжение на зажимах источника питания, если он обеспечивает в цепи ток $I = 2$ А. Цепь состоит из двух параллельно включенных лампочек мощностью $N = 30$ Вт каждая. Потери мощности в подводящих проводах составляют 10% полезной мощности.

834. От источника с напряжением $U = 750$ В необходимо передать мощность $N = 5$ кВт на некоторое расстояние. Какое наибольшее сопротивление R может иметь линия передачи, чтобы потери энергии в ней не превышали 10% от передаваемой мощности, т. е. мощности, дошедшей до потребителя?

835. Какой наибольшей мощности электропечь можно установить в конце двухпроводной линии, имеющей сопротивление $R = 10$ Ом, если источник тока развивает мощность не более $N = 6$ кВт при напряжении $U = 1000$ В?

836. Разветвленная цепь, состоящая из двух параллельно соединенных сопротивлений $R_1 = 6$ Ом и $R_2 = 12$ Ом, включена последовательно с сопротивлением $R = 15$ Ом. Эта электрическая схема подключена к зажимам генератора, э. д. с. которого

$\mathscr{E} = 200$ В, а внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Вычислить мощность, выделяющуюся на сопротивлении R_1. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

837. Элемент с внутренним сопротивлением $r = 4$ Ом и э. д. с. $\mathscr{E} = 12$ В замкнут сопротивлением $R = 8$ Ом. Какое количество теплоты будет выделяться во внешней цепи в единицу времени?

838. Определить полную мощность элемента при сопротивлении внешней цепи $R = 4$ Ом, если внутреннее сопротивление элемента $r = 2$ Ом, а напряжение на его зажимах $U = 6$ В.

839. Батарея, включенная на сопротивление $R_1 = 2$ Ом, дает ток $I_1 = 1{,}6$ А. Та же батарея, включенная на сопротивление $R_2 = 1$ Ом, дает ток $I_2 = 2$ А. Найти мощность, которая теряется внутри батареи во втором случае.

840. Определить э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r аккумулятора, если при токе $I_1 = 15$ А он отдает во внешнюю цепь мощность $N_1 = 135$ Вт, а при токе $I_2 = 6$ А — мощность $N_2 = 64{,}8$ Вт.

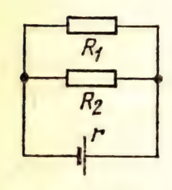


Рис. 135

841. К источнику с э. д. с. $\mathscr{E} = 8$ В подключена нагрузка. Напряжение на зажимах источника $U = 6{,}4$ В. Определить к. п. д. установки.

842. Определить к. п. д. схемы, изображенной на рис. 135. Сопротивления $R_1 = 2$ Ом и $R_2 = 5$ Ом. Внутреннее сопротивление источника $r = 0{,}5$ Ом.

843. Электродвижущая сила элемента равна $\mathscr{E}$, а его внутреннее сопротивление r. Чему равен к. п. д. схемы, в которую включен элемент, если ток в цепи равен I? Выразить к. п. д.: 1) через $\mathscr{E}$, r и I; 2) через сопротивление внешней цепи R и внутреннее сопротивление r; 3) через э. д. с. элемента и напряжение на его зажимах U.

844. Определить величину тока I в цепи свинцового аккумулятора, если его э. д. с. $\mathscr{E} = 2{,}2$ В, внешнее сопротивление $R = 0{,}5$ Ом и к. п. д. схемы $\eta = 65\%$.

845. Найти внутреннее сопротивление аккумулятора, если при увеличении внешнего сопротивления с $R_1 = 3$ Ом до $R_2 = 10{,}5$ Ом к. п. д. схемы увеличился вдвое.

846. От батареи, состоящей из шести последовательно включенных элементов Лекланше, э. д. с. каждого из которых $\mathscr{E} = 1{,}5$ В, питаются током $I = 0{,}28$ А две последовательно включенные лампочки с сопротивлениями по $R = 12{,}5$ Ом. Найти к. п. д. батареи и внутреннее сопротивление элемента Лекланше.

847. При включении электромотора в сеть с напряжением $U = 120$ В он потребляет ток $I = 15$ А. Определить мощность, потребляемую мотором, и его к. п. д., если сопротивление обмотки мотора $R = 1$ Ом.

848. Определить зависимость мощности N_1, выделяемой во внешней цепи источника, мощности N_2, выделяемой внутри источника, а также зависимость полной мощности $N = N_1 + N_2$, разви-

ваемой источником, от сопротивления внешней цепи R. Построить графики зависимости мощностей N_1, N_2 и N от сопротивления нагрузки R. Считать известными э. д. с. источника $\mathscr{E} = 15$ В и его внутреннее сопротивление $r = 2,5$ Ом.

849. Определить сопротивление R_1 внешней цепи, при котором мощность N, потребляемая во внешней цепи, такая же, как и при сопротивлении $R_2 = 10$ Ом. Внутреннее сопротивление элемента $r = 2,5$ Ом.

850. К аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом подключен нагревательный прибор с сопротивлением $R = 8$ Ом. Затем параллельно с первым подключили второй такой же прибор. Как изменилось количество теплоты, выделяющееся в единицу времени во внешней цепи?

851. К источнику тока с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом подключаются два одинаковых сопротивления по $R = 0,5$ Ом. Один раз сопротивления подключаются последовательно друг с другом, а другой раз — параллельно. Найти отношение мощностей, выделяющихся во внешней цепи в первом и во втором случаях.

852. Батарея состоит из параллельно соединенных элементов с внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом и э. д. с. $\mathscr{E} = 5,5$ В каждый. При токе во внешней цепи $I = 2$ А полезная мощность $N = 7$ Вт. Сколько в батарее элементов?

853. Нагреватель с постоянным сопротивлением $R = 25$ Ом питается от двух одинаковых аккумуляторов с внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом каждый. Каким образом (параллельно или последовательно) следует соединить аккумуляторы, чтобы получить в нагревателе бо́льшую мощность?

854. Электровоз весом $P = 300$ тс движется вниз по горе со скоростью $v = 36$ км/ч. Уклон горы 0,01, сила сопротивления движению электровоза составляет 3% от его веса. Какой величины ток протекает через мотор электровоза, если напряжение в сети $U = 3000$ В и к. п. д. электровоза $\eta = 80\%$?

855. Из одного пункта в другой передается электроэнергия, питающая установку мощностью в $N = 62$ кВт. Сопротивление проводов линии $R = 5$ Ом. Определить падение напряжения в линии, потери мощности в ней и к. п. д. передачи, если передача осуществляется при напряжении $U_1 = 6200$ В и $U_2 = 620$ В.

856. Какое добавочное сопротивление R нужно включить последовательно с лампочкой, рассчитанной на напряжение $U_1 = 120$ В при мощности $N = 60$ Вт, чтобы эта лампочка горела нормальным накалом при напряжении $U = 220$ В? Предполагая, что добавочное сопротивление сделано из нихромовой проволоки сечением $S = 0,5$ мм² с удельным сопротивлением $\rho = 1,0$ Ом·мм²/м, найти длину l проволоки.

857. Найти мощность N, выделяемую во внешней цепи, состоящей из двух одинаковых сопротивлений R, если известно, что на сопротивлениях выделяется одна и та же мощность как при

последовательном, так и при параллельном их соединении. Источником служит элемент с э. д. с. $\mathscr{E} = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом.

858. Какую мощность N потребляет схема, изображенная на рис. 136? Э. д. с. элемента $\mathscr{E} = 12$ В, его внутреннее сопротивление $r = 0{,}4$ Ом, сопротивления $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 6$ Ом и $R_5 = 10$ Ом.

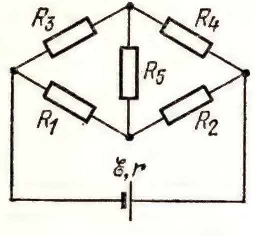


Рис. 136

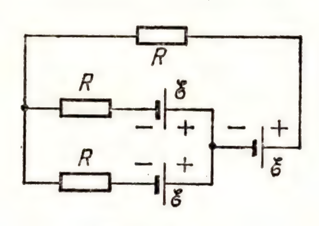


Рис. 137

859. Три одинаковых элемента с э. д. с., равной $\mathscr{E}$, с подключенными к ним одинаковыми сопротивлениями R составляют цепь, изображенную на рис. 137. Найти суммарную мощность, выделяющуюся на всех сопротивлениях схемы. Внутренними сопротивлениями элементов пренебречь.

860. Для составления елочной гирлянды имеется $n = 10$ лампочек, каждая мощностью $N = 2$ Вт на номинальное напряжение $U_1 = 4$ В, и некоторое количество лампочек, имеющих ту же мощность при номинальном напряжении $U = 8$ В. Какое минимальное количество n_1 восьмивольтовых лампочек нужно взять, чтобы, добавив их к десяти четырехвольтовым, составить гирлянду для включения в сеть с напряжением $U_0 = 120$ В?

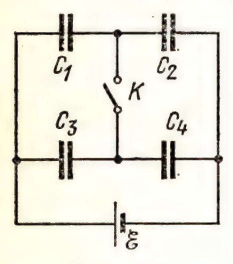


Рис. 138

861. Источник постоянного тока замыкают первый раз на сопротивление $R_1 = 9$ Ом, второй раз — на сопротивление $R_2 = 4$ Ом. Оба раза за одинаковое время на сопротивлениях выделяется одно и то же количество тепла. Определить внутреннее сопротивление r источника.

862. При одном и том же напряжении одна лампа потребляет мощность в два раза больше другой. Определить мощности N_1 и N_2, потребляемые каждой лампой при их последовательном включении в цепь, если вместе они в этом случае потребляют мощность N. Сопротивления ламп считать постоянными.

863. От источника напряжения необходимо передать потребителю мощность $N = 4$ кВт. Сопротивление подводящих проводов $R = 0{,}4$ Ом. Какое напряжение должно быть на зажимах источ-

ника, чтобы тепловые потери на проводах составляли 4% от потребляемой мощности?

864. Конденсатор емкостью C_1, имеющий заряд Q_1, соединяется через сопротивление с конденсатором, заряд и емкость которого соответственно Q_2 и C_2. Какое количество тепла q выделяется на сопротивлении? Соединяются противоположно заряженные обкладки.

865. Определить энергию W батареи конденсаторов, изображенной на рис. 138, при разомкнутом и замкнутом ключе K. Величины емкостей $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = C/2$, $C_4 = C$, э. д. с. источника $\mathcal{E}$.

§ 22. Электролиз

Электролизом называется выделение вещества на электродах, погруженных в раствор или расплав электролита, при прохождении тока. Масса m выделившегося при электролизе вещества согласно первому закону Фарадея пропорциональна заряду q, прошедшему через раствор или расплав электролита, т. е.

$$m = kq = kIt,$$

где I — сила тока в цепи, t — время его прохождения, а k — коэффициент пропорциональности, различный для разных веществ и носящий название электрохимического эквивалента.

По второму закону Фарадея электрохимические эквиваленты веществ прямо пропорциональны атомным массам A этих веществ и обратно пропорциональны их валентностям n:

$$k = C\frac{A}{n} = Cx,$$

где $x = A/n$ — химический эквивалент вещества. Постоянная $C = 1{,}036 \cdot 10^{-5}$ моль/Кл имеет для всех веществ одно и то же значение. Величина $F = 1/C = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль называется числом Фарадея. Это число показывает, какой заряд должен пройти через раствор электролита для того, чтобы на электроде выделилась масса вещества, численно равная его химическому эквиваленту.

Подставив в формулу первого закона Фарадея выражение для k, получим объединенный закон Фарадея:

$$m = C\frac{A}{n}It = \frac{1}{F}\cdot\frac{A}{n}It.$$

---

866. Определить электрохимический эквивалент натрия. Атомная масса натрия $A = 0{,}023$ кг/моль, его валентность $n = 1$, постоянная во втором законе Фарадея $C = 1{,}036 \cdot 10^{-5}$ моль/Кл.

867. Цинковый анод массой $m = 5$ г поставлен в электролитическую ванну, через которую проходит ток $I = 2$ А. Через какое время t анод полностью израсходуется на покрытие металлических изделий? Электрохимический эквивалент цинка $k = 3{,}4 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

868. Определить число Фарадея, если известно, что при прохождении через электролитическую ванну заряда $q = 7348$ Кл масса выделившегося на катоде золота $m = 5 \cdot 10^{-3}$ кг. Химический эквивалент золота $x = 66 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

869. Определить величину элементарного электрического заряда, если известно, что масса вещества, численно равная химическому эквиваленту, содержит $N_0 = N/n$ атомов или молекул, где n — валентность вещества, $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро. Число Фарадея $F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль.

870. Атомная масса серебра $A_1 = 0{,}108$ кг/моль, его валентность $n_1 = 1$ и электрохимический эквивалент $k_1 = 1{,}118 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл. Найти электрохимический эквивалент золота k_2, если атомная масса золота $A_2 = 0{,}197$ кг/моль, его валентность $n_2 = 3$.

871. Определить количество выделившихся веществ за время $t = 10$ ч на катодах трех электролитических ванн, включенных последовательно в сеть постоянного тока. Аноды в ваннах — медный, никелевый и серебряный — опущены соответственно в растворы $CuSO_4$, $NiSO_4$ и $AgNO_3$. Плотность тока при электролизе $j = 40$ А/м^2, поверхности катодов в каждой ванне $S = 5 \cdot 10^{-2}$ м^2. Электрохимические эквиваленты меди, никеля и серебра соответственно $k_1 = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл, $k_2 = 3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл и $k_3 = 1{,}118 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл.

872. При никелировании изделий в течение времени $t = 2$ ч отложился слой никеля толщиной $l = 0{,}03$ мм. Определить плотность тока при электролизе. Электрохимический эквивалент никеля $k = 3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл. Плотность никеля $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

873. Последовательно с электролитической ванной включен амперметр. Амперметр показывает ток $I_0 = 1{,}5$ А. Какую поправку надо внести в показание амперметра, если за время $t = 10$ мин на катоде отложилось $m = 0{,}316$ г меди? Электрохимический эквивалент меди $k = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

874. Желая проверить правильность показаний вольтметра, его подключили параллельно известному сопротивлению $R = 30$ Ом. Последовательно в общую цепь включен прибор, в котором ведется электролиз серебра. За время $t = 5$ мин в этом приборе выделилась масса $m = 55{,}6$ мг серебра. Вольтметр показывал $U = 6$ В. Найти разность между показаниями вольтметра и точным значением падения напряжения на сопротивлении R, определенным с помощью электролиза серебра. Электрохимический эквивалент серебра $k = 1{,}118 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл. Ответвлением тока в вольтметр можно пренебречь.

875. Для серебрения ложек ток $I = 1{,}8$ А пропускается через раствор соли серебра в течение $t = 5$ ч. Катодом служат $N = 12$ ложек, каждая из которых имеет поверхность $S = 50$ см^2. Какой толщины отложится слой серебра на ложках? Плотность серебра $\rho = 10{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, атомная масса серебра $A = 0{,}108$ кг/моль, его валентность $n = 1$. Число Фарадея $F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль.

876. Две электролитические ванны включены последовательно. В первой ванне находится раствор хлористого железа ($FeCl_2$), а во

второй — раствор хлорного железа ($FeCl_3$). Определить массы выделившегося железа на анодах и хлора на катодах в каждой ванне при прохождении $q = 9{,}65 \cdot 10^7$ Кл электричества. Атомная масса железа $A_1 = 0{,}05585$ кг/моль, атомная масса хлора $A_2 = 35{,}357 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Число Фарадея $F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль.

877. При электролизе раствора серной кислоты расходуется мощность $N = 37$ Вт. Определить сопротивление электролита, если за время $t = 50$ мин выделяется $m = 0{,}3$ г водорода. Число Фарадея $F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль.

878. При электролитическом способе получения никеля расходуется $W = 10$ кВт·ч электроэнергии на килограмм. Электрохимический эквивалент никеля 1080 мг на ампер-час. При каком напряжении производится электролиз?

879. Определить количество выделившейся меди при электролизе, если затрачено $W = 5$ кВт·ч энергии. Напряжение на клеммах ванны $U = 10$ В. К. п. д. установки $\eta = 75\%$. Электрохимический эквивалент меди $k = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

880. Какое количество электричества проходит через раствор $CuSO_4$ за время $t = 10$ с, если величина тока за это время равномерно возрастает от $I_1 = 0$ до $I_2 = 4$ А? Какое количество меди выделяется при этом на катоде? Электрохимический эквивалент меди $k = 0{,}328 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл.

881. При рафинировании меди с помощью электролиза к последовательно включенным электролитическим ваннам, имеющим общее сопротивление $R = 0{,}5$ Ом, подведено напряжение $U = 10$ В. Определить количество чистой меди, выделившейся на катодах ванны за $t = 10$ ч. Э. д. с. поляризации $\mathscr{E} = 6$ В. Электрохимический эквивалент меди $k = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

882. При электролизе воды через ванну в течение времени $t = 25$ мин шел ток $I = 20$ А. Какова температура выделившегося кислорода, если он находится в объеме $V = 1$ л под давлением $p = 2$ атм? Электрохимический эквивалент кислорода $k = 8{,}29 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}317$ Дж/(моль·К).

883. При электролитическом способе получения алюминия расходуется электроэнергии $W = 50$ кВт·ч на килограмм. Электролиз проводится при напряжении $U = 16{,}2$ В. Каким будет расход энергии W_1 на килограмм, если электролиз проводить при напряжении $U_1 = 8{,}1$ В? Э. д. с. поляризации не учитывать.

§ 23. Магнитное поле тока и электромагнитная индукция

Вокруг проводников с током и постоянных магнитов образуется магнитное поле. При помещении в магнитное поле проводника с током на отрезок этого проводника действует сила, величина которой пропорциональна длине этого отрезка, току в нем, а также зависит от ориентации этого отрезка в пространстве.

Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции $\boldsymbol{B}$. Вектор магнитной индукции направлен вдоль отрезка проводника с током, когда этот отрезок ориентирован так, что на него со стороны магнитного поля не действует сила. Величина вектора магнитной индукции

$$B = \frac{F_0}{Il},$$

где l — длина отрезка проводника, I — ток, текущий в нем, а F_0 — максимальная сила, действующая на этот отрезок проводника в магнитном поле (когда этот отрезок перпендикулярен к направлению вектора $\boldsymbol{B}$).

В системе единиц СИ, когда сила измеряется в ньютонах, ток в амперах, а длина в метрах, единицей магнитной индукции является тесла (Т). В системе единиц СГСМ, когда сила измеряется в динах, длина в сантиметрах, а ток в единицах СГСМ (1 ед. тока СГСМ = 10 А), единицей магнитной индукции служит гаусс (Гс); 1 Гс = 10^{-4} Т.

Если в некоторой области пространства известен вектор магнитной индукции, то на помещенный в этой области отрезок проводника длиной l, по которому течет ток I, действует со стороны магнитного поля сила

$$F = IBl \sin \alpha,$$

где α — угол между направлением вектора магнитной индукции и отрезком проводника. Направление этой силы определяется правилом левой руки. Заметим также, что это правило может служить и для определения направления вектора $\boldsymbol{B}$, если известно направление силы, действующей на отрезок проводника с током, и направление тока.

Вспомогательной величиной, характеризующей магнитное поле токов, является вектор напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Величина и направление вектора напряженности магнитного поля в данной точке пространства могут быть найдены, если известны форма, размеры и расположение контура, по которому течет ток, создающий магнитное поле, и величина этого тока. В частности, напряженность магнитного поля, создаваемого очень длинным прямолинейным проводником, по которому течет ток I, в точках, лежащих на расстояниях r от проводника, в системе СИ

$$H = \frac{I}{2\pi r} \tag{16}$$

и в системе единиц СГСМ

$$H = \frac{2I}{r}. \tag{17}$$

В этом случае силовые линии магнитного поля (линии, направление касательной к которым в любой точке совпадает с направлением

вектора напряженности в этой точке) представляют собой окружности с центрами на проводнике, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к проводнику.

В системе единиц СИ единицей напряженности магнитного поля является ампер/метр, а в системе единиц СГСМ — эрстед (Э). Из формул (16) и (17) следует, что

$$1\ \text{А/м} = 4\pi \cdot 10^{-3}\ \text{Э} = 1{,}256 \cdot 10^{-2}\ \text{Э}.$$

Если известна напряженность магнитного поля H, то магнитную индукцию B можно найти по формулам: в системе единиц СИ

$$B = \mu\mu_0 H$$

и в системе единиц СГСМ

$$B = \mu H. \qquad (18)$$

Здесь μ — относительная магнитная проницаемость вещества — безразмерная характеристика магнитных свойств вещества, обычно берется из таблиц. Для вакуума $\mu = 1$; для всех веществ, кроме ферромагнетиков (железа, никеля, кобальта и некоторых сплавов), μ очень мало отличается от единицы. Для ферромагнетиков μ сильно зависит от величины H и может достигать десятков тысяч.

Величина

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{генри/метр} = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \text{Г/м} = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \text{В} \cdot \text{с/А} \cdot \text{м}$$

— магнитная постоянная.

Из формулы (18) следует, что в системе единиц СГСМ единицы напряженности и индукции — эрстед и гаусс — равны по величине и имеют одинаковые размерности. Поэтому в этой системе единиц численные значения H и B в отсутствие ферромагнетиков совпадают. В системе единиц СИ величины H и B имеют разные размерности и их численные значения различны.

Потоком магнитной индукции (магнитным потоком) через некоторую поверхность с площадью S называется величина

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

где α — угол между вектором $\boldsymbol{B}$ и перпендикуляром к поверхности. При этом подразумевается, что величина $B\cos\alpha$ во всех точках поверхности одна и та же. При поверхностях сложной формы, как, например, поверхность, ограниченная витками катушки, следует найти потоки через отдельные участки поверхности (через поверхности, ограниченные отдельными витками), а затем сложить эти потоки.

В системе единиц СИ магнитный поток измеряется в веберах (1 Вб = 1 В·с = 1 Т·м²), а в системе единиц СГСМ — в максвеллах (1 Мкс = 1 Гс·см² = 10^{-8} Вб).

Если магнитное поле вызвано током I, протекающим по какому-либо контуру, то магнитный поток через поверхность, ограниченную этим контуром, пропорционален току, т. е.

$$\Phi = LI,$$

где L — индуктивность (коэффициент самоиндукции) контура, которая зависит от геометрических свойств (формы и размеров) контура и магнитных свойств (магнитной проницаемости) окружающей среды. В системе единиц СИ индуктивность измеряется в генри (Г), а в системе единиц СГСМ — в сантиметрах (1 см = 10^{-9} Г).

При изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную некоторым контуром, в этом контуре возникает электродвижущая сила $\mathscr{E}$ электромагнитной индукции, равная скорости изменения магнитного потока:

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \qquad (19)$$

Здесь $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока, Δt — промежуток времени, в течение которого произошло это изменение. Знак минус в формуле (19) отражает правило Ленца, согласно которому возникшая в контуре э. д. с. вызывает ток такого направления, что магнитное поле этого тока препятствует изменению магнитного потока. В большинстве случаев при численных расчетах этот знак может быть опущен.

Формула для э. д. с. электромагнитной индукции в виде (19) употребляется в системе единиц СИ. В этом случае величина э. д. с. получается в вольтах. Так как единица потенциала СГСМ обычно не употребляется, то при измерении магнитного потока в максвеллах, чтобы получить э. д. с. в вольтах, следует закон электромагнитной индукции применять в виде

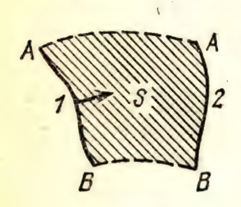


Рис. 139

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\cdot 10^{-8}. \qquad (20)$$

При движении в магнитном поле незамкнутого проводника в этом проводнике возникает э. д. с., величина которой может быть найдена по формулам (19) и (20), если считать, что $\Delta\Phi$ — величина потока через площадь, «заметенную» проводником за время Δt (на рис. 139 площадь S, «заметенная» проводником AB при его перемещении из положения *1* в положение *2*, заштрихована). В этом случае тока в проводнике не возникает, но между концами проводника появляется разность потенциалов, равная э. д. с.

Если магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром, меняется вследствие изменения тока, протекающего по этому контуру, то в контуре возникает э. д. с., которую называют э. д. с. самоиндукции. При постоянном коэффициенте самоиндукции L (т. е. при неизменных магнитной проницаемости среды, размерах и форме контура) э. д. с. самоиндукции

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

где ΔI — изменение тока за время Δt.

---

884. Магнитная индукция однородного магнитного поля $B = 2$ Т. Определить напряженность магнитного поля в системах СГСМ и СИ. Магнитная проницаемость среды $\mu = 1$.

885. Внутри достаточно длинного соленоида создается однородное магнитное поле с напряженностью $H = In/l$, где I — ток в амперах, l — длина соленоида в метрах, n — число витков. Определить величину магнитной индукции в железном сердечнике соленоида, если длина соленоида $l = 50$ см, число витков $n = 500$, ток $I = 10$ А, магнитная проницаемость железа $\mu = 5000$. Формула для H дана в системе единиц СИ.

886. Определить магнитную проницаемость среды (технически чистого железа), если известно, что магнитное поле в железе характеризуется значениями напряженности $H = 800$ А/м и магнитной индукции $B = 5$ Т. Магнитная постоянная $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Г/м.

887. Часть проводника длиной $l = 1$ см находится в однородном магнитном поле напряженностью $H = 100$ Э. Какая сила действует на проводник, если по нему идет ток $I = 1$ А? Проводник расположен в вакууме перпендикулярно к направлению силовых линий магнитного поля.

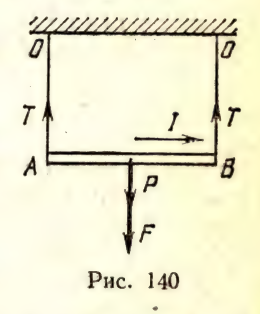


Рис. 140

888. Прямой проводник AB (рис. 140) длиной $l = 20$ см и весом $P = 5$ гс подвешен горизонтально на двух легких нитях OA и OB в однородном магнитном поле, вектор напряженности которого имеет горизонтальное направление и перпендикулярен к проводнику. Какой величины ток надо пропустить через проводник, чтобы одна из нитей разорвалась? Напряженность магнитного поля $H = 490$ Э. Каждая нить разрывается при нагрузке, превышающей $p = 4$ гс.

889. На прямой проводник длиной $l = 0{,}5$ м, расположенный перпендикулярно к магнитному полю с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-2}$ Т, действует сила $F = 0{,}15$ Н. Найти величину тока, протекающего в проводнике. Расчеты произвести в системах единиц СГСМ и СИ.

890. Между полюсами магнита на двух тонких нитях подвешен горизонтально линейный проводник весом $P = 0{,}1$ Н и длиной $l = 0{,}2$ м. Напряженность однородного магнитного поля $H = 2 \cdot 10^5$ А/м и направлена вертикально. Весь проводник находится в магнитном поле. На какой угол α от вертикали отклонятся нити, поддерживающие проводник, если по нему пропустить ток $I = 2$ А? Весом нитей пренебречь.

891. Определить напряженность H и индукцию B магнитного поля прямого тока в точке, находящейся на расстоянии $r = 4$ м от проводника, если величина тока $I = 100$ А. Окружающей средой является воздух ($\mu = 1$).

892. ГОСТ 9867-61 дает такое определение единицы силы тока — ампера: «Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя

по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ единиц силы Международной системы, на каждый метр длины». Исходя из этого определения, вычислить величину магнитной постоянной μ_0.

893. Определить силу взаимодействия, приходящуюся на единицу длины проводов воздушной линии электропередачи, если ток в линии $I = 500$ А, а расстояние между проводами $r = 50$ см.

894. Магнитная индукция однородного магнитного поля $B = 0,5$ Т (Вб/м²). Определить поток магнитной индукции через площадку $S = 25$ см², расположенную перпендикулярно к силовым линиям. Чему будет равен поток индукции, если площадку повернуть на угол $\varphi = 60°$ от первоначального положения?

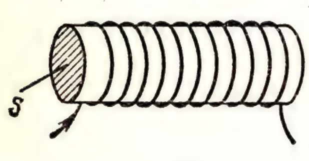


Рис. 141

895. Определить магнитную индукцию и поток магнитной индукции через поперечное сечение никелевого сердечника соленоида (рис. 141), если внутри соленоида напряженность однородного магнитного поля $H = 2,5 \cdot 10^4$ А/м. Площадь поперечного сечения сердечника $S = 20$ см². Магнитная проницаемость никеля $\mu = 200$.

896. Поток магнитной индукции через площадь поперечного сечения катушки, имеющей $n = 1000$ витков, изменился на $\Delta\Phi = 0,002$ Вб в результате изменения тока в катушке с $I_1 = 4$ А до $I_2 = 20$ А. Определить коэффициент самоиндукции L катушки.

897. Виток, площадь которого $S = 2$ см², расположен перпендикулярно к силовым линиям магнитного однородного поля. Чему равна индуцированная в витке э. д. с., если за время $\Delta t = 0,05$ с магнитная индукция равномерно убывает с $B_1 = 0,5$ Т до $B_2 = 0,1$ Т?

898. Какой магнитный поток пронизывал каждый виток катушки, имеющей $n = 1000$ витков, если при равномерном исчезновении магнитного поля в течение промежутка времени $\Delta t = 0,1$ с в катушке индуцируется э. д. с. $\mathscr{E} = 10$ В?

899. Рамка, имеющая форму равностороннего треугольника, помещена в однородное магнитное поле с напряженностью $H = 6,4 \cdot 10^4$ А/м. Перпендикуляр к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = 30°$. Определить длину стороны рамки a, если известно, что среднее значение э. д. с. индукции, возникающей в рамке при выключении поля в течение времени $\Delta t = 0,03$ с, равно $\mathscr{E} = 10$ мВ.

900. Квадратная рамка помещена в однородное магнитное поле. Нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = 60°$. Сторона рамки $l = 10$ см. Определить напряженность H магнитного поля, если известно, что среднее значение

э. д. с. индукции, возникающей в рамке при выключении поля в течение времени $\Delta t = 0{,}01$ с, равно $\mathscr{E} = 50$ мВ.

901. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью $S = 10$ см², расположенный перпендикулярно к силовым линиям. Какой ток I потечет по витку, если поле будет убывать с постоянной скоростью 100 Э в секунду? Сопротивление витка $R = 1$ Ом.

902. В однородном магнитном поле, напряженность которого $H = 8 \cdot 10^4$ А/м, находится плоский виток площадью $S = 10^{-3}$ м². Виток расположен перпендикулярно к силовым линиям. Сопротивление витка $R = 1$ Ом. Какой заряд протечет по витку, если поле исчезнет? Магнитное поле убывает с постоянной скоростью.

903. Чему равен коэффициент самоиндукции катушки с железным сердечником, если за время $\Delta t = 0{,}5$ с ток в цепи изменился с $I_1 = 10$ А до $I_2 = 5$ А, а наведенная при этом э. д. с. на концах катушки $\mathscr{E} = 25$ В?

904. В однородном магнитном поле перпендикулярно к направлению вектора индукции, величина которого $B = 0{,}1$ Т, движется провод длиной $l = 2$ м со скоростью $v = 5$ м/с, перпендикулярной к проводнику. Какая э. д. с. наводится в проводнике?

905. Скорость самолета равна $v = 900$ км/ч. Найти разность потенциалов, возникающую между концами крыльев самолета, если вертикальная составляющая земного магнитного поля $H_0 = 0{,}5$ Э и размах крыльев самолета $l = 12$ м. Самолет летит горизонтально.

906. С какой скоростью должен двигаться проводник длиной $l = 10$ см перпендикулярно к силовым линиям однородного магнитного поля, напряженность которого $H = 2000$ Э, чтобы между концами проводника возникла разность потенциалов $U = 0{,}01$ В? Направление скорости проводника с направлением самого проводника составляет угол $\alpha = 30°$. Силовые линии все время перпендикулярны к проводнику.

907. Какой ток идет через гальванометр, присоединенный к железнодорожным рельсам, когда к нему со скоростью $v = 60$ км/ч приближается поезд? Вертикальная составляющая магнитного поля Земли $H_0 = 0{,}5$ Э. Сопротивление гальванометра $R = 100$ Ом. Расстояние между рельсами $l = 1{,}2$ м. Рельсы считать изолированными друг от друга и от земли.

908. В однородном магнитном поле $H = 100$ Э находится квадратная рамка со стороной $l = 2$ см. Плоскость рамки перпендикулярна к направлению силовых линий. Сопротивление рамки $R = 1$ Ом. Какой ток пойдет по рамке, если ее выдвигать из магнитного поля с постоянной скоростью $v = 1$ см/с перпендикулярно к направлению силовых линий? Поле имеет резко очерченные границы, и две стороны рамки параллельны этой границе.

909. Плоская проволочная рамка, состоящая из одного витка, имеющего сопротивление $R = 10^{-3}$ Ом и площадь $S = 1$ см², пронизывается однородным магнитным полем. Направление силовых

линий поля перпендикулярно к плоскости рамки. Индукция магнитного поля изменяется с течением времени равномерно на величину $\Delta B = 0{,}01$ Вб/м² за время $\Delta t = 1$ с. Какое количество тепла q выделяется в рамке за это время? Зависимостью сопротивления рамки от температуры можно пренебречь.

910. В однородном магнитном поле с индукцией B помещен проводник в виде прямоугольной рамки, одна из сторон которой подвижна и имеет длину l. Плоскость рамки перпендикулярна к силовым линиям магнитного поля. Подвижную сторону, которая вначале совпадает с противоположной ей неподвижной, начинают двигать равномерно со скоростью v. Определить зависимость силы тока I в рамке от времени. Сопротивление единицы длины проводника ρ.

911. Два параллельных замкнутых на одном конце провода, расстояние между которыми $l = 50$ см, находятся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Т. Плоскость, в которой расположены провода, перпендикулярна к направлению поля. На провода положен металлический мостик, который может скользить по проводам без трения. Мостик под действием силы $F = 10^{-4}$ Н движется с постоянной скоростью $v = 10$ м/с. Найти сопротивление R мостика, считая сопротивление проводов ничтожным.

912. Рамка, имеющая $n = 1000$ витков площадью $S = 5$ см², замкнута на гальванометр с сопротивлением $R = 10$ кОм. Рамка находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 100$ Гс, причем линии поля перпендикулярны к ее плоскости. Какой заряд q протечет по цепи гальванометра, если направление магнитного поля изменилось на обратное? Можно считать, что индукция магнитного поля с течением времени изменялась равномерно.

913. В однородном магнитном поле с индукцией B расположена замкнутая катушка диаметром d с числом витков n. Плоскость катушки перпендикулярна к линиям поля. Какой заряд q пройдет по цепи катушки, если ее повернуть на 180°? Проволока, из которой намотана катушка, имеет площадь сечения S и удельное сопротивление ρ.

914. В цепь включены последовательно батарея с э. д. с. $\mathscr{E} = 1{,}2$ В, сопротивление $R = 1$ Ом и индуктивность $L = 1$ Г. В цепи протекал постоянный ток I_0. Начиная с некоторого момента, сопротивление начинают менять так, чтобы ток уменьшался с постоянной скоростью $\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0{,}2$ А/с. Каково сопротивление R_t цепи спустя время $t = 2$ с после начала изменения тока? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

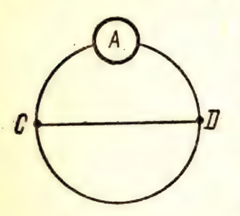


Рис. 142

915. Какую силу тока I покажет амперметр в изображенной на рис. 142 схеме, если индукция перпендикулярного к плоскости чертежа однородного магнитного поля меняется с течением времени по закону $B = kt$? Точки C

и D лежат на концах одного из диаметров проволочного кольца. Диаметр кольца d; проволока, из которой изготовлены проводники, имеет сопротивление единицы длины ρ. Сопротивлением амперметра пренебречь.

916. Квадратная рамка с током $I = 0{,}1$ А помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 100$ Гс так, что две стороны рамки перпендикулярны к направлению силовых линий, а нормаль к плоскости рамки образует с направлением силовых линий угол $\alpha = 30°$. Длина стороны рамки $l = 1$ см. Найти момент сил M, действующий на рамку.

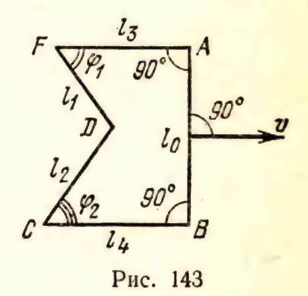


Рис. 143

917. В однородном вертикальном магнитном поле с постоянной скоростью v движется в горизонтальном направлении плоская пятиугольная рамка $ABCDF$, плоскость которой все время перпендикулярна к направлению магнитного поля. Форма рамки изображена на рис. 143. Направление скорости рамки перпендикулярно к стороне AB. Магнитная индукция поля B. Найти э. д. с. индукции и ток в рамке.

918. С какой угловой скоростью надо вращать прямой проводник вокруг одного из его концов в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной к силовым линиям поля, чтобы в проводнике возникла э. д. с., равная $\mathscr{E} = 0{,}3$ В? Длина проводника $r = 20$ см. Напряженность магнитного поля $H = 2000$ Э.

§ 24. Переменный ток

Частота колебаний f, период T и круговая частота ω переменного тока связаны соотношениями

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

В случае так называемых синусоидальных переменных токов при мгновенных значениях электродвижущей силы в контуре

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

или напряжения на концах участка цепи

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{21}$$

мгновенные значения тока в этом контуре (на этом участке цепи)

$$I = I_0 \sin \omega t. \tag{22}$$

Здесь $\mathscr{E}_0$, U_0 и I_0 — амплитудные (наибольшие) значения э. д. с., напряжения и тока, φ — начальная фаза э. д. с. (или напряжения). Начальная фаза тока принята равной нулю.

При последовательном включении в цепь переменного тока проводника с активным (омическим) сопротивлением R, катушки с индуктивным сопротивлением $X_L = \omega L$ и конденсатора с емкостным сопротивлением $X_C = \frac{1}{\omega C}$ (рис. 144) полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (23)$$

Между амплитудными значениями тока в этой цепи и напряжением на ее концах существует связь, аналогичная закону Ома:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}.$$

В этом случае сдвиг фаз между напряжением и током [этот сдвиг фаз равен начальной фазе напряжения, если мгновенные значения тока и напряжения определяются формулами (21) и (22)] можно найти из выражения

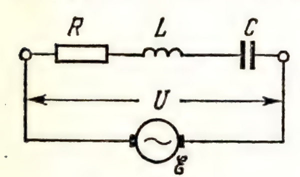


Рис. 144

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (24)$$

Если в цепи отсутствуют активное сопротивление R или индуктивность L, то в формулах (23) и (24) их следует положить равными нулю. При отсутствии же конденсатора емкость C цепи следует считать бесконечно большой.

Амплитудные значения тока, напряжения и э. д. с. связаны с их эффективными значениями соотношениями:

$$I_э = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_э = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad \mathscr{E}_э = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{2}}.$$

Если мгновенные значения напряжения и тока на участке цепи определяются формулами (21) и (22), то средняя мощность, выделяемая на этом участке,

$$N = \frac{I_0 U_0}{2}\cos\varphi = I_э U_э \cos\varphi,$$

где $\cos\varphi$ — коэффициент мощности.

При прохождении по проводнику с активным сопротивлением R переменного тока в течение времени t выделяется количество теплоты

$$Q = I_э^2 R t.$$

На индуктивном и емкостном сопротивлениях теплота не выделяется.

При преобразовании переменного тока с помощью трансформатора, в котором можно пренебречь рассеянием магнитного потока и током в первичной обмотке при разомкнутой вторичной (током

холостого хода), токи I_1 и I_2 в обмотках обратно пропорциональны числам w_1 и w_2 витков обмоток:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{w_2}{w_1} = k.$$

Величина k носит название коэффициента трансформации.

Электродвижущие силы $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, наводимые в обмотках меняющимся магнитным потоком, прямо пропорциональны числам витков:

$$\frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Трансформатор, активное сопротивление обмоток которого мало по сравнению с индуктивным сопротивлением, имеет коэффициент полезного действия, близкий к единице. Для такого трансформатора $I_1\mathscr{E}_1 = I_2\mathscr{E}_2$, т. е. мощность тока во вторичной цепи равна мощности тока в первичной цепи.

---

919. Прямоугольная рамка вращается в горизонтальном однородном магнитном поле со скоростью $n = 50$ об/с (рис. 145). Площадь рамки $S = 100$ см². Магнитная индукция $B = 0{,}2$ Т. Определить закон изменения магнитного потока через рамку в зависимости от времени t, если в начальный момент времени рамка расположена горизонтально. Решить ту же задачу, если в начальный момент времени плоскость рамки составляет с горизонтальным направлением угол $\varphi = 30°$.

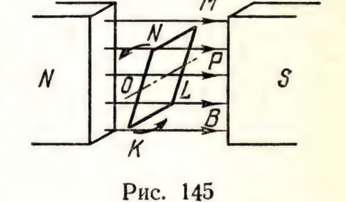


Рис. 145

920. Найти амплитуду $\mathscr{E}_0$ э. д. с., наводимой во вращающейся в однородном магнитном поле рамке при условиях, данных в задаче 919. Как изменится амплитуда э. д. с., если число оборотов рамки в единицу времени увеличится в три раза?

921. Определить максимальный поток магнитной индукции через прямоугольную рамку, которая вращается в однородном магнитном поле со скоростью $n = 10$ об/с (рис. 145). Амплитуда наводимой в рамке э. д. с. $\mathscr{E}_0 = 3$ В.

922. Определить число оборотов в единицу времени прямоугольной рамки, вращающейся в однородном магнитном поле, магнитная индукция которого $B = 0{,}5$ Т, если амплитуда наведенной в рамке э. д. с. $\mathscr{E}_0 = 10$ В (рис. 145). Площадь рамки $S = 200$ см², число витков рамки $n = 20$.

923. Напряжение на концах участка цепи, по которому течет переменный ток, изменяется с течением времени по закону

$$U = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

В момент времени $t = T/12$ мгновенное напряжение $U = 10$ В. Определить амплитуду напряжения U_0, круговую частоту ω и частоту f, если период колебаний $T = 0{,}01$ с. Начертить график изменения напряжения в зависимости от времени.

924. Найти индуктивность катушки, если амплитуда переменного напряжения на ее концах $U_0 = 160$ В, амплитуда тока в ней $I_0 = 10$ А и частота тока $f = 50$ Гц. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

925. Индуктивное сопротивление катушки $X_L = 500$ Ом, эффективное напряжение сети, в которую включена катушка, $U_э = 100$ В, частота тока $f = 1000$ Гц. Определить амплитуду тока в цепи и индуктивность катушки. Активным сопротивлением катушки и подводящих проводов пренебречь.

926. Определить угол φ сдвига фаз между напряжением $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ и током $I = I_0 \sin \omega t$ для электрической цепи, состоящей из последовательно включенных активного сопротивления $R = 1$ кОм, катушки с индуктивностью $L = 0{,}5$ Г и конденсатора с емкостью $C = 1$ мкФ. Определить мощность, выделяемую в цепи, если амплитуда напряжения $U_0 = 100$ В, а частота тока $f = 50$ Гц.

927. Последовательно с активным сопротивлением $R = 1$ кОм включена катушка с индуктивностью $L = 0{,}5$ Г и конденсатор с емкостью $C = 1$ мкФ. Определить индуктивное сопротивление X_L, емкостное сопротивление X_C и полное сопротивление цепи Z переменному току при частотах $f_1 = 50$ Гц и $f_2 = 10$ кГц.

928. К зажимам генератора присоединен конденсатор с емкостью $C = 0{,}1$ мкФ. Определить амплитуду напряжения на зажимах, если амплитуда тока $I_0 = 2{,}2$ А, а период тока $T = 1/5000$ с.

929. К городской сети переменного тока с напряжением $U_э = 127$ В присоединена цепь, состоящая из последовательно включенных активного сопротивления $R = 100$ Ом и конденсатора с емкостью $C = 40$ мкФ. Определить амплитуду тока в цепи.

930. В сеть переменного тока с напряжением $U_э = 120$ В последовательно включены проводник с активным сопротивлением $R = 15$ Ом и катушка с индуктивностью $L = 50$ мГ. Найти частоту f тока, если амплитуда тока в цепи $I_0 = 7$ А.

931. Определить полное реактивное сопротивление электрической цепи, состоящей из включенных последовательно конденсатора с емкостью $C = 0{,}1$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 0{,}5$ Г при частоте тока $f = 1000$ Гц. При какой частоте f_0 полное реактивное сопротивление равно нулю?

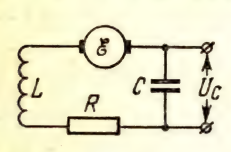


Рис. 146

932. В колебательный контур (рис. 146) включена переменная э. д. с. $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$, где $\mathscr{E}_0 = 2$ В. При резонансе амплитуда напряжения на отдельных элементах контура (например, на конденсаторе) значительно увеличивается.

Определить резонансную амплитуду напряжения на конденсаторе, если известно, что она больше амплитуды э. д. с. в число раз, равное отношению индуктивного сопротивления X_L (или емкостного сопротивления X_C) при резонансе к активному сопротивлению. Резонансная частота контура $f_0 = 10^5$ Гц, индуктивность катушки $L = 1$ мГ и активное сопротивление контура $R = 3$ Ом.

933. Соленоид с железным сердечником (дроссель), имеющий индуктивность $L = 2$ Г и активное сопротивление обмотки $R = 10$ Ом, включен сначала в сеть постоянного тока с напряжением $U = 20$ В, а затем в сеть переменного тока с эффективным напряжением $U_э = 20$ В и частотой $f = 400$ Гц. Определить ток, текущий через соленоид в первом и во втором случаях.

934. Определить $\cos\varphi$ (коэффициент мощности) электрической цепи, если генератор отдает в цепь мощность $N = 8$ кВт, амплитуда тока в цепи $I_0 = 100$ А и амплитуда напряжения на зажимах генератора $U_0 = 200$ В.

935. От генератора переменного тока питается электропечь с сопротивлением $R = 22$ Ом. Определить количество теплоты Q, выделяемой печью за время $t = 1$ ч, если амплитуда тока $I_0 = 10$ А.

936. Кипятильник работает от сети переменного тока с напряжением $U = 100$ В. При температуре $t = 20$°С сопротивление фехралевой спирали $R = 25$ Ом. Температурный коэффициент сопротивления фехраля $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ К$^{-1}$. Какое количество кипящей воды превращается кипятильником в пар за время $\tau = 1$ мин? Удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26 \times 10^6$ Дж/кг.

937. Неоновая лампа с симметричными электродами включена в сеть переменного тока с напряжением $U = 71$ В и периодом $T = 1/50$ с. Определить промежуток времени Δt, в течение которого длится вспышка лампы, и число n вспышек в единицу времени. Напряжение зажигания лампы $U_з = 86{,}7$ В можно считать равным напряжению гашения $U_г$.

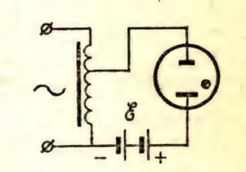


Рис. 147

938. Найти частоту вспышек лампы с симметричными электродами, включенной в сеть переменного тока по схеме, изображенной на рис. 147. Э. д. с. батареи $\mathscr{E} = 60$ В, переменное напряжение, снимаемое с автотрансформатора, $U = 28{,}3$ В. Напряжение зажигания лампы $U_з = 86{,}7$ В. Частота переменного тока $f = 200$ Гц.

939. Ток в первичной обмотке трансформатора $I_1 = 0{,}5$ А, напряжение на ее концах $U_1 = 220$ В. Ток во вторичной обмотке $I_2 = 11$ А, напряжение на ее концах $U_2 = 9{,}5$ В. Определить коэффициент полезного действия трансформатора.

940. Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 8$ включена в сеть с напряжением $U_1 = 220$ В. Сопротивление вторичной обмотки $r = 2$ Ом, ток во вторичной обмотке трансформатора $I = 3$ А. Определить

напряжение U_2 на зажимах вторичной обмотки. Потерями в первичной обмотке пренебречь.

941. Первичная обмотка силового трансформатора для питания накала радиоприемника имеет $n_1 = 12\,000$ витков и включена в цепь с напряжением $U_1 = 120$ В. Какое количество витков n_2 должна иметь вторичная обмотка, если ее сопротивление $r = 0{,}5$ Ом, а напряжение накала $U_2 = 3{,}5$ В при силе тока $I = 1$ А?

942. Первичная обмотка понижающего трансформатора включена в сеть с напряжением $U_1 = 220$ В. Напряжение на зажимах вторичной обмотки $U_2 = 20$ В, ее сопротивление $r = 1$ Ом, ток во вторичной цепи $I = 2$ А. Определить коэффициент трансформации k и коэффициент полезного действия η трансформатора. Потерями в первичной катушке пренебречь.

943. Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 10$ включена в сеть с напряжением $U_1 = 120$ В. Сопротивление вторичной обмотки $r = 1{,}2$ Ом, ток во вторичной цепи $I = 5$ А. Определить величину сопротивления R нагрузки трансформатора и напряжение U_2 на зажимах вторичной обмотки.

Потерями в первичной цепи пренебречь.

944. Определить амплитуду и фазу напряжения в сети, питаемой двумя последовательно включенными генераторами, напряжения на зажимах которых $U_1 = U_{10} \sin \omega t$ и $U_2 = U_{20} \sin (\omega t + \varphi_0)$. Амплитуды напряжения генераторов $U_{10} = 60$ В и $U_{20} = 100$ В, частота $f = 50$ Гц. Начальная фаза напряжения второго генератора $\varphi_0 = 30°$.

§ 25. Электромагнитные колебания и волны

Период T собственных электрических колебаний контура, состоящего из катушки с индуктивностью L и конденсатора с емкостью C, если активным сопротивлением R контура можно пренебречь по сравнению с индуктивным (при резонансной частоте), определяется выражением (формула Томсона)

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Здесь T получается в секундах, если L измерено в генри, а C — в фарадах. Частота колебаний контура

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}.$$

Длина электромагнитной волны в пустоте

$$\lambda = c_0 T = \frac{c_0}{f},$$

где T — период электромагнитных колебаний, f — их частота и

$c_0 = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения электромагнитной волны в пустоте (скорость света в пустоте).

В радиотехнике приходится иметь дело с колебаниями очень большой частоты. В этих случаях для измерения частоты пользуются единицами: 1 кГц (килогерц) $= 10^3$ Гц, 1 МГц (мегагерц) $= 10^6$ Гц и 1 ГГц (гигагерц) $= 10^9$ Гц.

---

945. После того как конденсатору колебательного контура был сообщен заряд $q = 10^{-6}$ Кл, в контуре происходят затухающие электрические колебания. Какое количество теплоты выделится в контуре к тому времени, когда колебания полностью затухнут? Емкость конденсатора $C = 0{,}01$ мкФ.

946. На конденсаторе, включенном в колебательный контур, эффективное напряжение $U_э = 100$ В. Емкость конденсатора $C = 10$ пФ. Определить максимальные значения электрической и магнитной энергии в контуре.

947. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 0{,}003$ Г и плоского конденсатора, состоящего из двух пластинок в виде дисков радиуса $r = 1{,}2$ см, расположенных на расстоянии $d = 0{,}3$ мм друг от друга. Определить период T собственных колебаний контура. Каков будет период T_1 колебаний, если конденсатор заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$?

948. Для предотвращения короткого замыкания в колебательном контуре генератора (вследствие случайного касания пластин переменного конденсатора друг с другом) последовательно с этим конденсатором включается постоянный конденсатор, емкость которого намного больше емкости переменного конденсатора. Наибольшей емкости переменного конденсатора C_1 до включения постоянного конденсатора соответствовала частота колебаний f_1. Во сколько раз изменится частота контура после включения постоянного конденсатора, если емкость этого конденсатора $C_2 = nC_1$, где $n = 50$?

949. Резонанс в колебательном контуре с конденсатором емкости $C_1 = 10^{-6}$ Ф наступает при частоте колебаний $f_1 = 400$ Гц. Когда параллельно конденсатору C_1 подключается другой конденсатор C_2, резонансная частота становится равной $f_2 = 100$ Гц. Определить емкость C_2. Сопротивлением контура пренебречь.

950. В каких пределах должна изменяться индуктивность катушки колебательного контура, чтобы в контуре происходили колебания с частотой от $f_1 = 400$ Гц до $f_2 = 500$ Гц? Величина емкости конденсатора $C = 10$ мкФ.

951. Радиоприемник можно настраивать на прием радиоволн различной длины: от $\lambda_1 = 25$ м до $\lambda_2 = 200$ м. В какую сторону и во сколько раз нужно изменить расстояние между пластинами плоского конденсатора, включенного в колебательный контур приемника, при переходе к приему более длинных волн?

952. Каков диапазон частот радиоволн миллиметрового диапазона (1—10 мм)?

953. Определить длину волны рентгеновских лучей, если их частота $f = 3 \cdot 10^9$ ГГц.

954. Определить диапазон длин волн генератора стандартных сигналов, генерирующего электрические колебания синусоидальной формы, заданной амплитуды и частоты, если он рассчитан на диапазон частот от $f_1 = 100$ кГц до $f_2 = 26$ МГц.

955. Показать, что формула для длины волны $\lambda = c_0 T$, излучаемой контуром, где T — период колебаний, определяемый по формуле Томсона, преобразуется в формулу $\lambda = 2\pi\sqrt{LC}$, где λ выражена в сантиметрах, если индуктивность контура выражена в системе единиц СГСМ, а емкость C — в системе единиц СГСЭ, т. е. и L и C выражены в сантиметрах. Скорость распространения электромагнитных волн $c_0 = 3 \cdot 10^8$ м/с.

956. Какой длины волны электромагнитные колебания будет принимать радиоприемник, контур которого имеет конденсатор с емкостью $C = 750$ см и катушку с индуктивностью $L = 1{,}2 \times 10^6$ см?

957. Колебательный контур имеет собственную частоту $f_0 = 30$ кГц. Какой будет его собственная частота f, если расстояние между пластинами плоского конденсатора контура увеличить в $n = 1{,}44$ раза?

958. При изменении тока в катушке индуктивности на величину $\Delta I = 1$ А за время $\Delta t = 0{,}6$ с в ней возникает э. д. с., равная $\mathcal{E} = 0{,}2$ мВ. Какую длину λ будет иметь радиоволна, излучаемая генератором, контур которого состоит из этой катушки и конденсатора емкостью $C = 14100$ пФ?

959. Определить частоту f собственных колебаний электрического контура, изображенного на рис. 148, а также круговую частоту ω, период T и длину волны λ, излучаемой контуром. Контур содержит катушку с индуктивностью $L = 10$ мГ, конденсатор с емкостью $C_1 = 880$ пФ и подстроечный конденсатор с емкостью $C_2 = 20$ пФ.

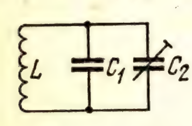


Рис. 148

960. Контур приемника с конденсатором емкостью $C = 20$ пФ настроен на волну $\lambda = 5$ м. Определить индуктивность катушки L контура и частоту колебаний f.

961. На какую длину волны настроен колебательный контур, если он состоит из катушки, индуктивность которой $L = 2 \cdot 10^{-3}$ Г, и плоского конденсатора? Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ см, диэлектрическая проницаемость вещества, заполнившего пространство между пластинами, $\varepsilon = 11$, и площадь пластин $S = 800$ см^2.

962. Определить емкость конденсатора колебательного контура, если известно, что при индуктивности $L = 50$ мкГ контур настроен

в резонанс на электромагнитные колебания с длиной волны $\lambda =$ $= 300$ м.

963. Емкость переменного конденсатора контура приемника изменяется в пределах от C_1 до $C_2 = 9C_1$. Определить диапазон волн контура приемника, если емкости конденсатора C_1 соответствует длина волны $\lambda_1 = 3$ м.

964. Контур радиоприемника настроен на радиостанцию, частота которой $f_1 = 9$ МГц. Как нужно изменить емкость переменного конденсатора колебательного контура приемника, чтобы он был настроен на волну $\lambda_2 = 50$ м? Скорость распространения электромагнитных волн $c_0 = 3 \cdot 10^8$ м/с.

965. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $c = 2 \cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в этой среде, если их частота в пустоте была $f = 1$ МГц?

ГЛАВА IV

ОПТИКА

§ 26. Распространение света. Скорость света. Волновые и квантовые свойства света

В вакууме и в однородной среде свет распространяется прямолинейно. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, в веществе $v = c/n$, где n — абсолютный показатель преломления вещества.

Свет представляет собой поперечные электромагнитные волны. Длина волны λ связана с частотой колебаний f (или ν), периодом T и скоростью v обычными соотношениями: $\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f}$.

Квантовые свойства света проявляются во взаимодействии света с веществом. Порция энергии (квант) света с частотой ν определяется выражением $\varepsilon = h\nu$. Здесь $h \approx 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — универсальная квантовая постоянная (так называемая постоянная Планка).

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта $\varepsilon = P + W_к$ связывает энергию ε падающего на вещество кванта (фотона), работу выхода P электрона из вещества и кинетическую энергию $W_к = \frac{mv^2}{2}$ вылетевшего электрона.

---

966. Человек, рост которого $h = 1{,}7$ м, идет со скоростью $v = 1$ м/с по направлению к уличному фонарю. В некоторый момент длина тени человека была $l_1 = 1{,}8$ м, а через $t = 2$ с длина тени $l_2 = 1{,}3$ м. На какой высоте H висит фонарь?

967. Схема опыта Майкельсона по определению скорости света представлена на рис. 149. Расстояние $AB = l = 35{,}5$ км. С какой частотой f должна вращаться восьмигранная зеркальная призма K, чтобы источник S был виден в трубу T? Расстояние OB мало по сравнению с AB.

968. Алмазная пластинка освещается фиолетовым светом (частота $f = 0{,}75 \cdot 10^{15}$ 1/с). Определить длины волн λ_1 и λ_2 фиолетовых лучей в вакууме и в алмазе, если показатель преломления алмаза для этих лучей $n = 2{,}465$.

969. Найти абсолютный показатель преломления n среды, в которой свет с энергией фотона $\varepsilon = 4{,}4 \cdot 10^{-12}$ эрг имеет длину волны $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$ см. Постоянную Планка считать равной $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ эрг·с.

970. Определить величину кванта энергии ε, соответствующего длине световой волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м. Постоянная Планка $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

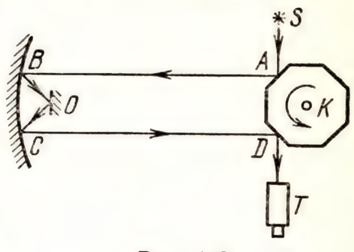


Рис. 149

971. Определить длину волны λ света, которым освещается поверхность металла, если фотоэлектроны имеют кинетическую энергию $W_к = 4{,}5 \cdot 10^{-20}$ Дж, а работа выхода электрона из металла равна $P = 7{,}5 \cdot 10^{-19}$ Дж. Постоянная Планка $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

972. Какова наименьшая частота ν света, при которой еще наблюдается фотоэффект, если работа выхода электрона из металла $P = 3{,}3 \cdot 10^{-19}$ Дж? Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

§ 27. Отражение и преломление света на плоской границе

На границе двух сред наблюдаются явления отражения и преломления света.

При отражении света луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр к отражающей поверхности, восставленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости, и угол отражения равен углу падения.

В случае преломления падающий луч, перпендикуляр, восставленный в точке падения луча к границе раздела двух сред, и преломленный луч лежат в одной плоскости. Угол падения α и угол преломления β связаны равенством $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$, где n_2 — абсолютный показатель преломления второй среды, n_1 — первой. Для воздуха $n \approx 1$.

Если $n_2 < n_1$ (вторая среда оптически менее плотная), то $\alpha < \beta$. Наибольшему значению $\beta = 90°$ соответствует угол падения α_0, определяемый равенством $\sin \alpha_0 = n_2/n_1$. При угле падения $\alpha > \alpha_0$ существует только отраженный луч, преломленный луч отсутствует (явление полного отражения).

---

973. Над центром круглого бассейна радиусом $R = 5$ м, залитого до краев водой, на высоте $H = 3$ м над поверхностью воды висит лампа. На какое расстояние x от края бассейна может отойти человек, рост которого $h = 1{,}8$ м, чтобы все еще видеть отражение лампы в воде?

974. Яркая лампа висит над центром комнаты на высоте $h = 2{,}5$ м от пола. Высота комнаты $H = 4$ м. На полу лежит круглое зеркальце диаметром $d = 5$ см. Какого размера «зайчик» будет от него на

потолке, если зеркальце расположено на расстоянии от центра комнаты: а) $x_1 = 0{,}5$ м и б) $x_2 = 1{,}5$ м?

975. Двугранный угол между двумя плоскими зеркалами был первоначально равен 180°. Его можно изменять, вращая одно из зеркал вокруг оси OO' (рис. 150) с постоянной угловой скоростью $\omega = 1{,}5$ градуса в секунду. Светящаяся точка S расположена на перпендикуляре к неподвижному зеркалу, восставленному из точки A оси на расстоянии $h = 10$ см от нее. Через какое время t расстояние между изображениями точки в зеркалах будет равно $r = 10$ см?

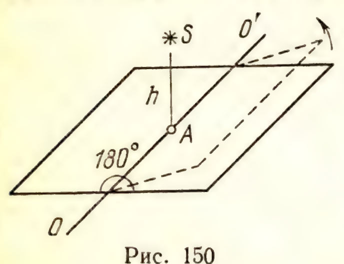


Рис. 150

976. Два плоских зеркала располагаются под углом друг к другу и между ними помещается точечный источник света. Изображение источника в первом зеркале находится на расстоянии $a_1 = 6$ см, а во втором зеркале — на расстоянии $a_2 = 8$ см от источника. Расстояние от одного изображения до другого $b = 10$ см. Узнать угол α между зеркалами.

977. Два малых зеркала расположены на одинаковом расстоянии друг от друга и от источника света. Каков должен быть угол φ между зеркалами, если луч после двух отражений: 1) направляется прямо к источнику; 2) возвращается обратно к источнику по пройденному пути (т. е. испытывает еще одно отражение)?

978. Плоское зеркало поворачивается на угол $\alpha = 27°$. На какой угол β повернется отраженный от зеркала луч?

979. Узкий луч света, проходя через маленькое отверстие в экране (перпендикулярно к нему), попадает на вращающееся шестигранное зеркало, ось вращения которого параллельна экрану и находится напротив отверстия. Какой длины L будет прочерчивать полоску на экране отраженный от зеркала луч, если расстояние между зеркалом и экраном $l = 1$ м? Размерами граней зеркала по сравнению с расстоянием l можно пренебречь.

980. Два зеркала образуют двугранный угол $\varphi < \pi$. На одно из зеркал падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной к ребру угла. Доказать, что угол отклонения α этого луча от первоначального направления после отражения от обоих зеркал не зависит от угла падения.

981. Световой луч отражается последовательно от двух плоских зеркал по одному разу от каждого. Зеркала скреплены друг с другом и составляют двугранный угол $\varphi < \pi$. На какой угол γ от своего первоначального направления отклонится отраженный луч, если система зеркал поворачивается на угол β вокруг оси, лежащей в плоскости обоих зеркал? Как падающий, так и отраженный лучи лежат в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

982. Сечение стеклянной призмы имеет форму равнобедренного треугольника. Одна из равных граней посеребрена. Луч, совпадаю-

щий с перпендикуляром к поверхности стекла, падает на другую, непосеребренную грань и после двух отражений выходит через основание призмы перпендикулярно к нему. Найти углы призмы.

983. Луч света входит в стеклянную призму под углом $\alpha = \pi/6$ и выходит из призмы в воздух под углом $\beta = \pi/3$, причем, пройдя призму, отклоняется от своего первоначального направления на угол $\gamma = \pi/4$. Найти преломляющий угол φ призмы.

984. Определить показатель преломления n скипидара и скорость распространения света v в скипидаре, если известно, что при угле падения $\alpha = 45^\circ$ угол преломления $\beta = 30^\circ$.

985. Параллельный пучок монохроматического света падает нормально на боковую поверхность призмы, преломляющий угол которой $\alpha = 30^\circ$. Показатель преломления материала призмы для такого света $n = 1{,}4$. Найти угол отклонения δ светового пучка от первоначального направления после выхода из призмы.

986. Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 20^\circ$. Пользуясь зеркалом, пускают «зайчик» в воду озера. Под каким углом ϑ к горизонту нужно расположить зеркало, чтобы луч в воде шел под углом $\alpha = 41^\circ$ к вертикали? ($\sin\alpha = 0{,}655$.) Показатель преломления воды $n = 1{,}32$.

987. При падении на плоскую границу двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 луч частично отражается, частично преломляется. При каком угле падения α отраженный луч перпендикулярен к преломленному лучу?

988. Преломленный луч составляет с отраженным угол 90°. Найти показатель преломления, если синус угла падения α равен 0,8.

989. На поверхности водоема глубиной $H = 5{,}3$ м плавает фанерный круг радиуса $r = 1$ м, над центром которого на некоторой высоте расположен точечный источник света. Какова должна быть эта высота h, чтобы радиус R теневого круга на плоском дне водоема был наибольшим? Определить этот наибольший радиус. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

990. На поверхности озера находится круглый плот, радиус которого $R = 8$ м. Глубина озера $h = 2$ м. Определить радиус r полной тени от плота на дне озера при освещении воды рассеянным светом. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

991. Узкий параллельный пучок света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом α, синус которого равен 0,8. Вышедший из пластинки пучок оказался смещенным относительно продолжения падающего пучка на расстояние $d = 2$ см. Какова толщина h пластинки, если показатель преломления стекла $n = 1{,}7$?

992. На какое расстояние x сместится световой луч, распространяющийся в стекле с показателем преломления n, если на его пути встретится щель, заполненная воздухом? Грани щели плоские и параллельные. Расстояние между гранями равно d, угол падения луча на грань равен α. Полного отражения не происходит.

993. Луч света выходит из призмы под тем же углом, под каким входит в призму, причем отклоняется от первоначального направления на угол $\varphi = 15^\circ$. Преломляющий угол призмы $\gamma = 45^\circ$. Найти показатель преломления n вещества призмы.

994. У призмы с показателем преломления $n = 1{,}41$ и с преломляющим углом $\varphi = 30^\circ$ одна грань посеребрена. Луч падает на другую грань под углом $\alpha = 45^\circ$, затем опять через эту же грань выходит из призмы. Найти угол ϑ между падающим и выходящим лучами.

995. Определить угол φ отклонения луча стеклянной призмой, преломляющий угол которой равен $\vartheta = 5^\circ$, если луч падает на грань призмы под малым углом. Показатель преломления стекла $n = 1{,}8$.

996. Луч света падает под углом $\alpha = 58^\circ$ ($\operatorname{tg}\alpha = 1{,}600$) на поверхность воды, налитой слоем толщиной $h = 10$ мм в стеклянное блюдце с плоскопараллельным дном. Показатель преломления воды $n_1 = 1{,}33$. Определить показатель преломления n_2 стекла блюдца, если вышедший под блюдцем луч смещен относительно падающего на $x = 6{,}2$ мм, а в стекле луч проходит путь $l = 5$ мм.

997. На горизонтальном дне водоема глубиной $h = 1{,}2$ м лежит плоское зеркало. На каком расстоянии l от места вхождения луча в воду этот луч снова выйдет на поверхность воды после отражения от зеркала? Угол падения луча $\alpha = 30^\circ$, показатель преломления воды $n = 4/3$.

998. На горизонтальном дне бассейна лежит плоское зеркало. Луч света, преломившись на поверхности воды, отражается от зеркала и выходит в воздух. Расстояние от места вхождения луча в воду до места выхода отраженного луча из воды $d = 1{,}5$ м. Глубина бассейна $h = 2$ м, показатель преломления воды $n = 4/3$. Определить угол падения луча α.

999. Плоскопараллельная пластинка толщиной $d = 5$ см посеребрена с нижней стороны. Луч падает на верхнюю поверхность пластинки под углом $\alpha = 30^\circ$, частично отражается, а часть света проходит в пластинку, отражается от нижней поверхности пластинки и, преломляясь вторично, выходит в воздух параллельно первому отраженному лучу. Определить показатель преломления n материала пластинки, если расстояние между двумя параллельными лучами $l = 2{,}5$ см.

1000. На стеклянную плоскопараллельную пластину падает луч под углом α. Луч частично отражается от верхней поверхности, частично проходит внутрь пластины, снова отражается от нижней поверхности и затем выходит через верхнюю. Найти угол φ выхода луча и длину l пути, пройденного преломленным лучом в пластине. Толщина пластины d, показатель преломления стекла n.

1001. Какова толщина H плоскопараллельной стеклянной пластинки, если точку, нанесенную чернилами на задней стороне пластинки, наблюдатель видит на расстоянии $h = 5$ см от передней поверхности? Луч зрения перпендикулярен к поверхности пластин-

ки. Показатель преломления стекла $n = 1{,}6$. Для малых углов $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.

1002. Точечный источник расположен на расстоянии $h = 1{,}5$ см от передней поверхности плоскопараллельной пластинки толщиной $d = 1{,}2$ см, посеребренной с задней стороны. На каком расстоянии x от источника находится его изображение, получающееся в результате отражения лучей от задней поверхности пластинки? Показатель преломления вещества пластинки $n = 1{,}6$. Наблюдение производится по направлению, перпендикулярному к пластинке.

1003. Стержень опущен концом в прозрачную жидкость, показатель преломления которой относительно воздуха равен n, и образует с поверхностью жидкости угол α. Наблюдателю, который смотрит сверху, конец стержня, погруженный в жидкость, кажется смещенным на угол β (рис. 151). При каком значении угла наклона стержня α угол смещения β будет наибольшим?

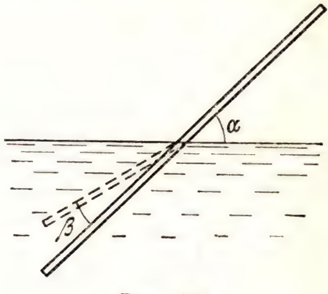


Рис. 151

1004. Сечение стеклянной призмы имеет форму равностороннего треугольника. Луч падает на одну из граней перпендикулярно к ней. Найти угол φ между направлениями луча падающего и луча, вышедшего из призмы. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

1005. В цистерне с сероуглеродом на глубине $h = 26$ см под поверхностью расположен точечный источник света. Вычислить площадь круга на поверхности жидкости, в пределах которого возможен выход лучей в воздух. Показатель преломления сероуглерода $n = 1{,}64$.

1006. Водолаз стоит на горизонтальном дне водоема глубиной $H = 15$ м. На каком расстоянии x от водолаза находятся те части дна, которые он может увидеть отраженными от поверхности воды? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. Считать, что глаза водолаза находятся на расстоянии $h = 1{,}7$ м от дна.

1007. На дне водоема глубиной $h = 3$ м находится точечный источник света. Какого минимального радиуса R должен быть круглый непрозрачный диск, плавающий на поверхности воды над источником, чтобы с вертолета нельзя было обнаружить этот источник света? Показатель преломления воды $n = 1{,}3$.

1008. В жидкости с показателем преломления $n = 1{,}8$ помещен точечный источник света. На каком наибольшем расстоянии h над источником надо поместить диск диаметром $d = 2$ см, чтобы свет не вышел из жидкости в воздух?

1009. В толще стекла с показателем преломления $n = 3/2$ на расстоянии $h = 10$ см от плоской поверхности стекла находится точечный источник света. Непрозрачный диск расположен на этой поверхности так, что его центр находится в ближайшей к источнику

точке. Диск и стекло покрыты снаружи плоским слоем гладкого льда без воздушной прослойки. Какой наименьший радиус r должен иметь диск, чтобы свет не вышел через поверхность льда?

1010. Пучок света скользит вдоль боковой грани равнобедренной призмы. При каком предельном преломляющем угле φ призмы преломленные лучи претерпят полное отражение на второй боковой грани призмы? Показатель преломления материала призмы $n = 1{,}6$.

1011. Призма сделана из стекла (флинт) с показателем преломления $n = 1{,}75$. Преломляющий угол призмы $\varphi = 60°$. При каком угле падения i на одну из граней выход луча из второй грани становится невозможным?

1012. Луч света падает перпендикулярно на короткую грань трехгранной поворотной призмы с углами 90° и 45°, изготовленной из тяжелого флинтгласа с показателем преломления $n = 1{,}74$. На какой наибольший угол α может отклониться луч в направлении к 90°-му ребру в плоскости, перпендикулярной к этому ребру, чтобы свет не выходил частично через длинную грань призмы?

§ 28. Фотометрия

Энергию, переносимую светом через какую-нибудь площадку за единицу времени (т. е. световую мощность), оцениваемую по зрительному восприятию, называют световым потоком Φ через эту площадку.

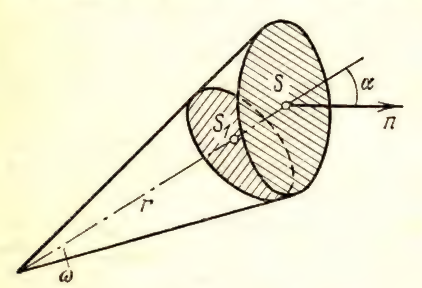


Рис. 152

Освещенность поверхности $E = \Phi/S$, где S — площадь поверхности.

Силой света источника по данному направлению называется величина $I = \Phi/\omega$, где ω — телесный угол, в котором распространяется поток Φ. Величина телесного угла измеряется отношением площади S_1 поверхности, вырезаемой телесным углом из сферы, центр которой находится в вершине телесного угла, к квадрату радиуса этой сферы, т. е. $\omega = S_1/r^2$ (рис. 152). Если вместо поверхности сферы берется площадка S, ограниченная этим же телесным углом, расстояние до которой от вершины телесного угла r и перпендикуляр $\boldsymbol{n}$ к которой составляет угол α с радиусом, то $S_1 = S \cos\alpha$.

Легко видеть отсюда, что $E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha$. Здесь r — расстояние от источника до освещаемой площадки, а α — угол падения лучей на нее.

Единицей измерения светового потока является люмен, освещенности — люкс, силы света — кандела. Расстояние r измеряют в метрах.

1013. Лампа, сила света которой $I = 200$ кд, укреплена на потолке комнаты. Определить суммарный световой поток Ф, падающий на все стены и пол комнаты.

1014. Фотографический снимок печатали без применения оптических систем (зеркал и линз), т. е. «контактным способом». При этом лампа располагалась на расстоянии $r_1 = 60$ см от снимка, а экспозиция длилась $t_1 = 16$ с. Каково должно быть время экспозиции t_2, если заменить лампу на другую, сила света которой втрое меньше, поместив ее от снимка на расстоянии $r_2 = 45$ см?

1015. Две лампы силой света $I_1 = 75$ кд и $I_2 = 48$ кд находятся друг от друга на расстоянии $l = 1{,}8$ м. Где надо поместить между ними фотометрический экран, чтобы его освещенность была одинакова с той и другой стороны?

1016. Две лампы силой света $I_1 = 25$ кд и $I_2 = 8$ кд находятся друг от друга на расстоянии $l = 1{,}8$ м. На каком расстоянии x от первой лампы (на линии, соединяющей лампы) надо поместить лист бумаги, чтобы освещенность его со стороны первой лампы была вдвое больше, чем со стороны второй лампы?

1017. При осмотре внутренней поверхности сферического резервуара диаметром $d = 20$ м в его верхней точке был укреплен точечный источник света ($I = 1000$ кд).

Определить освещенность в той точке поверхности резервуара, в которой лучи падают под углом $\alpha = 34°$ ($\sin 34° = 0{,}56$). Свет, отраженный от стенок резервуара, не учитывать.

1018. Над центром квадратного стола со стороной $a = 1{,}5$ м на высоте $h = 1$ м висит лампа. Во сколько раз изменится освещенность в центре стола, если эту же лампу повесить на той же высоте над одним из углов стола?

1019. На столе лежит раскрытая книга. Корешок книги длиной $l = 52$ см направлен к настольной лампе. Линия, соединяющая верх страницы с нитью лампы, имеет такую же длину l и наклонена под углом $\varphi = 60°$ к поверхности стола. Определить разницу освещенностей верха и низа страницы, если сила света лампы $I = 60$ кд.

1020. Чему равен полный световой поток Ф, создаваемый источником, помещенным на мачте высотой $h = 12$ м, если на расстоянии $l = 16$ м от основания мачты он создает освещенность $E = 3$ лк?

1021. На высоте $h = 8$ м над землей висит лампа силой света $I = 1000$ кд. Найти площадь участка, в пределах которого освещенность не меньше, чем $E = 1$ лк.

1022. Над землей на высоте $h = 5$ м висит лампа, имеющая силу света $I = 400$ кд. Определить площадь S участка, внутри которого освещенность меняется в пределах от $E_1 = 0{,}25$ лк до $E_2 = 2$ лк.

1023. Над площадью висит фонарь. Освещенность на земле в тех точках, где лучи падают под углом α_1, таким, что $\cos \alpha_1 = 0{,}3$, равна $E_1 = 10$ лк. Какова освещенность E_2 в точках, где лучи падают на землю под таким углом α_2, что $\cos \alpha_2 = 0{,}6$?

1024. Круглый зал диаметром $d = 30$ м освещается лампой, укрепленной в центре потолка. Найти высоту h зала, если известно,

что наименьшая освещенность стены зала в $n = 2$ раза больше наименьшей освещенности пола.

1025. На высоте $h_1 = 2$ м над серединой круглого стола диаметром $d = 3$ м висит лампа силой света $I_1 = 100$ кд. Ее заменили лампой силой света $I_2 = 25$ кд, изменив расстояние до стола так, что освещенность середины стола не изменилась. Как изменится освещенность края стола?

1026. Площадка освещается двумя различными лампами, висящими на столбе одна над другой на высоте $h_1 = 8$ м и на высоте $h_2 = 27$ м. На каком расстоянии l от основания столба находятся точки площадки, освещенность которых не изменится, если поменять лампы местами?

1027. Три одинаковых точечных источника света расположены в вершинах равностороннего треугольника. В центре треугольника перпендикулярно к его плоскости и параллельно одной из его сторон находится маленькая пластинка. Определить освещенность обеих сторон пластинки, если сила света каждого из источников $I = 10$ кд, а длина стороны треугольника $l = 1$ м.

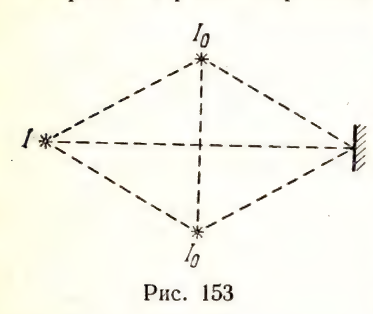


Рис. 153

1028. Три лампочки и небольшой экран расположены в вершинах ромба, одна из диагоналей которого равна его стороне. Экран перпендикулярен к другой диагонали (рис. 153). Какую силу света I дает средняя лампа, если при ее выключении освещенность экрана уменьшается в $n = 2$ раза? Две другие лампы имеют силу света $I_0 = 10$ кд.

1029. На столбе одна над другой висят две лампы силой света по $I = 200$ кд на высоте $h_1 = 3$ м и $h_2 = 4$ м над землей. Найти освещенность поверхности земли на расстоянии $l = 2$ м от основания столба.

1030. В комнате имеются две одинаковые лампы, прикрепленные к потолку на расстоянии $l = 4$ м друг от друга. Найти отношение освещенностей центра стола в двух его положениях: 1) под одной из ламп; 2) посередине между лампами. Высота лампы от поверхности стола по вертикали равна $h = 2$ м. Излучение ламп считать одинаковым по всем направлениям.

1031. Экран освещается двумя лампами, расположенными симметрично относительно центра экрана. Расстояние от каждой лампы до экрана (по перпендикуляру) $h_1 = 4$ м, расстояние между лампами $l = 2$ м. Сила света каждой лампы $I_1 = 200$ кд. Какой силы света I_2 нужно взять одну лампу, помещенную на расстоянии $h_2 = 6$ м над центром экрана, чтобы она дала в центре экрана такую же освещенность, как две упомянутые лампы?

1032. Точечный источник света S освещает поверхность AB (рис. 154). Во сколько раз увеличится освещенность в точке C, если

сбоку от S на расстоянии $SD = SC$ поместить плоское зеркало, отражающее свет в точку C? Коэффициент отражения зеркала принять равным 1.

1033. Лампа, подвешенная к потолку, обладает в горизонтальном направлении силой света $I = 96$ кд. Какой световой поток Φ падает на картину, площадь которой $S = 0,5$ м², если картина висит вертикально на стене напротив лампы на расстоянии $a = 4$ м от нее, а на противоположной стене находится большое плоское зеркало на расстоянии $b = 2$ м от лампы?

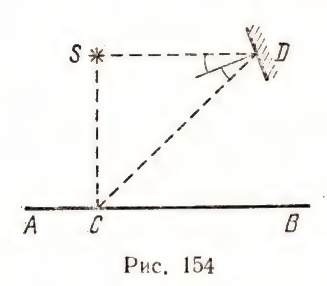


Рис. 154

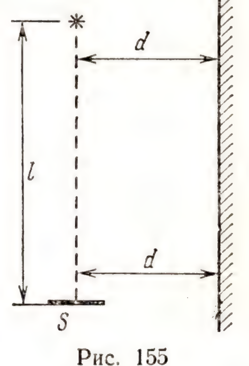


Рис. 155

1034. Какова освещенность маленькой горизонтальной площадки S (рис. 155), если над ней на расстоянии $l = 2$ м находится точечный источник света и если на расстоянии $d = 1$ м от источника и площадки вертикально расположено плоское зеркало? Сила света источника $I = 60$ кд.

1035. Плоский экран и идеально отражающее плоское зеркало образуют двугранный угол $\varphi = 45°$. Между экраном и зеркалом, на одинаковом расстоянии R от них, помещен точечный источник света S. Какова освещенность в точке A экрана, ближайшей к источнику?

§ 29. Сферические зеркала

Сферическое зеркало представляет собой отполированную поверхность шарового сегмента. Прямая, проведенная через центр сферы (оптический центр зеркала) и вершину шарового сегмента (полюс зеркала), называется главной оптической осью зеркала. Всякая другая прямая, проходящая через оптический центр, называется побочной оптической осью.

Луч, параллельный главной оптической оси, после отражения пересекает ее в фокусе зеркала, лежащем на расстоянии $F = R/2$ от зеркала (R — радиус сферы). В случае выпуклого зеркала главную оптическую ось пересекает не сам отраженный луч, а его мнимое продолжение. В этом случае фокус можно назвать мнимым.

Плоскость, проведенная через фокус перпендикулярно к главной оптической оси, называется фокальной плоскостью. Лучи, параллельные побочной оптической оси, после отражения сходятся в точке,

лежащей на фокальной плоскости зеркала (в случае выпуклого зеркала — продолжения лучей). Величину $D = 1/F$ можно назвать оптической силой зеркала.

Лучи, исходящие от небольшого предмета, после отражения от зеркала образуют изображение. Каждой точке предмета соответствует одна точка изображения. Изображение может быть действительным, когда оно образовано самими лучами, отраженными от зеркала (рис. 156), или мнимым, когда оно образовано продолжениями отраженных лучей (рис. 157).

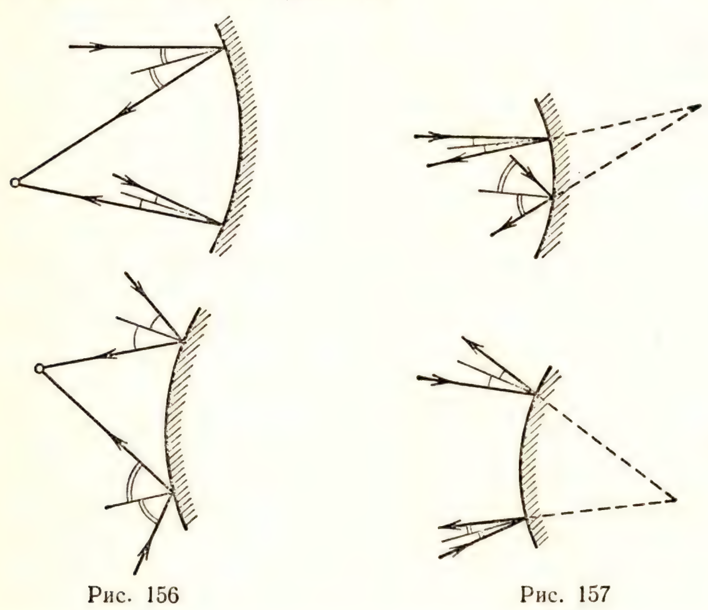


Рис. 156 Рис. 157

Предмет (или источник) располагается в вершине пучка пересекающихся лучей. Если эта вершина действительно существует даже при наличии зеркала, то источник считается действительным (рис. 158). Если же в присутствии зеркала вершина образована лишь мнимыми продолжениями лучей, то мы имеем дело с мнимым источником (рис. 159).

Расстояние d от предмета до зеркала, расстояние f от зеркала до изображения и фокусное расстояние F связаны соотношением

$$\pm\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f}=\pm\frac{1}{F},$$

называемым формулой зеркала. При таком написании формулы все величины d, f и F считаются положительными (в условиях задач значения d, f и F заданы по абсолютной величине). Знаки же перед членами формулы зеркала выбираются по правилу: если предмет (источник), изображение, фокус являются действитель-

ными, то перед соответствующими членами формулы ставится плюс; если мнимыми, то ставится минус.

Если перед всеми членами формулы зеркала знаки поставлены в соответствии с указанным правилом, то полученный ответ будет всегда положительным, так как он характеризует только численное значение искомой величины. Часто, однако, действительность или

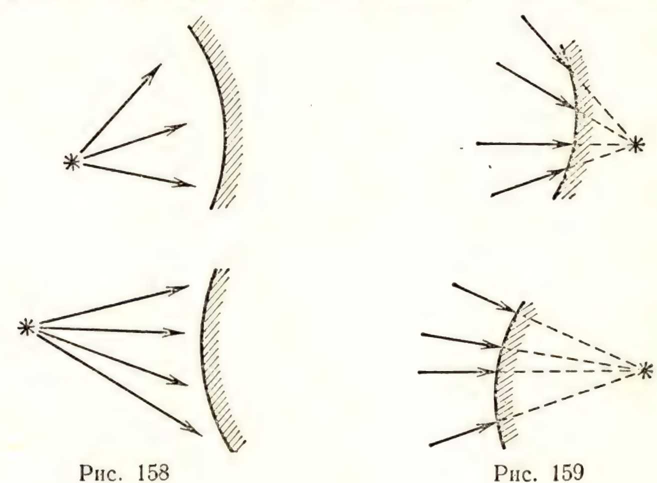


Рис. 158 Рис. 159

мнимость источника, изображения или фокуса неизвестна. В этом случае перед соответствующим членом в формуле зеркала можно поставить любой знак (удобнее обычно плюс), т. е. предполагать предмет (изображение, фокус) действительным или мнимым. Положительность ответа указывает тогда на правильность этого предположения, отрицательность — на его ошибочность.

Формула зеркала и все вышеуказанные свойства зеркала справедливы только для лучей, идущих вблизи главной оптической оси и составляющих с ней малые углы. Во всех задачах подразумевается, что мы имеем дело именно с этим случаем.

1036. Посеребренная сфера рассечена на две части плоскостью. На каком расстоянии b от центра сферы проходит эта плоскость, если известно, что меньшая часть представляет собой сферическое зеркало диаметром $a = 0{,}64$ м с фокусным расстоянием $F = 0{,}65$ м?

1037. Вогнутое сферическое зеркало имеет фокусное расстояние $F = 1$ м. На каком расстоянии d от зеркала необходимо поместить источник света, чтобы его изображение совпало с самим источником?

1038. Расстояние предмета от вогнутого сферического зеркала $d = 0{,}5$ м, расстояние изображения $f = 2$ м. Найти радиус R кривизны зеркала.

1039. На расстоянии $d = 0{,}14$ м от вершины вогнутого зеркала находится предмет, высота которого $l = 0{,}06$ м. Фокусное расстояние зеркала $F = 0{,}11$ м. Найти высоту L изображения предмета.

1040. Предмет находится на расстоянии $d = 48$ см от вершины вогнутого зеркала. Зеркало дает уменьшенное в $n = 4$ раза обратное (перевернутое) изображение предмета. Найти радиус R кривизны зеркала.

1041. Вогнутое сферическое зеркало дает действительное изображение, которое в $k = 4$ раза больше предмета. Определить фокусное расстояние F зеркала, если расстояние между предметом и его изображением $a = 1{,}5$ м.

1042. Малый участок внутренней поверхности сферы посеребрен. На диаметрально противоположной стороне сферы получилось изображение некоторого предмета, помещенного внутри нее. С каким увеличением k изображается предмет?

1043. Расстояние светящейся точки от вогнутого зеркала равно двум радиусам кривизны. Светящаяся точка находится на главной оптической оси зеркала. Где расположено изображение точки? Построить это изображение.

1044. На вогнутое зеркало падает луч AOB, пересекающий главную оптическую ось зеркала в точке O. Отраженный от зеркала луч BO_1D пересекает ту же ось в точке O_1 (рис. 160). Найти построением положение фокуса зеркала.

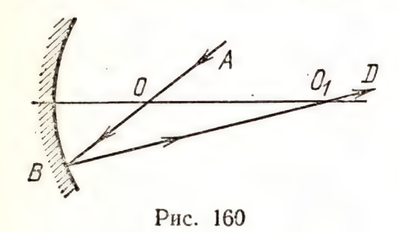


Рис. 160

1045. С помощью вогнутого зеркала получено действительное изображение предмета с увеличением $k_1 = 5$. Оказалось, что если переместить предмет на некоторое расстояние вдоль оптической оси, изображение переместится вдоль оптической оси на такое же расстояние. Найти полученное при новом расположении увеличение k_2.

1046. Изображение, которое дает вогнутое зеркало, в $k_1 = 5$ раз больше предмета. Если же передвинуть зеркало на $a = 2$ см ближе к предмету, то изображение, оставаясь действительным, станет больше предмета в $k_2 = 7$ раз. Найти величину F фокусного расстояния зеркала.

1047. Изображение, даваемое вогнутым зеркалом, в $n_1 = 4$ раза меньше предмета. Если предмет передвинуть на расстояние $l = 5$ см ближе к зеркалу, то изображение будет меньше предмета только в $n_2 = 2$ раза. Определить фокусное расстояние F зеркала.

1048. Фокус вогнутого зеркала расположен на расстоянии $a = 0{,}24$ м от светящегося предмета и на расстоянии $b = 0{,}54$ м от его изображения. Найти увеличение k предмета, даваемое зеркалом.

1049. Светящаяся точка расположена на расстоянии $d = 0{,}75$ м от вогнутого зеркала и на расстоянии $l = 0{,}05$ м от главной оптической оси зеркала. Изображение светящейся точки находится на

расстоянии $L = 0,2$ м от оси. Определить радиус кривизны R зеркала для случаев, когда изображение действительное и когда оно мнимое.

1050. Пучок световых лучей от бесконечно удаленного источника падает на экран, в котором проделано отверстие диаметром $d = 7$ см. Плоскость экрана перпендикулярна к лучам. На расстоянии $a = 68$ см за экраном расположено вогнутое зеркало, оптическая ось которого совпадает с осью пучка. Фокусное расстояние зеркала $F = 28$ см. Определить диаметр D светлого круга на экране.

1051. Точечный источник света помещен в фокусе сферического зеркала, фокусное расстояние которого $F = 20$ см. Во сколько раз освещенность, создаваемая при наличии зеркала, больше той, которую мог бы создать тот же источник света без зеркала на экране, находящемся на расстоянии $r = 0,2$ км от источника света, в точке на оптической оси зеркала?

1052. Прожектор установлен на вышке на высоте $h = 30$ м от поверхности земли. Найти освещенность E в центре светового пятна на поверхности земли на расстоянии $l = 40$ м от основания вышки. Прожектор имеет точечный источник света. Сила света источника $I = 500$ кд. Фокусное расстояние рефлектора $F = 20$ см. Считать, что прожектор дает параллельный пучок лучей.

1053. Вогнутое зеркало с радиусом кривизны $R = 1$ м дает мнимое изображение предмета, расположенное на расстоянии $f = 3$ м от зеркала. На каком расстоянии d от зеркала находится сам предмет?

1054. На каком расстоянии d от вогнутого зеркала с радиусом кривизны $R = 120$ см нужно поместить предмет, чтобы получить прямое, увеличенное в $n = 4$ раза изображение предмета?

1055. Каков радиус кривизны R вогнутого сферического зеркала, если изображение предмета, помещенного перед ним на расстоянии $d = 21$ см, получается в $k = 6$ раз больше самого предмета?

1056. Величина изображения, полученного с помощью вогнутого зеркала, вдвое ($n = 2$) больше величины предмета. Расстояние между изображением и предметом $l = 18$ см. Найти радиус R кривизны зеркала.

1057. Светящаяся точка находится на главной оптической оси круглого вогнутого зеркала на одинаковом расстоянии от зеркала и его главного фокуса. Перпендикулярно к главной оптической оси зеркала расположен экран, центр которого совпадает с оптическим центром зеркала. Во сколько раз диаметр светлого круга на экране превышает диаметр зеркала?

1058. Расстояние между предметом и его мнимым, увеличенным в $n = 2$ раза изображением в сферическом зеркале равно $l = 1,5$ м. Найти радиус R кривизны зеркала.

1059. Светящаяся точка расположена на расстоянии $a = 0,2$ м от главной оптической оси вогнутого зеркала, ее мнимое изображение — на расстоянии $b = 0,5$ м от той же оси. Во сколько раз фокусное расстояние зеркала превышает расстояние от светящейся точки до фокальной плоскости?

1060. Отрезок, соединяющий фокус вогнутого сферического зеркала с его полюсом, разделен на три равные части и в точках деления помещены точечные источники света. Каково расстояние l между изображениями этих источников, если радиус кривизны зеркала равен R?

1061. Упавший на мягкую глину шар оставил на ней углубление, диаметр которого составляет 0,8 диаметра шара. После затвердевания глины выемку посеребрили и получившееся сферическое зеркало накрыли плоским стеклом. С каким линейным увеличением дает это зеркало изображение рисунка, нанесенного в центре стекла?

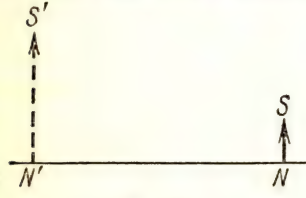


Рис. 161

1062. SN — предмет, $S'N'$ — его мнимое изображение в сферическом зеркале, NN' — оптическая ось зеркала (рис. 161). Найти построением положение полюса зеркала, его центра и фокуса.

1063. Наблюдатель видит свое изображение в сферическом зеркале, находящемся от него на расстоянии $d = 0{,}2$ м, в $k = 1{,}5$ раза бо́льшим изображения, получающегося в плоском зеркале, находящемся на таком же расстоянии. Определить радиус кривизны R сферического зеркала.

1064. Сходящиеся лучи падают на вогнутое зеркало, главное фокусное расстояние которого $F = 0{,}5$ м, и после отражения собираются в точке, отстоящей на $f = 0{,}2$ м от зеркала и на $L = 0{,}15$ м от его главной оптической оси. На каком расстоянии l от этой же оси соберутся лучи, если убрать зеркало? Построить ход лучей.

1065. На вогнутое зеркало, главное фокусное расстояние которого $F = 0{,}1$ м, падают сходящиеся лучи. Если лучи продолжить за зеркало до их пересечения, точка пересечения будет находиться на расстоянии $d = 0{,}3$ м от зеркала. На каком расстоянии от зеркала соберутся лучи после отражения?

1066. Вогнутое зеркало поставлено против сходящегося пучка лучей так, что точка, где лучи пересекались, осталась за зеркалом на расстоянии $d = 20$ см от его вершины. После отражения лучи сошлись в одну точку на расстоянии, равном 1/5 фокусного расстояния зеркала. Найти радиус R кривизны зеркала.

1067. Расстояние светящейся точки от сферического зеркала $d = 4{,}8$ см, расстояние изображения этой точки от фокуса зеркала $a = 20$ см. Точка находится на главной оптической оси зеркала. Найти фокусное расстояние зеркала.

1068. На оси вогнутого сферического зеркала радиуса R находится маленькая лампочка накаливания. Расстояние между зеркалом и источником $d = R/4$. Определить освещенность в центре экрана, расположенного перпендикулярно к главной оптической оси и находящегося на расстоянии $2R$ от вершины зеркала. Известно, что освещенность в центре экрана, расположенного на расстоянии R, равна E. Потери света при отражении не учитывать.

1069. Построить изображение S' светящейся точки S, находящейся на главной оптической оси выпуклого зеркала. Положение центра зеркала O, его полюса P и фокуса F известно.

1070. Радиус кривизны выпуклого зеркала $R = 1{,}5$ м. Предмет находится на расстоянии $d = 5$ м от зеркала. На каком расстоянии f от зеркала находится изображение предмета?

1071. На каком расстоянии d от выпуклого зеркала нужно поместить источник света, чтобы его изображение получилось на расстоянии $f = 60$ см от зеркала? Главное фокусное расстояние зеркала $F = 90$ см.

1072. Мнимое прямое изображение предмета получено с помощью выпуклого сферического зеркала на расстоянии $f = 12$ см от вершины зеркала. На каком расстоянии d расположен предмет, если радиус кривизны зеркала $R = 40$ см?

1073. Во сколько раз высота изображения пламени свечи, удаленной на $d = 1{,}5$ м от выпуклого зеркала ($F = 0{,}5$ м), меньше высоты самого пламени?

1074. Предмет высотою $h = 4$ мм находится на расстоянии $d = 10$ см от выпуклого зеркала с радиусом кривизны $R = 60$ см. Найти величину H изображения, даваемого зеркалом.

1075. На каком расстоянии d от выпуклого зеркала, фокусное расстояние которого $F = 0{,}2$ м, находится предмет, если изображение предмета получается мнимое и уменьшенное в два раза? Построить это изображение.

1076. Радиус кривизны выпуклого сферического зеркала $R = 1{,}6$ м. На каком расстоянии перед зеркалом должен находиться предмет, чтобы его изображение получилось в $n = 1{,}5$ раза ближе к зеркалу, чем сам предмет?

1077. Светящаяся точка расположена на расстоянии $d = 1$ м от выпуклого зеркала, а ее изображение делит точно пополам отрезок оптической оси между полюсом зеркала и его фокусом. Найти радиус R кривизны зеркала.

1078. Человек смотрит в посеребренный стеклянный шар диаметром $l = 0{,}6$ м, находясь от него на расстоянии $d = 0{,}25$ м. На каком расстоянии x от человека расположено его мнимое прямое уменьшенное изображение?

1079. Тонкий карандаш длиной $l = 6$ см расположен вдоль главной оптической оси выпуклого сферического зеркала. Изображение его ближайшего к зеркалу конца находится на расстоянии $f_1 = 20$ см от зеркала, дальнего — на расстоянии $f_2 = 24$ см от зеркала. Определить главное фокусное расстояние F зеркала.

1080. Тонкий луч пересекает главную оптическую ось выпуклого зеркала в некоторой точке A. На каком расстоянии от точки A необходимо расположить это зеркало, чтобы луч, отразившись от него, пересек главную оптическую ось уже в другой точке B, отстоящей от точки A на расстоянии $l = 1{,}5F$?

1081. Сходящиеся лучи падают на выпуклое зеркало так, что их продолжения пересекаются на оси зеркала на расстоянии $d = 24$ см

за зеркалом. После отражения от зеркала эти лучи сходятся на оси зеркала в точке, находящейся перед ним на расстоянии $f = 40$ см. Определить радиус кривизны R зеркала.

1082. Выпуклое зеркало, фокусное расстояние которого $F = 1{,}45$ м, закрывает собой отверстие в непрозрачном экране. На зеркало падают сходящиеся лучи и после отражения сходятся в точке, находящейся на оптической оси зеркала на расстоянии $f = 55$ см перед экраном. На каком расстоянии d за экраном сойдутся лучи, если вынуть зеркало из отверстия?

1083. Сходящиеся лучи падают на выпуклое зеркало с радиусом кривизны $R = 0{,}4$ м так, что их продолжения пересекаются на оси зеркала на расстоянии $d = 0{,}7$ м за зеркалом. На каком расстоянии f от зеркала сойдутся эти лучи после отражения?

1084. Сходящиеся лучи падают на выпуклое зеркало так, что их продолжения пересекаются в точке, находящейся на расстоянии $d = 0{,}4$ м за зеркалом. После отражения от зеркала лучи расходятся таким образом, что их продолжения пересекаются в точке, отстоящей от зеркала на расстоянии $f = 1{,}6$ м. Обе точки пересечения лежат на главной оптической оси зеркала. Определить фокусное расстояние F зеркала.

1085. Через круглое отверстие в экране, имеющее диаметр $d = 4$ см, на выпуклое сферическое зеркало, находящееся на расстоянии $a = 16$ см от экрана, падает параллельный пучок света (вдоль оптической оси зеркала перпендикулярно к экрану). Отразившись от зеркала, пучок света идет обратно и, попадая на тот же экран, образует вокруг отверстия светлое пятно диаметром $D = 6$ см. Каков радиус R кривизны зеркала?

1086. Пучок параллельных лучей, пройдя через круглое отверстие в листе бумаги, образует на экране, параллельном листу и расположенном от него на расстоянии $a = 45$ см, светлый круг диаметром $d = 6$ см. Когда экран заменили выпуклым зеркалом, то на листе бумаги появилось освещенное пятно диаметром $D = 33$ см. Определить радиус кривизны зеркала R.

§ 30. Линзы

Линзой называется прозрачное тело, ограниченное двумя сферическими или сферической и плоской поверхностями. Толщину линзы будем считать малой по сравнению с радиусами кривизны R_1 и R_2 этих поверхностей. Поэтому вершины сферических поверхностей можно считать практически сливающимися в одной точке, называемой оптическим центром линзы. Луч, проходящий через оптический центр линзы, т. е. идущий вдоль оптической оси линзы, не меняет своего направления. Оптическая ось, проведенная через вершины сферических поверхностей, называется главной оптической осью, прочие — побочными.

Линза, у которой середина толще, чем края, называется собирающей (собирательной), если же края толще середины, то линза —

рассеивающая. Условное обозначение собирающей линзы показано на рис. 162, рассеивающей — на рис. 163.

Пучок лучей, параллельных главной оптической оси, после преломления в линзе сходится в фокусе. Фокус линзы действительный для собирающей линзы, мнимый — для рассеивающей. Плоскость, проведенная через фокус перпендикулярно к оптической оси, называется фокальной плоскостью. Каждый из лучей, параллельных побочной оптической оси, после преломления проходит через одну и ту же точку, лежащую на фокальной плоскости линзы. В случае рассеивающей линзы в этой точке пересекаются не сами лучи, а их мнимые продолжения.

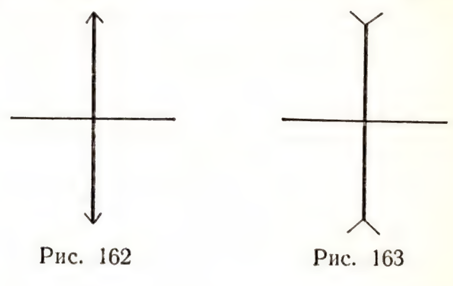


Рис. 162 Рис. 163

Тонкая линза для лучей, составляющих малый угол с главной оптической осью, обладает свойством давать изображение одной точки предмета также в виде точки. Изображение предмета может быть действительным или мнимым. В первом случае оно образовано лучами, действительно пересекающимися после преломления в линзе (рис. 164). Во втором изображение образовано лишь мнимыми продолжениями преломленных в линзе лучей (рис. 165).

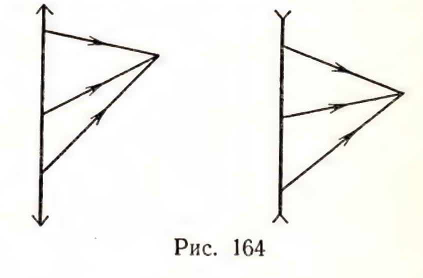


Рис. 164

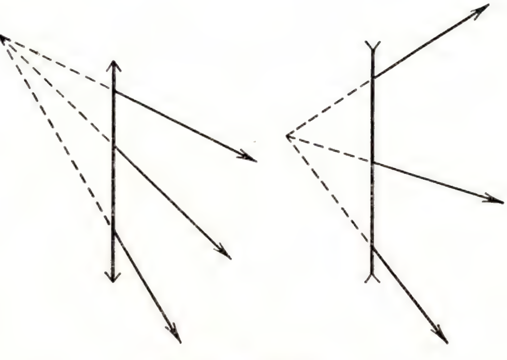


Рис. 165

Уберем линзу и найдем вершину пучка пересекающихся лучей. Эта вершина — одна из точек предмета или источника. Так как в присутствии линзы лучи могут и не пересекаться

в действительности в этой точке, то предмет (источник) также может быть как действительным (рис. 166), так и мнимым (рис. 167). В последнем случае источником будет вершина пучка мнимых продолжений лучей, падающих на линзу.

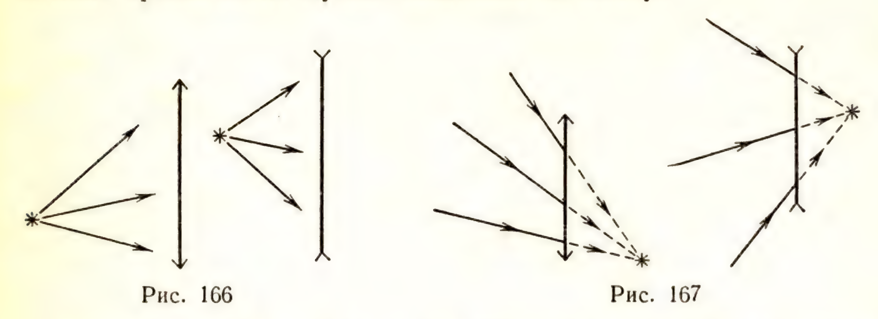


Рис. 166 Рис. 167

Формула линзы и правило, по которому ставятся знаки перед членами этой формулы, полностью совпадают с аналогичными для сферического зеркала, т. е. $\pm\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f}=\pm\frac{1}{F}$, где d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от линзы до изображения и F — фокусное расстояние являются величинами существенно положительными. Плюс перед членами формулы ставится в том случае, если соответствующая величина действительная, минус — если мнимая. Знак ответа указывает лишь на правильность определения характера (но не абсолютного значения) неизвестной величины. Положительный ответ свидетельствует о справедливости предположения о мнимости или действительности величины d (или f, или F), отрицательный — об ошибочности.

Фокусное расстояние F, радиусы кривизны сферических поверхностей R_1 и R_2 и показатели преломления n_1 и n_2 вещества линзы и окружающей среды связаны между собой соотношением:

$$\pm\frac{1}{F}=\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\left(\pm\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2}\right).$$

Как обычно, формула дает только абсолютное значение F, знак же перед левой частью выбирается по обычному правилу: действительный фокус — плюс, мнимый — минус. Знаки перед членами, содержащими R_1 и R_2, берутся положительными для выпуклых поверхностей, отрицательными — для вогнутых.

Величина $D=1/F$, обратная фокусному расстоянию, называется оптической силой линзы. Если F измеряется в метрах, то оптическая сила D — в диоптриях (дптр).

1087. При съемке автомобиля длиной $l=4$ м пленка располагалась от объектива на расстоянии $f=60$ мм. С какого расстояния d снимали автомобиль, если длина его негативного изображения $L=32$ мм?

1088. Проверяя свои очки, учащийся получил на полу комнаты действительное изображение лампы, висящей на высоте $H = 3$ м, держа очковое стекло под лампой на расстоянии $h = 1$ м от пола. Какова оптическая сила D стекла?

1089. На главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 6$ см находится точечный источник света на расстоянии $d = 4$ см от линзы. На каком расстоянии x от линзы (по ту же сторону, что и источник) необходимо поставить плоское зеркало, чтобы по другую сторону линзы существовало действительное изображение источника на расстоянии $f = 12$ см от линзы?

1090. На рис. 168 S — точечный источник света, S' — его изображение. Определить построением положение оптического центра линзы и каждого из ее главных фокусов в случаях, когда главной оптической осью линзы является: 1) прямая M_1N_1; 2) прямая M_2N_2; 3) прямая M_3N_3; 4) прямая M_4N_4.

M_1 — N_1
M_2 $*S$ — N_2
M_3 — N_3
M_4 — $*S'$ N_4

Рис. 168

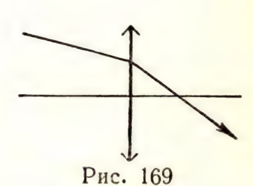


Рис. 169

1091. Найти построением положение главных фокусов линзы (рис. 169).

1092. Фотограф, находящийся на борту судна, снимает катер, идущий встречным курсом. В момент съемки катер находится под углом $\alpha = 45°$ по ходу судна на расстоянии $d = 150$ м от него (рис. 170). Скорость движения судна $v_1 = 18$ км/ч, а катера $v_2 = 36$ км/ч. Какое максимальное время экспозиции Δt может дать фотограф, чтобы величина размытия изображения на пленке не превышала $\Delta l = 0{,}03$ мм? Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F = 5$ см.

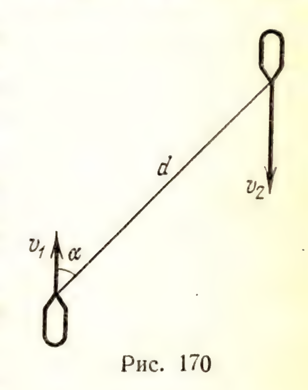


Рис. 170

1093. На сколько нужно изменить расстояние между объективом фотоаппарата и пластинкой при переходе от съемки очень удаленных предметов к съемке объекта, расположенного на расстоянии $d = 2$ м от объектива, если главное фокусное расстояние объектива $F = 13{,}5$ см?

1094. Изображение предмета получается на матовом стекле фотоаппарата. На какое расстояние x надо передвинуть объектив фотоаппарата, если между объективом и матовым стеклом поместить стеклянную пластинку толщиной $h = 4$ мм? Показатель преломления стекла $n = 1{,}6$. Считать углы падения настолько малыми, что $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$.

1095. В непрозрачной ширме сделано круглое отверстие, в которое вставлена собирающая линза. На оптической оси линзы на расстоянии $d = 10$ см от линзы помещен точечный источник света. По другую сторону линзы на таком же расстоянии d от нее поставлен перпендикулярно к оптической оси экран. На экране видно светлое пятно, диаметр которого в $n = 2$ раза меньше, чем диаметр линзы. Определить фокусное расстояние F линзы.

1096. Точечный источник света находится на оптической оси линзы на расстоянии $d = 25$ см от нее. Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см, ее диаметр $a = 5$ см. По другую сторону линзы помещается экран так, что на нем получается четкое изображение источника. Затем экран перемещают вдоль оптической оси на расстояние $l = 5$ см. Определить диаметр b светлого кружка на экране.

1097. Собирательная линза, фокусное расстояние которой $F = 0{,}06$ м, вставлена в отверстие радиуса $r = 0{,}03$ м в непрозрачной преграде. На экране, находящемся от преграды на расстоянии $a = 0{,}16$ м, получено четкое изображение точечного источника света. Каков будет радиус R светлого круга на экране, если вынуть линзу из отверстия?

1098. Линза с фокусным расстоянием $F = 5$ см плотно вставлена в круглое отверстие в доске. Диаметр отверстия $D_1 = 3$ см. На расстоянии $d = 15$ см от линзы на ее оптической оси находится точечный источник света. По другую сторону доски помещен лист бумаги, на котором получается четкое изображение источника. Каков будет диаметр D светлого кружка на листе бумаги, если линзу вынуть из отверстия?

1099. Изображение миллиметрового деления шкалы, расположенной перед линзой на расстоянии $d = 12{,}5$ см, имеет на экране длину $L = 8$ см. На каком расстоянии f от линзы находится экран?

1100. Освещенная щель высотой $h = 5$ см проектируется с помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см на экран, отстоящий от линзы на $f = 12$ см. Найти размер H изображения щели на экране.

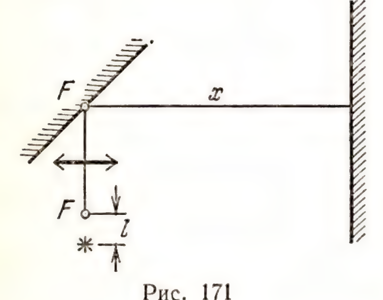


Рис. 171

1101. Предмет размером $l = 8$ см надо спроектировать на экран. Какое фокусное расстояние F должен иметь объектив, находящийся от экрана на расстоянии $f = 4$ м, чтобы изображение предмета на экране имело размер $L = 2$ м?

1102. В центре плоского зеркала, поставленного под углом 45° к горизонту, находится верхний главный фокус горизонтально расположенной линзы объектива эпидиаскопа с оптической силой $D = 10$ дптр. На расстоянии $l = 2$ мм ниже нижнего главного фокуса кладут ярко освещенную фотографию размером $a \times b = 4\text{ см} \times 6$ см (рис. 171). Определить размеры $A \times B$

экрана с четким изображением фотографии и его расстояние x от главной оси линзы.

1103. Накаленная нить лампочки и ее изображение, полученное с помощью линзы, оптическая сила которой $D = +8$ дптр, равны по величине. Как нужно изменить расстояние между линзой и лампочкой, чтобы изображение уменьшилось в три раза?

1104. Собирающая линза дает на экране четкое изображение предмета, которое в $k = 2$ раза больше этого предмета. Расстояние от предмета до линзы на $l = 6$ см превышает ее фокусное расстояние. Найти расстояние f от линзы до экрана.

1105. На расстоянии d от линзы находится светящаяся точка. Колебания линзы в направлении поперек главной оптической оси приводят к колебаниям действительного изображения точки с амплитудой $A_1 = 1{,}6$ см, а поперечные колебания источника с той же амплитудой вызывают колебания изображения с амплитудой $A_2 = 1{,}5$ см. Фокусное расстояние линзы $F = 0{,}6$ м. Определить расстояние d.

1106. Расстояние от предмета до собирающей линзы в $n = 5$ раз больше фокусного расстояния линзы. Во сколько раз изображение будет меньше предмета?

1107. На каком расстоянии f от объектива проекционного аппарата нужно поместить экран, чтобы изображение на экране было в $k = 50$ раз больше предмета на диапозитиве? Фокусное расстояние объектива $F = 0{,}1$ м.

1108. Для топографической съемки с самолета, летящего на высоте $H = 2000$ м, необходимо получить снимки местности в масштабе 1 : 4000. Каково должно быть фокусное расстояние F объектива?

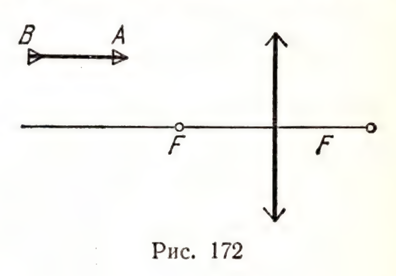


Рис. 172

1109. Объектив телевизионного передатчика отбрасывает изображение свободно падающего предмета, находящегося перед ним на расстоянии $d = 5$ м, на светочувствительный слой передающей трубки. Определить фокусное расстояние F объектива передатчика, если известно, что изображение движется с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2.

1110. Построить изображение отрезка AB, параллельного главной оптической оси собирающей линзы (рис. 172).

1111. Точечный предмет движется по дуге окружности со скоростью $v_1 = 3$ см/с вокруг оси собирающей линзы в плоскости, перпендикулярной к оси и отстоящей от линзы на расстоянии $d = 1{,}5\,F$, где F — фокусное расстояние линзы. В каком направлении и с какой скоростью v_2 движется изображение предмета?

1112. При помощи линзы с фокусным расстоянием $F = 4$ см получается изображение точки, лежащей на расстоянии $d = 12$ см от линзы и несколько выше ее оптической оси. На какое расстояние

L сместится изображение точки при перемещении линзы на расстояние $l = 3$ см вниз от ее первоначального положения?

1113. Светящаяся точка описывает окружность радиуса r в плоскости, перпендикулярной к оптической оси линзы, а ее изображение, полученное с помощью линзы с оптической силой D, описывает на экране окружность радиуса R. На каком расстоянии f от линзы находится экран?

1114. Фокусное расстояние объектива проекционного фонаря $F = 0{,}25$ м. Какое увеличение k диапозитива дает фонарь, если экран удален от объектива на расстояние $f = 4$ м?

1115. Расстояния от предмета до линзы и от линзы до изображения одинаковы и равны $a = 0{,}5$ м. Во сколько раз увеличится изображение, если сместить предмет на расстояние $l = 20$ см по направлению к линзе?

1116. С помощью фотографического аппарата, размер кадра которого 24 мм $\times$ 36 мм и фокусное расстояние объектива $F = 50$ мм, производится фотографирование стоящего человека, рост которого $h = 1{,}8$ м. На каком минимальном расстоянии от человека нужно установить аппарат, чтобы сфотографировать человека во весь рост?

1117. Действительное изображение светящейся точки получается на расстоянии $f = 8$ см от линзы и на расстоянии $L = 2$ см ниже ее оптической оси. На каком наименьшем расстоянии x перед линзой нужно поставить экран, имеющий форму верхней половины линзы, чтобы изображение точки исчезло? Фокусное расстояние линзы $F = 5$ см, ее диаметр $a = 10$ см.

1118. Кинооператору требуется снять автомобиль на воздушной подушке, двигающийся со скоростью $v = 72$ км/ч на расстоянии $d = 26$ м от оператора. Фокусное расстояние объектива кинокамеры «Нева» $F = 13$ мм. Какова должна быть экспозиция Δt, чтобы размытость Δr контуров изображения не превышала $a = 0{,}05$ мм?

1119. Фокусное расстояние двояковыпуклой линзы $F = 5$ см. Точечный источник света находится на оси линзы на расстоянии $d = 6$ см от нее. Линзу разрезали по диаметру на две равные части, которые раздвинули на расстояние $s = 1$ см симметрично относительно оптической оси. Найти расстояние S между двумя изображениями точки.

1120. Вдоль оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см расположен предмет, один конец которого находится на расстоянии $d_1 = 17{,}9$ см от линзы, а другой конец — на расстоянии $d_2 = 18{,}1$ см. Определить увеличение k изображения.

1121. С каким увеличением k изображается тонкий прямой предмет, совпадающий на некотором участке с главной оптической осью собирательной линзы, если объект, установленный у одного из концов предмета, изображается с увеличением k_1, у другого конца — с увеличением k_2? Оба конца предмета находятся от линзы на расстоянии больше фокусного.

1122. Центр шарика поочередно помещают в точки A и B, находящиеся на оптической оси линзы по одну сторону от нее. Расстояние AB равно l. Линза дает поочередно два действительных изображения шарика с увеличениями соответственно k_A и k_B. Найти расстояние x между изображениями шариков.

1123. Каково наименьшее возможное расстояние s_0 между предметом и его действительным изображением, создаваемым с помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F?

1124. Расстояние между предметом и его действительным изображением, полученным с помощью собирающей линзы, $S = 6{,}25\,F$, где F — фокусное расстояние линзы. Определить расстояние от предмета до линзы d и от линзы до изображения f.

1125. Расстояние между свечой и экраном $L = 3{,}75$ м. Между ними помещается собирающая линза, которая дает на экране резкое изображение свечи при двух положениях линзы. Определить фокусное расстояние F линзы, если расстояние между указанными положениями линзы $l = 0{,}75$ м.

1126. Горящая свеча находится на расстоянии L от экрана. Помещая между экраном и свечой линзу с фокусным расстоянием F, можно получить на экране четкое изображение свечи при двух положениях линзы, находящихся на расстоянии l друг от друга. Найти l.

1127. Собирающая линза дает изображение некоторого предмета на экране. Высота изображения равна a. Оставляя неподвижными экран и предмет, начинают двигать линзу к экрану и находят, что при втором четком изображении предмета высота изображения равна b. Найти высоту предмета h.

1128. Предмет расположен на расстоянии $L = 0{,}6$ м от экрана. Используя собирающую линзу, можно получить на экране два четких изображения предмета при двух различных положениях линзы. Найти отношение k величин изображений, если расстояние между указанными положениями линзы составляет $l = 0{,}4$ м.

1129. Предмет находится на расстоянии $L = 0{,}9$ м от экрана. Между предметом и экраном перемещают линзу, причем при одном положении линзы на экране получается увеличенное изображение предмета, а при другом — уменьшенное. Каково фокусное расстояние F линзы, если линейные размеры первого изображения в $k = 4$ раза больше размеров второго?

1130. Между предметом и экраном помещается собирающая линза. Перемещая ее, получают на экране два отчетливых изображения предмета, соответствующих двум различным положениям линзы. Расстояние от предмета до экрана $L = 0{,}8$ м. Найти расстояние l между указанными положениями линзы, если отношение величин изображений предмета на экране $k = 9$.

1131. Предмет находится на расстоянии $a = 0{,}1$ м от переднего фокуса собирающей линзы, а экран, на котором получается четкое изображение предмета, расположен на расстоянии $b = 0{,}4$ м от заднего фокуса линзы. Найти фокусное расстояние F линзы. С каким увеличением k изображается предмет?

1132. Изображение предмета на матовом стекле фотоаппарата при съемке с расстояния $d_1 = 8{,}5$ м получилось высотой $h_1 = 13{,}5$ мм, а с расстояния $d_2 = 2$ м — высотой $h_2 = 60$ мм. Найти фокусное расстояние F объектива.

1133. Высота пламени свечи $H = 5$ см. Линза отбрасывает на экран изображение этого пламени высотой $h_1 = 15$ см. Не трогая линзы, свечу отодвинули на $l = 1{,}5$ см дальше от линзы и, передвинув экран, вновь получили резкое изображение пламени высотой $h_2 = 10$ см. Найти главное фокусное расстояние F линзы.

1134. Источник света находится на расстоянии $a = 5$ м от экрана, на котором с помощью собирающей линзы получают увеличенное в $k_1 = 4$ раза изображение источника. Затем экран отодвигают на $b = 4$ м. Восстановить четкость увеличенного изображения можно различными способами. Определить, какими будут увеличения k_2 и k_3, если сделать это: 1) передвинув только линзу, 2) передвинув только источник.

1135. Очковое стекло с оптической силой $D = +8$ дптр используется как лупа. Какое увеличение может дать эта лупа? Расстояние ясного зрения для нормального глаза $D_0 = 0{,}25$ м.

1136. Лупа дает пятикратное увеличение при рассматривании предмета, лежащего в ее фокальной плоскости. Эту лупу хотят использовать в качестве объектива проекционного фонаря. На каком расстоянии d от объектива должен располагаться диапозитив, чтобы на экране получилось его изображение, увеличенное в $k = 10$ раз?

1137. На каком расстоянии x от глаза надо держать маленький предмет при рассматривании его в лупу с фокусным расстоянием $F = 2$ см? Какое при этом получится увеличение k? Лупа находится на расстоянии $l = 5$ см от глаза, изображение — на расстоянии наилучшего зрения $D_0 = 25$ см.

1138. С помощью линзы, оптическая сила которой $D = +4$ дптр, необходимо получить увеличенное в $k = 5$ раз изображение предмета. На каком расстоянии d перед линзой нужно поместить этот предмет?

1139. Собирающая линза дает расходящийся пучок света, причем угол между крайними лучами пучка составляет $\alpha = 60°$. Найти фокусное расстояние F линзы, если ее диаметр $D = 10$ см, а точечный источник света находится на расстоянии $d = 4$ см от линзы.

1140. В электрическом фонарике перед лампочкой помещена собирающая линза диаметром $D = 6$ см с фокусным расстоянием $F = 6$ см. На каком расстоянии d от линзы находится лампочка, если угол раствора светового пучка, даваемого фонариком (угол между оптической осью и крайним лучом), составляет $\alpha = 45°$?

1141. Точечный источник света помещен в фокусе собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 6$ см. За линзой на расстоянии $l = 12$ см от нее расположен плоский экран, на котором видно круглое светлое пятно. В какую сторону и на какое расстояние x от фокуса линзы надо переместить (вдоль оптической оси) источник

света, чтобы радиус r светлого пятна на экране увеличился в $n = 2$ раза?

1142. Построить изображение точки, лежащей на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии, меньшем фокусного. Положение фокусов линзы задано.

1143. Найти построением положение светящейся точки, если известен ход двух лучей после их преломления в линзе (рис. 173). Один из этих лучей пересекается с главной оптической осью линзы в ее фокусе.

Рис. 173

1144. На каком расстоянии d от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 0{,}25$ м должен находиться предмет, чтобы его мнимое изображение совместилось с плоскостью, лежащей на расстоянии $f = 1$ м за линзой?

1145. Каково фокусное расстояние F линзы, дающей мнимое изображение предмета, помещенного перед ней на расстоянии $d = 0{,}4$ м, на расстоянии $f = 1{,}2$ м от линзы?

1146. Мнимое изображение предмета находится в фокальной плоскости собирающей линзы. На каком расстоянии от линзы находится сам предмет?

1147. Величина прямого изображения предмета, полученного с помощью двояковыпуклой линзы, вдвое ($k = 2$) больше величины предмета. Расстояние между изображением и предметом $l = 20$ см. Определить фокусное расстояние F линзы.

1148. Собирающая линза с оптической силой $D = 0{,}5$ диоптрий помещена между двумя точечными источниками так, что отношение расстояний d_1 и d_2 источников до линзы составляет $d_1/d_2 = n = 4$. Расстояние между изображениями $l = 2$ м, причем изображения находятся по одну сторону линзы. Найти расстояние x между источниками.

1149. Два точечных источника света находятся на расстоянии $l = 24$ см друг от друга. Между ними, на расстоянии $d = 6$ см от одного из них, помещена тонкая собирающая линза. При этом изображения обоих источников получились в одной и той же точке. Найти фокусное расстояние F линзы.

1150. Расстояние от предмета до линзы $d = 10$ м, от линзы до изображения $f = 2{,}5$ м. Определить оптическую силу D линзы в случаях: 1) изображение мнимое, 2) изображение действительное.

1151. Главное фокусное расстояние собирающей линзы $F = 18$ см. Где расположена светящаяся точка, если ее изображение получается на расстоянии $f = 12$ см от линзы и $L = 5$ см от главной оптической оси?

1152. Увеличение, даваемое линзой, $k = 10$. Найти ее фокусное расстояние F, если расстояние от линзы до предмета $d = 9{,}9$ см. Рассмотреть два случая.

1153. Фокусное расстояние собирающей линзы $F = 10$ см, расстояние предмета от фокуса $l = 5$ см, линейные размеры предмета $h = 2$ см. Определить величину H изображения. Рассмотреть два случая.

1154. Оптическая ось собирательной линзы совпадает с осью светового конуса, образованного сходящимся пучком лучей, а фокус линзы совпадает с вершиной конуса. На каком расстоянии f от линзы пересекутся лучи после преломления, если оптическая сила линзы $D = 5$ дптр?

1155. На пути сходящегося пучка лучей поставили собирательную линзу с фокусным расстоянием $F = 7$ см. В результате лучи сошлись в точке A на расстоянии $f = 5$ см от линзы. На каком расстоянии l от точки A сойдутся лучи, если линзу убрать?

1156. Цилиндрический пучок лучей, параллельных главной оптической оси рассеивающей линзы, имеет диаметр $s_1 = 5$ см. Пройдя линзу, пучок дает на экране пятно диаметром $s_2 = 7$ см. Каков будет диаметр s_3 пятна, если рассеивающую линзу заменить собирающей с тем же фокусным расстоянием?

1157. Цилиндрический пучок света направляется на собирающую линзу параллельно ее оптической оси. Диаметр пучка $D_1 = 4$ см. За линзой стоит экран, на котором пучок дает пятно диаметром $D_2 = 2$ см. На место собирающей линзы поставили рассеивающую с тем же фокусным расстоянием. Каков будет теперь диаметр D_3 пятна на экране?

1158. Мнимое изображение светящейся точки в рассеивающей линзе находится в два раза ближе к линзе, чем сама точка. Найти положение светящейся точки, если известно, что она лежит на оптической оси линзы. Оптическая сила линзы $D = -5$ дптр.

1159. Висящий на стене здания термометр рассматривают через рассеивающую линзу. Линза расположена параллельно стене ниже термометра, так что шарик термометра виден в направлении побочной оси линзы, отклоняющейся от главной оси вверх на угол $\alpha = 30°$. Под каким углом β к главной оси расположена побочная ось, на которой лежит изображение верхней точки термометра, если длина изображения термометра $H = 6{,}4$ см, расстояние между линзой и стеной $d = 60$ см, оптическая сила линзы $D = -5$ диоптрий?

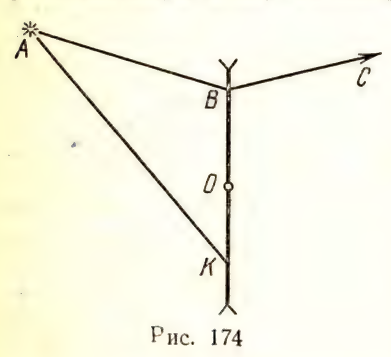


Рис. 174

1160. Светящаяся точка A расположена перед рассеивающей линзой, положение оптического центра O которой известно (рис. 174). Известен также ход одного из лучей ABC. Построить ход другого луча AK.

1161. Построить ход произвольного луча AB, падающего на рассеивающую линзу, после преломления в ней (рис. 175). Положение оптической оси линзы и ее фокусов задано.

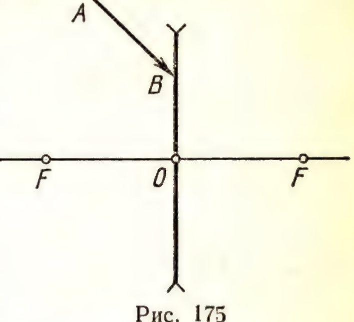


Рис. 175

1162. Предмет размером $h = 0{,}03$ м расположен на расстоянии $d = 0{,}15$ м от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 0{,}3$ м. На каком расстоянии f от линзы получится изображение? Какова будет величина изображения H?

1163. Точечный источник света, помещенный первоначально на расстоянии $d_1 = 1{,}2$ м от рассеивающей линзы, приближается к ней вдоль оптической оси до расстояния $d_2 = 0{,}6$ м. При этом мнимое изображение источника проходит вдоль оптической оси расстояние $l = 10$ см. Найти фокусное расстояние F линзы.

1164. Световой луч, падающий на рассеивающую линзу, после преломления в ней пересекает главную оптическую ось линзы в точке, отстоящей от линзы на расстояние $f = 9$ см. В какой точке пересечет луч ту же ось, если линзу убрать? Фокусное расстояние линзы $F = 13{,}5$ см.

1165. Сходящийся пучок лучей, проходящий через отверстие диаметром $a = 5$ см в непрозрачной ширме, дает на экране, расположенном за ширмой на расстоянии $l = 20$ см, светлое пятно диаметром $b = 4$ см. После того как в отверстие вставили линзу, пятно превратилось в точку. Определить фокусное расстояние F линзы.

1166. Сходящийся пучок лучей имеет вид конуса с вершиной в точке A. Когда на пути лучей поставили рассеивающую линзу, сходящийся пучок превратился в расходящийся с вершиной в точке B. Зная, что точки A и B лежат на главной оптической оси линзы на расстоянии $l = 0{,}45$ м друг от друга и оптический центр линзы делит отрезок BA в отношении $n : m = 1 : 2$, определить фокусное расстояние F линзы.

1167. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F = 12$ см помещена между двумя точечными источниками в два раза ближе к одному из них, чем к другому. Расстояние между изображениями источников получилось равным $l = 7{,}8$ см. Найти расстояние L между самими источниками.

1168. Экран расположен на расстоянии $L = 21$ см от отверстия, в которое вставлена линза диаметром $a = 5$ см. На линзу падает сходящийся пучок лучей, в результате чего на экране образуется светлое пятно диаметром $b = 3$ см. Оказалось, что если линзу убрать, то диаметр пятна не изменяется. Определить фокусное расстояние F линзы.

1169. Оптическая сила тонкой стеклянной линзы в воздухе $D = 5$ дптр. Определить фокусное расстояние F той же линзы,

погруженной в воду. Показатель преломления стекла $n_{ст} = 3/2$, воды $n_в = 4/3$.

1170. В стеклянном стержне (показатель преломления стекла $n_{ст} = 1{,}5$) имеется воздушная полость в виде тонкой раковины, одна сторона которой плоская и перпендикулярна к оси стержня, а другая — выпуклая с радиусом кривизны $R = 10$ см. Вдоль стержня распространяется пучок параллельных лучей. На каком расстоянии F от воздушной полости будет расположена вершина конуса световых лучей (их фокус) после прохождения света через воздушную полость?

1171. В куске стекла с показателем преломления $n_{ст} = 1{,}5$ имеется воздушная полость в виде двояковыпуклой тонкой линзы с радиусами кривизны поверхностей $R = 10$ см. На оптической оси этой линзы внутри куска стекла на расстоянии $d = 20$ см от линзы находится песчинка. Определить расстояние f между изображением песчинки и линзой.

1172. Для оптического стекла «флинт» показатели преломления для крайних лучей видимого спектра равны $n_1 = 1{,}745$ и $n_2 = 1{,}809$. Из этого стекла сделана двояковыпуклая линза, радиусы кривизны которой $R_1 = R_2 = 0{,}2$ м. Определить расстояние x между главными фокусами линзы для крайних лучей спектра.

1173. Собирательная линза, радиусы кривизны поверхностей которой $R_1 = 12{,}5$ см и $R_2 = 26$ см, дает действительное изображение предмета на расстоянии $f = 24$ см от линзы, когда предмет находится на расстоянии $d = 50$ см от линзы. Та же линза, погруженная в жидкость, действует как рассеивающая с фокусным расстоянием $F = 1$ м. Определить показатель преломления n жидкости.

1174. Две собирающие линзы одинаковой формы сделаны из разных сортов стекла. Показатель преломления стекла первой линзы $n_1 = 1{,}5$, а второй $n_2 = 1{,}7$. Определить отношение фокусных расстояний линз в воздухе ($n \approx 1$) и в воде ($n_в = 4/3$).

1175. Тонкая плоско-выпуклая линза с фокусным расстоянием $F_1 = 10$ см немного погружена плоской стороной в воду, так что сферическая поверхность линзы находится в воздухе. Сверху на линзу отвесно падают параллельные лучи света. На каком расстоянии F_2 от нижней поверхности линзы сфокусируются световые лучи? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. Диаметр линзы много меньше ее фокусного расстояния.

1176. Фотограф с лодки снимает морскую звезду, лежащую на дне прямо под ним на глубине $H = 2$ м. Во сколько раз изображение на пленке будет меньше предмета, если фокусное расстояние объектива $F = 10$ см, расстояние от объектива до поверхности воды $l = 50$ см? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

1177. В музее сфотографирована большая гравюра, а затем и ее отдельные фрагменты в натуральную величину. Во сколько раз было увеличено время экспозиции при фотографировании деталей гравюры, чтобы интенсивность почернения фотопластинки была одинаковой?

§ 31. Оптические системы

Расчет изображений в сложных оптических системах удобно производить, разбив его на последовательные этапы.

Не обращая первоначально внимания на все линзы и зеркала системы, кроме первого, нужно вычислить положение изображения, даваемого первой линзой или зеркалом. Это изображение в свою очередь служит источником для второй линзы, которая также рассматривается отдельно от всех остальных частей системы.

При этом если первый компонент системы дает мнимое изображение, то на второй компонент падают расходящиеся лучи и, следовательно, источник для него будет действительным. Если же первая линза (или зеркало) дает действительное изображение, то на вторую линзу могут, в зависимости от ее положения, падать сходящиеся или расходящиеся лучи. В первом случае источник для второй линзы (или зеркала) должен, как обычно, считаться мнимым, во втором случае — действительным. Так как лучи падают далее на следующую линзу или зеркало, то процесс расчета продолжается и далее до выхода лучей из системы.

Величина полученного изображения и увеличение рассчитываются аналогично. Особый интерес представляет вычисление углового увеличения, за меру которого можно принять отношение тангенсов углов между пучками лучей, входящими в систему и выходящими из нее. Если рассматривать только приосевые пучки (малые углы), то отношение тангенсов можно заменить отношением синусов или отношением самих углов.

Микроскоп можно рассчитывать как двухлинзовую систему, в которой действительное изображение, даваемое объективом, рассматривается в окуляр как в лупу. Увеличение микроскопа вычисляется как произведение увеличений объектива и окуляра. При длительной работе глаз наблюдателя должен быть не напряжен (аккомодирован на бесконечность). Это означает, что объектив создает изображение в фокальной плоскости окуляра, и увеличение окуляра $k_2 = D_0/F_2$, где D_0 — расстояние ясного зрения глаза нормального человека, F_2 — фокусное расстояние окуляра (см. задачу 1135). Увеличение объектива $k_1 = \delta/F_1$, где F_1 — фокусное расстояние объектива, δ — длина тубуса микроскопа (расстояние между задним фокусом объектива и передним фокусом окуляра). Таким образом, увеличение микроскопа $k = k_1k_2 = \delta D_0/F_1F_2$.

Под расстоянием ясного зрения D_0 во всех задачах понимается наименьшее расстояние, на котором человек может четко видеть детали предметов без чрезмерного напряжения глаза. Так как чрезмерное напряжение глаза нигде не предполагается, под расстоянием ясного зрения D_0 можно подразумевать ближний предел аккомодации нормального глаза. Во всех задачах считается, что $D_0 = 25$ см.

Очки, рассматриваемые в ряде задач, представляют собой тонкие линзы, вплотную прилегающие к глазу.

1178. Две линзы, фокусные расстояния которых F_1 и F_2, приставлены вплотную друг к другу. С помощью этих линз получают изображение источника, расположенного на некотором расстоянии перед линзами, затем, убрав обе линзы, заменяют их одной, помещенной на том же месте. Какова должна быть оптическая сила этой линзы, чтобы изображение источника не сдвинулось?

1179. Точечный источник света помещен в фокусе рассеивающей линзы. Собирательная линза, приставленная вплотную к рассеивающей, превращает падающий на нее из рассеивающей линзы расходящийся пучок лучей в параллельный. Найти отношение фокусных расстояний линз.

1180. Фотографическим аппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние $F_1 = 13{,}5$ см, требуется сфотографировать предмет, находящийся на расстоянии $d = 18$ см от объектива. Расстояние от фотопластинки до объектива $f = 27$ см. Каково должно быть фокусное расстояние F_2 так называемой насадочной линзы, которую надо приставить вплотную к объективу, чтобы изображение на фотопластинке было резким?

1181. Тонкая плоско-выпуклая линза изготовлена из вещества с показателем преломления n. Радиус кривизны выпуклой поверхности R. Плоская поверхность линзы посеребрена. Найти оптическую силу D такой сложной системы.

1182. Предмет расположен на расстоянии $d = 18$ см от плосковыпуклой линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см (выпуклая сторона линзы обращена к предмету). На каком расстоянии f от линзы расположится изображение предмета, если заднюю плоскую поверхность линзы посеребрить?

1183. Сходящийся пучок лучей, падающий на двояковогнутую линзу с посеребренной задней поверхностью, радиус кривизны которой $R = 3$ м, имеет вид конуса. Вершина этого конуса лежит на расстоянии $d = 4$ м за линзой. Преломившись на передней поверхности линзы, отразившись от задней и снова преломившись на передней, лучи сходятся в точку, лежащую на расстоянии $f_1 = 12$ м перед линзой. На каком расстоянии f_2 за линзой сошлись бы лучи, если бы задняя сторона линзы не была посеребрена?

1184. Плоское зеркало стоит в центре вогнутого сферического зеркала радиуса $R = 60$ см перпендикулярно к его главной оптической оси. На главной оптической оси на расстоянии $L = 15$ см от плоского зеркала находится светящаяся точка. Найти положение изображения этой точки, даваемое лучами, отраженными сначала от вогнутого, а потом от плоского зеркала.

1185. Точечный источник света находится на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на ее оптической оси. Плоское зеркало расположено перпендикулярно к оси на таком расстоянии за линзой, что лучи, отразившись от зеркала и вторично пройдя через линзу, идут параллельным пучком. Найти диаметр l пучка, если диаметр линзы равен L.

1186. На расстоянии $d = 15$ см перед собирающей линзой с фокусным расстоянием $F = 30$ см помещена свеча. За линзой на расстоянии $l = 15$ см от нее находится плоское зеркало, параллельное линзе. На каком расстоянии x от линзы получится изображение свечи, даваемое этой оптической системой?

1187. На оптической оси рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см на расстоянии $d = 15$ см от линзы расположен точечный источник света. По другую сторону линзы на расстоянии $l = 5$ см от нее помещено плоское зеркало перпендикулярно к оптической оси линзы. Определить расстояние x между источником и его мнимым изображением в зеркале.

1188. Параллельный пучок света падает на линзу, а затем на вогнутое зеркало. Фокусное расстояние зеркала $F_2 = 24$ см. Расстояние между линзой и зеркалом $l = 32$ см. Каким должно быть фокусное расстояние F_1 линзы, чтобы свет, отразившись от зеркала, собрался в точке, удаленной от зеркала на расстояние $f = 6$ см?

1189. Собирательная линза с фокусным расстоянием F помещена на расстоянии l перед вогнутым зеркалом, радиус кривизны которого R. На каком расстоянии d перед линзой нужно поместить точечный источник света, чтобы лучи, пройдя линзу, отразившись от зеркала и снова пройдя линзу, собрались в той же точке, где расположен источник? При каких расстояниях l линзы от зеркала решение возможно?

1190. На расстоянии $d = 10$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см на ее оптической оси помещен точечный источник света. Лучи, преломившиеся в линзе, падают на выпуклое зеркало, расположенное на расстоянии $l = 3$ см за линзой. Отраженные от зеркала лучи, вновь пройдя через линзу, идут пучком, параллельным оптической оси (рис. 176). Определить радиус R кривизны зеркала.

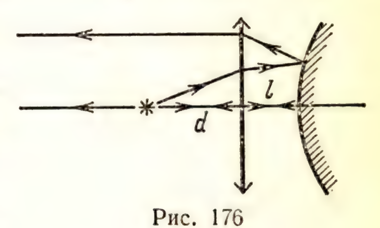


Рис. 176

1191. Точечный источник света находится на оптической оси линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см на расстоянии $d = 15$ см от линзы. За линзой расположено выпуклое зеркало, радиус кривизны которого $R = 24$ см. Линза формирует изображение источника с помощью его лучей, прошедших через линзу, отраженных от зеркала и вновь прошедших через линзу. На каком минимальном расстоянии x от линзы должно находиться зеркало, чтобы изображение источника света совпало с самим источником?

1192. Рассеивающая линза и вогнутое зеркало размещены на одной оси так, что пучок лучей, параллельный этой оси, пройдя линзу, отразившись от зеркала и еще раз пройдя линзу, остается параллельным той же оси. Где и какое получится изображение, если поместить точечный источник света в оптическом центре зеркала? Фокусное расстояние линзы $F_1 = 12$ см, зеркала $F_2 = 36$ см.

1193. На противоположных сторонах внутренней поверхности сферы радиуса R посеребрены малые участки. Светящаяся точка находится на диаметре, соединяющем центры участков. На каком расстоянии x от центра сферы должна находиться эта точка, чтобы после отражения от одного, а затем от другого участка лучи сошлись на расстоянии $y = \frac{3}{4}R$ от центра?

1194. Две линзы с оптическими силами $D_1 = +5$ дптр и $D_2 = +3$ дптр находятся на расстоянии $l = 10$ см друг от друга. На каком расстоянии от задней линзы получается изображение бесконечно удаленного источника, даваемое этой системой, если свет источника попадает сначала на линзу: 1) с оптической силой D_1, 2) с оптической силой D_2?

1195. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 10$ см и $F_2 = 15$ см расположены вдоль общей главной оптической оси на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Где следует поместить точечный источник света, чтобы идущие от него лучи по прохождении обеих линз образовали пучок лучей, параллельных главной оптической оси?

1196. На расстоянии $d_1 = 25$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см помещен предмет высотой $l = 2$ см. Вторая собирающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = 40$ см расположена на расстоянии $a = 1{,}5$ м от первой. Оптические оси обеих линз совпадают. На каком расстоянии f_2 от второй линзы получится изображение предмета после прохождения лучей через обе линзы? Какова высота L_2 полученного изображения?

1197. Две двояковыпуклые линзы с фокусными расстояниями $F = 0{,}1$ м каждая находятся на расстоянии $l = 0{,}25$ м друг от друга. Перед первой линзой на расстоянии $d = 0{,}2$ м от нее расположен предмет. На каком расстоянии x от предмета находится его изображение, даваемое системой этих двух линз?

1198. Имеются две тонкие собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 2$ см и $F_2 = 20$ см. Расстояние между линзами $l = 24$ см. Построить изображение предмета, находящегося на расстоянии $d = 3$ см от первой линзы. Рассчитать увеличение k.

1199. Предмет, линейные размеры которого $l = 2$ см, рассматривается через оптическую систему, состоящую из двух линз. Фокусное расстояние первой линзы $F_1 = 10$ см, второй $F_2 = 15$ см. Предмет расположен перпендикулярно к общей оптической оси линз на расстоянии $d = 10$ см от первой линзы. Найти линейные размеры L изображения предмета, даваемого этой системой линз. Построить изображение.

1200. В трубу вставлены две одинаковые собирающие линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см каждая. Предмет расположен на расстоянии $d = 3$ м от первой линзы. На каком расстоянии f от второй линзы получится изображение, если расстояние между линзами $a = 25$ см?

1201. Фокусные расстояния двух собирающих линз равны соответственно $F_1 = 5$ см и $F_2 = 3$ см. На каком расстоянии l друг от друга надо поставить на общей оси эти линзы, чтобы параллельный пучок света, вошедший в одну из них, вышел бы из другой также в виде параллельного пучка?

1202. На каком расстоянии l друг от друга нужно расположить две линзы — собирающую с фокусным расстоянием $F_1 = 10$ см и рассеивающую с фокусным расстоянием $F_2 = 6$ см, чтобы параллельный пучок света, пройдя сквозь них, остался параллельным?

1203. На систему из трех линз, расположенных так, что их оптические оси совпадают, падает параллельный пучок света. Первая линза (собирающая) имеет фокусное расстояние $F_1 = 10$ см. Вторая линза (рассеивающая с фокусным расстоянием $F_2 = 20$ см) помещена от первой на расстоянии $L = 15$ см. На каком расстоянии x от второй линзы стоит третья линза (собирающая с фокусным расстоянием $F_3 = 10$ см), если выходящий из системы пучок остался параллельным?

1204. Собирающая и рассеивающая линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 30$ см и $F_2 = 10$ см соответственно расположены на расстоянии $l = 20$ см друг от друга. На собирающую линзу падает параллельный пучок света. Диаметр пучка $D_1 = 12$ мм. Каков диаметр D_2 пучка на расстоянии $L = 20$ см за рассеивающей линзой?

1205. Собирающая и рассеивающая линзы, имеющие одинаковые фокусные расстояния $F = 20$ см, расположены на расстоянии $l = 25$ см друг от друга. Оптические оси обеих линз совпадают. Где следует поместить точечный источник света, чтобы система линз дала параллельный пучок лучей? Построить ход лучей в случае, когда источник не находится на оптической оси линз.

1206. Оптическая система состоит из рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 8$ см и собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 10$ см, расположенных на расстоянии $l = 6$ см друг от друга на общей оси. На каком расстоянии d от рассеивающей линзы следует поместить на оси светящуюся точку, чтобы после прохождения системы лучи шли параллельно друг другу?

1207. Оптическая система состоит из двух линз — рассеивающей с фокусным расстоянием $F_1 = 10$ см и собирающей с фокусным расстоянием $F_2 = 15$ см, расположенных вдоль общей главной оптической оси на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. На расстоянии $d = 12$ см от рассеивающей линзы на главной оптической оси помещают точечный источник света. Определить расстояние x между источником и его действительным изображением.

1208. На каком минимальном расстоянии l могли бы быть помещены на Луне два ярких источника света для того, чтобы они могли быть видны с Земли в телескоп раздельно? Фокусное расстояние объектива телескопа $F_1 = 8$ м и окуляра $F_2 = 1$ см. Человеческий глаз может видеть раздельно два предмета, наблюдаемые под углом не менее $\varphi_0 = 0{,}001$ рад. Расстояние от Земли до Луны $r \approx \approx 380\,000$ км.

1209. Фокусное расстояние объектива трубы Галилея $F_1 = 45$ см, окуляра $F_2 = 5$ см. При замене линз в трубе на две положительные получилась труба Кеплера с тем же увеличением, что и труба Галилея. Найти фокусные расстояния F_3 и F_4 двух собирающих линз.

1210. Зрительная труба с фокусным расстоянием объектива $F = 24$ см установлена на бесконечность. После того как окуляр трубы был передвинут на некоторое расстояние, стали ясно видны предметы, удаленные от объектива на $d = 6$ м. На какое расстояние a передвинули окуляр?

1211. Для определения увеличения оптической трубы, окуляром которой является собирающая линза, пользуются следующим приемом: вывернув объектив, помещают на его место квадратную диафрагму со стороной L. Окуляр даст действительное изображение диафрагмы. Определить увеличение k оптической трубы, если размер изображения диафрагмы оказался равным l.

1212. Какова длина l зрительной трубы, объективом и окуляром которой служат тонкие линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 25$ см и $F_2 = 8$ см соответственно, если рассматриваемый предмет находится очень далеко, а его изображение, даваемое окуляром, находится от окуляра на расстоянии наилучшего зрения $D_0 = 25$ см?

1213. Для наблюдения некоторого объекта надо применить длиннофокусный микроскоп, объектив которого не должен приближаться к объекту наблюдения ближе, чем на $d = 5$ см. С каким фокусным расстоянием F надо взять объектив, если увеличение микроскопа должно быть $k_1 = 180$, а увеличение имеющегося окуляра $k_2 = 20$?

1214. Фокусное расстояние объектива микроскопа $F_1 = 0{,}5$ см, расстояние между линзой объектива и линзой окуляра $l = 16$ см. Увеличение микроскопа для нормального глаза $k = 200$. Найти увеличение k_2 окуляра, считая расстояние наилучшего зрения для нормального глаза $D_0 = 25$ см.

1215. Фокусное расстояние окуляра микроскопа $F_2 = 4$ см. Расстояние между объективом и окуляром $l = 16$ см. Увеличение микроскопа $k = 300$. Найти фокусное расстояние F_1 объектива микроскопа.

1216. Каково увеличение k микроскопа, фокусные расстояния объектива и окуляра которого равны соответственно $F_1 = 8$ мм и $F_2 = 5$ см, а расстояние от линзы объектива до линзы окуляра $l = 21$ см?

1217. Главное фокусное расстояние объектива микроскопа $F_1 = 3$ мм, окуляра $F_2 = 5$ см. Предмет находится от объектива на расстоянии $d_1 = 3{,}1$ мм. Найти увеличение k микроскопа для нормального глаза и расстояние l между линзами.

1218. Фокусное расстояние объектива микроскопа $F_1 = 4$ мм, а окуляра $F_2 = 2{,}5$ см. Предмет помещается на расстоянии $a = 0{,}2$ мм от главного фокуса объектива. 1) Какова длина δ тубуса микроскопа? 2) Каково увеличение k этого микроскопа?

1219. Предмет находится на расстоянии $d_1 = 6{,}1$ мм от объектива микроскопа. Главное фокусное расстояние окуляра $F_2 = 1{,}25$ см. Определить главное фокусное расстояние объектива F_1, если микроскоп дает увеличение $k = 1200$ раз.

1220. Фокусное расстояние объектива микроскопа $F_1 = 0{,}3$ см, длина тубуса (расстояние от заднего фокуса объектива до переднего фокуса окуляра) $\delta = 15$ см, увеличение микроскопа $k = 2500$. Определить фокусное расстояние F_2 окуляра.

1221. Ближний предел аккомодации глаза близорукого человека $d_1 = 10$ см, дальний $d_2 = 12{,}5$ см. Каковы будут эти пределы d'_1 и d'_2, если человек наденет очки с оптической силой $D_{очк} = -7$ дптр?

1222. Ученик привык читать книгу, держа ее на расстоянии $d = 20$ см от глаз. Какова должна быть оптическая сила $D_{очк}$ очков, которые должен носить ученик, чтобы он читал книгу, держа ее на расстоянии ясного зрения?

1223. Близорукий человек может четко видеть предмет, если он находится на расстоянии не дальше $d = 20$ см от глаза. Какова должна быть оптическая сила $D_{очк}$ очков, которые должен носить этот человек, чтобы видеть четко очень удаленные предметы?

1224. Какие очки необходимо прописать близорукому человеку, о котором шла речь в задаче 1221, чтобы исправить недостатки его зрения?

1225. Дальнозоркий человек может читать книгу, держа ее на расстоянии не менее $d = 80$ см от глаза. Какова должна быть оптическая сила $D_{очк}$ очков, которые должен носить этот человек, чтобы указанное расстояние было $D_0 = 25$ см?

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

МЕХАНИКА

§ 1. Прямолинейное движение

1. 1) Начало координат поместим в пункте отправления поездов, ось координат направим по движению (рис. 177). Координата товарного поезда в момент времени t, когда его догнал экспресс, $s_1 = v_1 t$. Координата экспресса, который шел на время t_1 меньше, в этот же момент времени $s_2 = v_2(t - t_1)$. Обе эти координаты должны быть равны координате места, где экспресс догнал товарный поезд: $s_1 = s_2 = s$. Приравняв s_1 и s_2, находим:

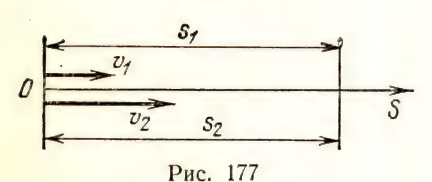


Рис. 177

$$t = \frac{v_2 t_1}{v_2 - v_1} = 1 \text{ ч}, \quad s = \frac{v_1 v_2 t_1}{v_2 - v_1} = 36 \text{ км}.$$

2) Графическое решение представлено на рис. 178, где линия I — график движения товарного поезда, линия II — график движения экспресса. Точка пересечения этих линий определяет координату места, где экспресс догонит товарный поезд, и время, когда это произойдет.

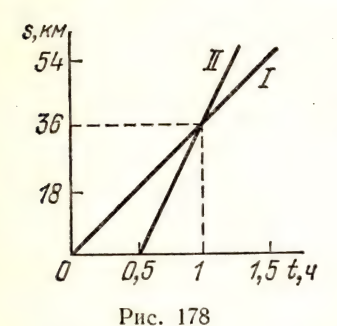


Рис. 178

2. 1) Начало координат поместим в C, ось S направим от C к B (рис. 179). Законы движения первой и второй автомашин:

$$s_1 = -\frac{L}{2} + v_1 t, \quad s_2 = \frac{L}{2} - v_2 t.$$

Рис. 179

При встрече координаты должны быть одинаковы, $s_1 = s_2 = s$. Приравняв s_1 и s_2, находим:

$$t = L/(v_1 + v_2) = 1{,}5 \text{ ч}.$$

Координата места встречи (расстояние от C)

$$s = \frac{L}{2} - v_2 t = -\frac{L}{2} + v_1 t = -30 \text{ км}.$$

2) График движения машин представлен на рис. 180. Линии I и II — графики движения первой и второй машин соответственно. Точка их пересечения определяет время и координату места встречи.

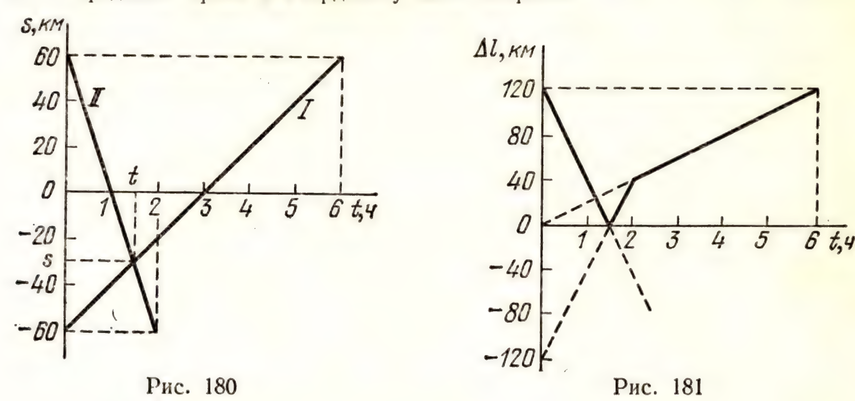


Рис. 180 Рис. 181

3) График зависимости расстояния Δl между машинами от времени показан на рис. 181.

3. Закон движения конца A: $x_A = b + vt$, $y_A = 0$. Следовательно, $y_B = \sqrt{l^2 - (b+vt)^2}$.

4. *Вариант* I. В неподвижной системе координат (рис. 182) обгон начинается, когда координаты начала электропоезда и конца товарного поезда

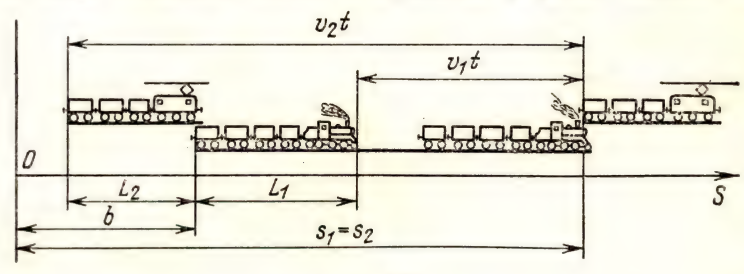


Рис. 182

одинаковы и равны, скажем, величине b. Заканчивается обгон, когда одинаковы координата s_1 начала товарного поезда и координата s_2 конца электропоезда. Если за начальный момент времени принять начало обгона, то закон движения начала товарного поезда $s_1 = b + L_1 + v_1 t$, а закон движения конца электропоезда $s_2 = b - L_2 + v_2 t$. Приравняв s_1 и s_2, получим:

$$t = (L_1 + L_2)/(v_2 - v_1) = 50 \text{ с}.$$

Вариант II. Возьмем систему координат, движущуюся вместе с товарным поездом, начало которой совпадает с началом этого поезда, а направление —

с направлением его движения (рис. 183). В этой системе координат скорость электропоезда $v_{отн}=v_2-v_1$. Закон движения конца электропоезда, если за начальный момент времени принять начало обгона, $s=-(L_1+L_2)+v_{отн}\cdot t$. В момент завершения обгона конец электропоезда будет в начале нашей системы координат. Поэтому его координата будет равна $s=0$. Следовательно, для этого момента времени

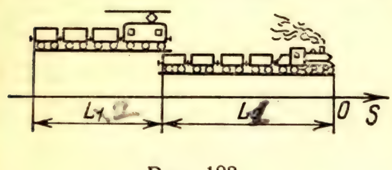


Рис. 183

$$L_1+L_2=v_{отн}\cdot t,$$
$$t=(L_1+L_2)/(v_2-v_1)=50 \text{ с}.$$

5. $L=(v_1+v_2)\,t=150$ м.

6. $v_1=\sqrt{v_2^2-\dfrac{2Lv_2}{t}}=15$ м/с.

7. В системе координат, изображенной на рис. 184, законы движения: плоскости $x_1=s=vt$, $y_1=0$; стержня: $x_2=0$, $y_2=h=v_{ст}\cdot t$. Для любого момента времени $y_2=h=s\operatorname{tg}\alpha$, следовательно, $v_{ст}=v\operatorname{tg}\alpha$.

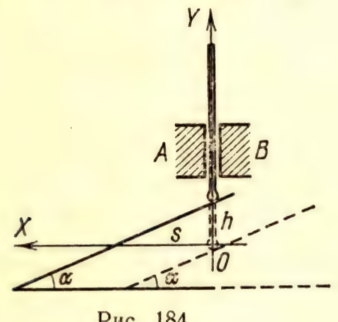


Рис. 184

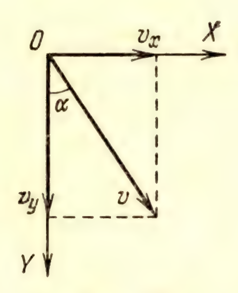


Рис. 185

8. Вертикальная составляющая скорости капли $v_y=v\cos\alpha$ от движения трамвая и ветра не зависит. Горизонтальная составляющая при неподвижном трамвае определяется скоростью ветра и равна $v_x=v\sin\alpha=v_в$; при движении трамвая, согласно условию,

$$v_x'=v\sin\alpha-v_т=0, \quad \text{или} \quad v_в=v_т=5 \text{ м/с}.$$

Из рис. 185 скорость капли в безветренную погоду равна

$$v_y=v_x\operatorname{ctg}\alpha=v_т\operatorname{ctg}\alpha=8{,}66 \text{ м/с}.$$

9. Возьмем систему координат с началом в том месте, где пловец входит в воду. Ось OX направим вдоль берега по течению, ось OY — перпендикулярно к берегу. Предположим, что v_2 составляет с OX угол α (рис. 186). Тогда законы движения для проекций на координатные оси будут $x=(v_1+v_2\cos\alpha)\cdot t$ и $y=(v_2\sin\alpha)\cdot t$. Пловец попадает на другой берег, когда $y=H$. Следовательно, время, необходимое для переплывания реки, $t=H/(v_2\sin\alpha)$. Оно будет минимальным, когда $\sin\alpha$ максимален, т. е. $\alpha=\pi/2$ (рис. 187), и $t_{мин}=H/v_2$.

При $\alpha=\pi/2$ имеем: $x=v_1t$. Поэтому, когда пловец окажется на другом берегу, $x=x_1=v_1t_{\text{мин}}=v_1H/v_2$. Длина пути s определяется выражением:

$$s=\sqrt{x_1^2+H^2}=\frac{H}{v_2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}.$$

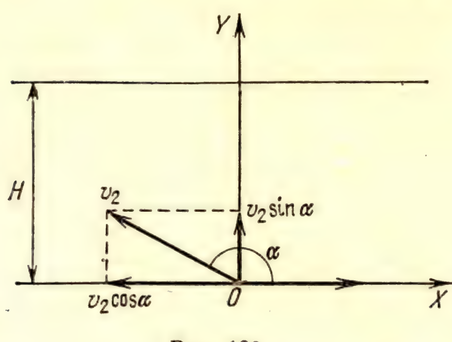


Рис. 186

Рис. 187

10. В системе координат с началом в пункте A (рис. 188) координаты лодки $x=(v_1-v_0\cos\alpha)\cdot t$, $y=(v_0\sin\alpha)\cdot t$. После подстановки $x=L$, $y=H$ получим:

$$v_0=\frac{Hv_1}{L\sin\alpha+H\cos\alpha}.$$

11. Направим ось OX системы координат против движения корабля (т. е. на восток), а ось OY — перпендикулярно к движению — на север, как

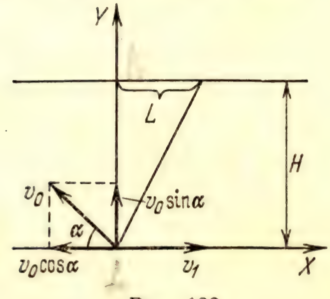


Рис. 188

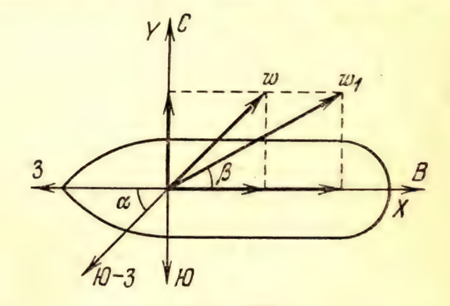


Рис. 189

показано на рис. 189. Составляющая $w_{1x}=w_1\cos\beta$ скорости ветра w_1 относительно корабля больше составляющей $w_x=w\cos\alpha$ скорости ветра w относительно земли на величину скорости корабля v (здесь β и α — углы между курсом корабля и направлениями скоростей w_1 и w соответственно), т. е.

$$w_1\cos\beta=w\cos\alpha+v. \tag{1}$$

Составляющие скоростей $w_{1y}=w_1\sin\beta$ и $w_y=w\sin\alpha$ в направлении, перпендикулярном к движению корабля, равны между собой, т. е.

$$w_1\sin\beta=w\sin\alpha. \tag{2}$$

Чтобы исключить неизвестный угол β, возведем (1) и (2) в квадрат и сложим почленно. В результате получим: $w_1^2 = w^2 + v^2 + 2vw\cos\alpha$. Отсюда

$$w = -v\cos\alpha \pm \sqrt{v^2(\cos^2\alpha - 1) + w_1^2},$$

или, учитывая, что $\alpha = 45°$,

$$w = -\frac{v}{\sqrt{2}} + \sqrt{w_1^2 - \frac{v^2}{2}}.$$

Здесь мы отбросили отрицательный корень, так как согласно условию задачи $w > 0$ (этот корень появился при возведении в квадрат уравнений (1) и (2)).

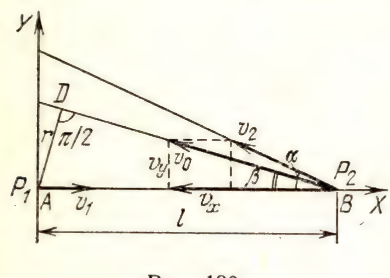


Рис. 190

12. Рассмотрим движение точки P_2 относительно точки P_1. В системе координат XOY, связанной с точкой P_1 и расположенной, как показано на рис. 190, составляющие относительной скорости v_0 точки P_2 будут $v_x = -(v_1 + v_2\cos\alpha)$ и $v_y = v_2\sin\alpha$. Сама относительная скорость $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ направлена по диагонали прямоугольника, построенного на v_x и v_y. Кратчайшим расстоянием между точками P_1 и P_2 за все время их движения будет, очевидно, длина перпендикуляра $AD = r$ к линии, по которой направлена относительная скорость. Если обозначить угол между осью OX и относительной скоростью v_0 через β, то $r = l\sin\beta$, причем $\sin\beta = v_y/v_0$. Таким образом,

$$r = \frac{lv_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{lv_2\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}}.$$

Время t, в течение которого точка P_2 в относительном движении пройдет расстояние $BD = l\cos\beta$, равно

$$t = \frac{BD}{v_0} = \frac{l\cos\beta}{v_0}.$$

После подстановки значений $\cos\beta = \left|\frac{v_x}{v_0}\right|$, v_x и v_0 получим:

$$t = \frac{l(v_1 + v_2\cos\alpha)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}.$$

13. Время движения первого паровоза $t_1 = \frac{l}{2v_1} + \frac{l}{2v_2}$, его средняя скорость $v_{\text{ср}1} = 2v_1v_2/(v_1 + v_2) = 53{,}3$ км/ч.

Путь, пройденный вторым паровозом, $l_2 = (v_1 + v_2)\,t/2$, его средняя скорость $v_{\text{ср}2} = (v_1 + v_2)/2 = 60$ км/ч.

14. 1) $v_{\text{к}} = v_0 + a_2t_2 + a_3t_3 + a_4t_4 = 5$ м/с;

$$s = v_0t_1 + \left(v_0t_2 + \frac{a_2t_2^2}{2}\right) + \left[(v_0 + a_2t_2)\,t_3 + \frac{a_3t_3^2}{2}\right] +$$

$$+ \left[(v_0 + a_2t_2 + a_3t_3)\,t_4 + \frac{a_4t_4^2}{2} + v_{\text{к}}t_5\right] = 82{,}5 \text{ м};$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5} = 5{,}9 \text{ м/с}.$$

2) На графике $v=f(t)$ (рис. 191) конечная скорость $v_к=5$ м/с. Путь s численно равен сумме площадей, обозначенных на рисунке.

15. Скорость дождя относительно самолета (рис. 192) $u=\sqrt{w^2+v_1^2}$, где $v_1=-v$, составляет угол β с горизонтальным направлением, причем $\sin\beta = w/u$ и $\cos\beta=v/u$. На наклонное стекло в единицу времени падают капли дождя, находящиеся в косой призме с образующей u, площадью основания S (основанием является это стекло) и высотой $h=u\sin\gamma$, где $\gamma=\alpha+\beta$ (рис. 193). Объем этой призмы

$$V=Su\sin(\alpha+\beta)= Su(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta).$$

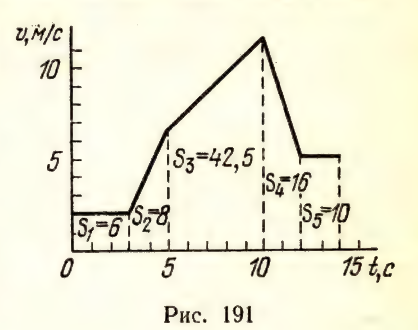


Рис. 191

Если в единице объема находится одновременно n капель, то количество капель в призме, или, что то же самое, количество капель, падающих на наклонное стекло в единицу времени, $N_1=nV$. Отсюда, учитывая значения V, $\sin\beta$ и $\cos\beta$, найдем: $N_1=Sn(v\sin\alpha+w\cos\alpha)$. Положив в этой формуле

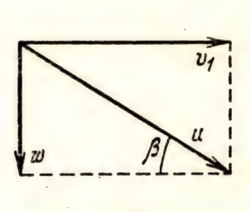


Рис. 192

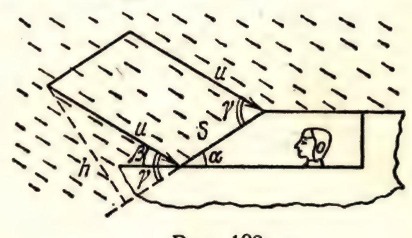


Рис. 193

$\alpha=0$, получим количество капель, падающих в единицу времени на горизонтальное стекло: $N_2=Snw$. Таким образом,

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{v\sin\alpha+w\cos\alpha}{w}.$$

16. Так как $v_1^2-v_0^2=2al$ и $v^2-v_0^2=2a\frac{l}{2}$, то $v=\sqrt{\frac{v_0^2+v_1^2}{2}}=5$ м/с.

17. Составляем уравнения движения в виде

$$x_2-x_1=v_1(t_2-t_1)+\frac{a}{2}(t_2-t_1)^2,$$

$$x_3-x_1=v_1(t_3-t_1)+\frac{a}{2}(t_3-t_1)^2,$$

где v_1 — скорость в точке x_1. Исключив v_1 из этих уравнений, найдем:

$$a=\frac{2[(x_3-x_2)t_1+(x_1-x_3)t_2+(x_2-x_1)t_3]}{(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_1-t_3)}.$$

18. $\Delta t=\frac{h}{v}+\frac{v-\sqrt{v^2+2gh}}{g}=1$ с.

19. $a=\frac{2(n-1)s}{(n+1)t^2}$.

20. Когда второе тело догонит первое, их координаты будут равны; $t=2v/a=200$ с.

21. $s=\frac{8v_1^2v_2^2}{a(v_1+v_2)^2}=3750$ м.

22. Обозначив времена ускоренного, равномерного и замедленного движения через t_1, t_2 и t_3, составим уравнения для каждого этапа движения:

$$s_1=\frac{a_1t_1^2}{2},\quad v=a_1t_1,\quad s_2=vt_2,\quad s_3=vt_3-\frac{a_2t_3^2}{2},\quad v_к=v-a_2t_3=0.$$

Присоединяя очевидные соотношения $t=t_1+t_2+t_3$ и $s=s_1+s_2+s_3$, получим систему из семи уравнений с семью неизвестными, решая которую найдем:

$$t=\frac{s}{v}+\frac{v}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right).$$

Значительно проще получить решение при помощи графика $v=f(t)$ (рис. 194). Путь численно равен площади фигуры, ограниченной ломаной линией, выражающей эту зависимость, и осью времени. Эта площадь равна площади прямоугольника $s_0=vt$ без площадей двух треугольников s_1 и s_3, а именно:

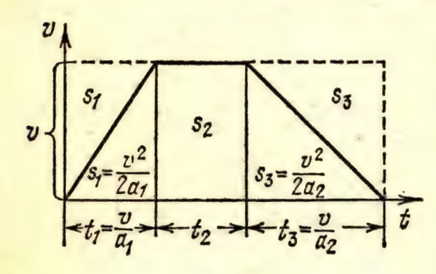


Рис. 194

$$s=s_0-s_1-s_3=vt-\frac{v^2}{2a_1}-\frac{v^2}{2a_2},$$

отсюда получается для t значение, приведенное выше.

23. Характер движения поезда такой же, как и движения автомобиля в предыдущей задаче. Поэтому для нахождения решения достаточно в ответе предыдущей задачи заменить $a_1=a_2=a$. В результате получится: $t=\frac{s}{v}+\frac{v}{a}$. Решая это уравнение относительно a, найдем:

$$a=v^2/(vt-s)\approx 0{,}17 \text{ м/с}^2.$$

24. $v_к=\sqrt{2gh}\approx 6{,}3$ м/с.

25. $v=\sqrt{2gH_0+v_0^2}=24{,}8$ м/с.

26. $v_{ср}=\frac{\sqrt{gH}\,(\sqrt{2}+1)}{2}\approx 25{,}4$ м/с.

27. $t=\sqrt{\frac{2}{g}}\,(\sqrt{h_2}-\sqrt{h_1})\approx 0{,}02$ с.

28. Путь, пройденный телом за все время движения t_2, равен $s=gt_2^2/2$; путь, пройденный телом за время движения $t_1<t_2$, равен $s_1=gt_1^2/2$. По условию задачи $s-s_1={}^2/_3 s$ и $t_2-t_1=t=1$ с. Из этой системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными можно получить для s квадратное уравнение

$$s^2-3gt^2s+\frac{9g^2t^4}{16}=0.$$

Из двух корней этого уравнения $s={}^3/_4\left(2\pm\sqrt{3}\right)gt^2$ лишь первый удовлетворяет условию задачи. Таким образом,

$$s=\frac{3}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)gt^2=27,4\ \text{м}.$$

29. Возьмем ось координат OH, направленную вертикально вверх, с началом отсчета в месте бросания тела (рис. 195). Тогда кинематические уравнения движения

$$H=v_0t-\frac{gt^2}{2} \tag{1}$$

и

$$v=v_0-gt \tag{2}$$

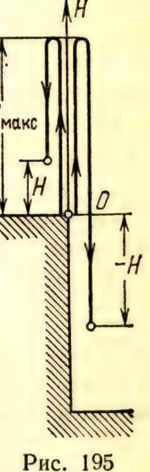


Рис. 195

дают значения координаты и скорости в любой момент времени. При достижении высшей точки подъема $H_{макс}$ скорость тела $v=0$. Из уравнения (2) найдем, что тело достигает $H_{макс}$ спустя время $t=v_0/g$ после бросания. При $t\leqslant v_0/g$ координата H и путь s равны. В частности, при $t=v_0/g$ путь $s=H_{макс}=v_0^2/2g$. При $t>v_0/g$ координата H убывает, в то время как путь, который равен сумме всех пройденных телом расстояний независимо от направления движения, продолжает увеличиваться. В частности, при $t=2v_0/g$ координата $H=0$, т. е. тело вернулось в место бросания, а путь $s=2H_{макс}=v_0^2/g$. При $t>2v_0/g$ координата становится отрицательной, т. е. тело спускается ниже места бросания (если, конечно, для этого есть возможность). Из рис. 195 видно, что для $t>v_0/g$ пройденный телом путь

$$s=2H_{макс}-H=\frac{v_0^2}{g}-\left(v_0t-\frac{gt^2}{2}\right), \tag{3}$$

где t — время, протекшее с начала движения. Это выражение будет верно и при $t>2v_0/g$. В тех же случаях, когда $t<v_0/g$, путь вычисляется, как и координата, по формуле (1).

При значениях, данных в условиях задачи, $t=10$ с больше, чем $v_0/g=3$ с. Поэтому вычисление пути надо делать по формуле (3). При этом получается $s=290$ м. Значения же координаты и скорости для этого момента времени, найденные по формулам (1) и (2), будут соответственно $H=-200$ м и $v=-70$ м/с.

30. $H=H_1+\dfrac{g}{2}\left(\dfrac{H_1-H_2}{g\,\Delta t}-\dfrac{\Delta t}{2}\right)^2\approx 1225$ м.

31. Если за начало отсчета берется место бросания, то координата h тела, брошенного вертикально вверх, определяется уравнением

$$h=v_0t-\frac{gt^2}{2}. \tag{1}$$

Это уравнение при заданных v_0 и h удовлетворяет двум значениям t:

$$t_{1,2}=\frac{v_0\pm\sqrt{v_0^2-2gh}}{g}.$$

Разность этих значений и есть промежуток времени между прохождениями телом одной и той же высоты h, т. е.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}. \qquad (2)$$

Отсюда

$$v_0 = \sqrt{2gh + \frac{g^2(\Delta t)^2}{4}}.$$

Если в выражении (2) положить $h=0$, то мы получим промежуток времени между вылетом тела и его возвращением в начальное положение: $\Delta t_0 = 2v_0/g$. Подставив сюда полученное ранее значение v_0, найдем:

$$\Delta t_0 = 2\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{(\Delta t)^2}{4}}.$$

32. $\Delta H = H_0 - v_0 t$.

33. Направим координатную ось OY вертикально вверх. Тогда уравнения движения шариков будут иметь вид:

$$y_1 = h + v_1 t_1 - \frac{g}{2}t_1^2, \quad y_2 = h - v_2 t_2 - \frac{g}{2}t_2^2,$$

где t_1 — время падения на землю первого шарика, а t_2 — второго. Падению на землю соответствуют координаты $y_1 = y_2 = 0$. Определив t_1 и t_2 из полученных квадратных уравнений, найдем:

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{g}\left(v_1 + v_2 + \sqrt{v_1^2 + 2gh} - \sqrt{v_2^2 + 2gh}\right).$$

34. $t = \sqrt{\frac{2s}{g} + t_2^2} - t_2 \approx 1$ с.

35. $v_0 = \frac{(H_1 - H_2)\sqrt{g}}{\sqrt{2(H_1 - h)}} \approx 3{,}69$ м/с.

36. Скорость первого тела в момент времени t будет $v_1 = v_0 - gt$. Скорость второго тела в этот же момент времени $v_2 = v_0 - g(t - T)$. Относительная скорость $v_{\text{отн}} = v_2 - v_1 = gT$ постоянна, т. е. тела движутся относительно друг друга равномерно.

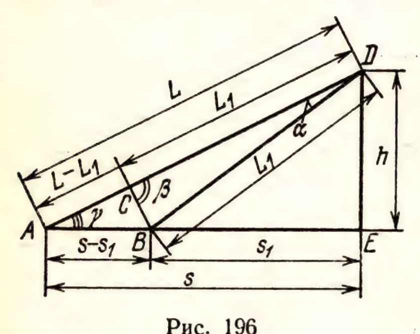


Рис. 196

37. Пусть за некоторый весьма малый промежуток времени t лодка переместилась из точки A в точку B на расстояние $s - s_1 = v_л t$ (рис. 196). За это же время веревка, имевшая положение AD, заняла положение BD, причем длина ее уменьшилась на величину $L - L_1 = vt$. При малой величине t будет мал также и угол α. Поэтому угол β в равнобедренном треугольнике BCD будет очень мало отличаться от 90°. Следовательно, треугольник ABC можно считать прямоугольным и

$$\frac{L - L_1}{s - s_1} = \frac{vt}{v_л t} = \frac{v}{v_л} = \cos\gamma; \text{ отсюда } v_л = \frac{v}{\cos\gamma}.$$

При приближении лодки к берегу угол γ увеличивается и $v_л$ возрастает. Как видно из рис. 196, $\cos\gamma = \frac{s}{L} = \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}$. Поэтому при $L = 10$ м

$$v_л = \frac{vL}{\sqrt{L^2-h^2}} = 1{,}25 \text{ м/с}.$$

Для нахождения перемещения лодки формулу пути равномерного движения $s - s_1 = v_л t$ можно применять лишь в том случае, когда промежуток времени t достаточно мал и скорость лодки в течение него не успевает заметно измениться;

$$s - s_1 = \sqrt{L^2-h^2} - \sqrt{L_1^2-h^2} = \sqrt{L^2-h^2} - \sqrt{(L-vt)^2-h^2} = 1{,}25 \text{ м}.$$

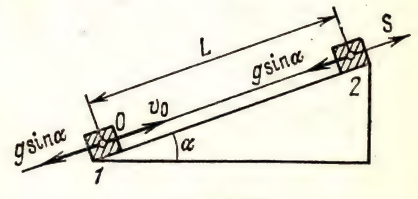


Рис. 197

38. Поместим начало отсчета в нижнюю точку наклонной плоскости, направим ось координат OS вдоль наклонной плоскости, как показано на рис. 197, и запишем законы движения. Для первого тела:

$$v_1 = v_0 - (g\sin\alpha)\cdot t, \quad s_1 = v_0 t - \frac{(g\sin\alpha)\cdot t^2}{2};$$

для второго тела:

$$v_2 = -(g\sin\alpha)\cdot t, \quad s_2 = L - \frac{(g\sin\alpha)\cdot t^2}{2}.$$

В момент встречи $s_1 = s_2$, $L = v_0 t$, т. е. $t = L/v_0 = 5$ с.

Скорость второго тела относительно первого $v_{отн} = v_2 - v_1 = -v_0 = -50$ см/с.

39. $v_{ср1} = \frac{s_1}{t_1} = v_0 + \frac{(g\sin\alpha)\cdot t_1}{2}$, $\quad v_{ср2} = \frac{s_2}{t_2} = v_0 + \frac{(g\sin\alpha)\cdot t_2}{2}$, отсюда

$$\sin\alpha = \frac{2(v_{ср2} - v_{ср1})}{g(t_2 - t_1)} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 30°.$$

40. Скорость движения шарика у доски при первом падении на нее $v_1 = \sqrt{2gh}$, время падения $t_1 = \sqrt{2h/g}$. Скорость в момент отскакивания $v_2 = 0{,}75 v_1 = 0{,}75\sqrt{2gh}$. Из условия $v = v_2 - gt_2 = 0$ находим время движения шарика вверх после отскакивания: $t_2 = \frac{v_2}{g} = 0{,}75\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Так как время подъема и время падения одинаковы, то искомое время

$$T = t_1 + 2t_2 = 2{,}5\sqrt{2h/g} = 1{,}38 \text{ с}.$$

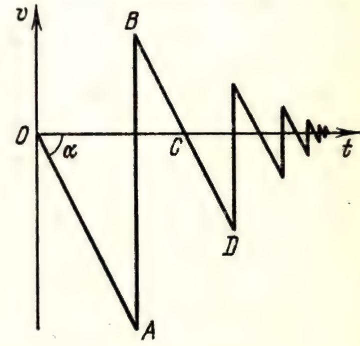


Рис. 198

41. Если положительным считать направление вверх, то при падении проекция скорости отрицательна и пропорциональна времени: $v = -gt$. На графике (рис. 198) такому движению соответствует линия OA, причем $\operatorname{tg}\alpha$ соответствует ускорению $-g$. При ударе знак проекции скорости мгновенно меняется на

противоположный, и величина ее уменьшается согласно условию задачи вдвое, т. е. после удара значение скорости соответствует точке B. При подъеме скорость падает до нуля (точка C), причем наклон линии остается прежним, так как ускорение все время равно $-g$. Далее снова происходит падение. При падении достигается та же величина скорости, которая была в первый момент после удара (точка D), и т. д.

Согласно формуле $v^2=2gH$ высота подъема пропорциональна квадрату скорости. Поэтому после m-го удара, когда скорость будет в n^m раз меньше, чем перед первым ударом, высота H_m будет в n^{2m} раз меньше H_0, т. е. $H_m = H_0/n^{2m}$. После каждого удара мяч будет проходить вверх и вниз путь, равный удвоенной высоте: после первого удара $s_1=2H_1=2H_0/n^2$, после второго удара $s_2=2H_2=2H_0/n^4$, после третьего удара $s_3=2H_3=2H_0/n^6$ и т. д. Чтобы получить полный путь, надо к сумме величин $s_1+s_2+s_3+\ldots$ прибавить еще путь $s_0=H_0$, пройденный до первого удара. Таким образом,

$$s=H_0+\frac{2H_0}{n^2}+\frac{2H_0}{n^4}+\frac{2H_0}{n^6}+\ldots=H_0+\frac{2H_0}{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}+\ldots\right).$$

Здесь в скобках стоит бесконечная убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q=1/n^2$. Сумма членов такой прогрессии равна $\frac{1}{1-q}=\frac{n^2}{n^2-1}$. Подставив это значение в выражение для пути, получим:

$$s=H_0\frac{n^2+1}{n^2-1}=\frac{5}{3}H_0=200 \text{ м}.$$

42. Шарик к моменту встречи с плитой приобрел скорость $v_1=-\sqrt{2gh}$. Скорость шарика относительно плиты, движущейся ему навстречу, в этот же момент равна $v'=-(\sqrt{2gh}+v)$. После абсолютно упругого удара скорость шарика относительно плиты $v_2'=-v_1'$. Скорость v_2 шарика относительно точки, в которой произошло соударение (эта точка неподвижна), больше, чем относительно плиты (плита догоняет отскочивший шарик со скоростью v), а именно: $v_2=v_2'+v=\sqrt{2gh}+2v$. Искомая высота

$$H=\frac{v_2^2}{2g}=\frac{(\sqrt{2gh}+2v)^2}{2g}=\left(\sqrt{h}+v\sqrt{\frac{2}{g}}\right)^2.$$

43. Разложив скорость v_0 на тангенциальную (вдоль стенки) и нормальную (перпендикулярно к стенке) составляющие, получим соответственно: $v_{0\tau} = v_0\sin\alpha$ и $v_{0n}=v_0\cos\alpha$. Тангенциальная составляющая, благодаря гладкости стенки, не изменится. Относительно движущейся стенки проекция скорости на нормаль $v_n=v_{n0}+u=v_0\cos\alpha+u$. После удара она изменит знак, сохранив свое численное значение. Относительно неподвижной системы отсчета проекция на нормаль скорости шарика после удара v_{n2} изменится на величину скорости u (так как стенка догоняет шарик), т. е.

$$v_{n2}=-(v_n+u)=-(v_0\cos\alpha+2u).$$

Полная скорость шарика относительно неподвижной системы отсчета после отражения от стенки будет

$$v=\sqrt{v_{n2}^2+v_{0\tau}^2}=\sqrt{(v_0\cos\alpha+2u)^2+v_0^2\sin^2\alpha}.$$

§ 2. Криволинейное движение

44. Возьмем систему координат XOY (рис. 199), начало которой расположено на поверхности земли, ось OX направлена вдоль этой поверхности в сторону начальной скорости, а ось OY направлена вертикально вверх и проходит через точку A, из которой брошено тело. Движение тела можно представить как сумму равномерного движения со скоростью v_0 в горизонтальном направлении и равноускоренного движения без начальной скорости в вертикальном направлении с ускорением $a_y = -g$, направленным вниз. Проекции скорости по осям координат в этом случае

$$v_x = v_0, \quad (1)$$

$$v_y = -gt, \quad (2)$$

полная скорость

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}. \quad (3)$$

Законы движения для координат

$$x = v_0 t \quad (4)$$

и

$$y = H - \frac{gt^2}{2}. \quad (5)$$

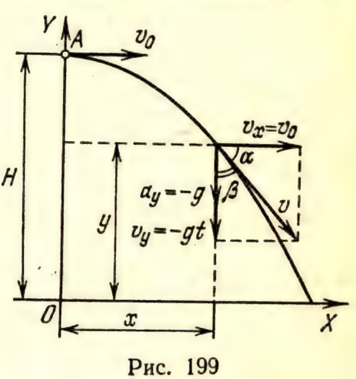


Рис. 199

Исключив из выражений (4) и (5) время t, получим уравнение траектории:

$$y = H - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (6)$$

Это уравнение является уравнением параболы.

45. Исключив время из уравнений (4) и (5) решения задачи 44 и положив $y = 0$, найдем: $x = v_0\sqrt{2H/g} = 22{,}6$ м.

46. Законы движения камня такие же, как в задаче 44. Исключив время из уравнений (4) и (5) и положив $x = l$ и $y = 0$, найдем: $H = gl^2/2v_0^2 = 4{,}9$ м.

47. Исключив время из уравнений (3) и (5) решения задачи 44 при $y = 0$, найдем: $v_0 = \sqrt{v^2 - 2gH} = 5{,}6$ м/с.

48. Когда скорость тела, брошенного горизонтально, составляет с горизонтом угол $\alpha = 45°$ (см. рис. 199), имеем: $\operatorname{tg}\alpha = v_y/v_x = -1$. Отсюда согласно уравнениям (1) и (2) решения задачи 44 получаем: $t = v_0/g \approx 1{,}5$ с.

49. При падении камня на землю $h = 0$. Поэтому искомая высота

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{2g} \approx 34{,}4 \text{ м}.$$

50. $s = 2H/\operatorname{tg}\alpha = 4$ м.

51. Полным ускорением является ускорение свободного падения g. Следовательно, β — угол между полной скоростью и вертикалью (см. рис. 199). Поэтому $\operatorname{tg}\beta = v_x/v_y = 1$ и $v_x = v_y = gt$ (по абсолютной величине). В этом случае из уравнения (3) решения задачи 44 следует:

$$v = \sqrt{2v_y^2} = gt\sqrt{2} \approx 70{,}5 \text{ м/с}.$$

52. Время падения камня (момент, когда $y=-H$) равно

$$t=\frac{1}{g}\left(v_0 \sin\alpha+\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha+2gH}\right),$$

угол β определяется выражением

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{v_0 \sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha+2gH}}{v_0\cos\alpha},$$

а скорость в момент падения

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2+2gH}.$$

53. Как видно из рис. 200, проекции ускорения на нормаль On и на касательную $O\tau$ таковы: $a_n=g\cos\alpha$, $a_\tau=g\sin\alpha$; здесь $\cos\alpha=v_x/v$, $\sin\alpha=v_y/v$. Зависимости v_x, v_y и v от времени определяются уравнениями (1), (2) и (3) решения задачи 44. Следовательно,

$$a_n=g\frac{v_x}{v}=\frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}\approx 8{,}2\ \text{м/с}^2;\quad a_\tau=g\frac{v_y}{v}=\frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}\approx 5{,}4\ \text{м/с}^2.$$

54. Возьмем прямоугольную систему координат с началом в том месте, откуда брошено тело. Ось OX направим горизонтально в ту сторону, куда

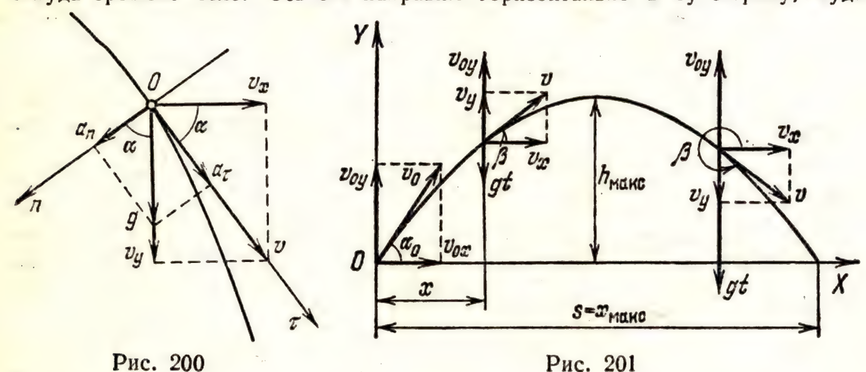


Рис. 200 Рис. 201

тело брошено, а ось OY — вертикально вверх (рис. 201). В этой системе координат движение можно представить в виде суммы равномерного движения вдоль горизонтальной оси со скоростью $v_{0x}=v_0\cos\alpha_0$ и равноускоренного движения вдоль вертикальной оси с начальной скоростью $v_{0y}=v_0\sin\alpha_0$ и ускорением $a_y=-g$. Проекции скорости на оси координат в этом случае будут

$$v_x=v_{0x}=v_0\cos\alpha_0, \tag{1}$$

$$v_y=v_{0y}-gt=v_0\sin\alpha_0-gt, \tag{2}$$

полная скорость

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2+g^2t^2-2v_0gt\sin\alpha_0}. \tag{3}$$

Зависимость угла β от времени определяется выражением

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{v_0\sin\alpha_0-gt}{v_0\cos\alpha_0}.$$

На восходящей части траектории (при $v_{0y} > gt$) имеем: $\operatorname{tg}\beta > 0$ и составляющая скорости v_y направлена вверх, на нисходящей (при $v_{0y} < gt$) $\operatorname{tg}\beta < 0$ и v_y направлена вниз.

55. Возьмем ту же систему координат, что и при решении задачи 54 (рис. 201). Тогда законы движения для координат будут:

$$x = (v_0 \cos\alpha_0) \cdot t, \qquad (1)$$

$$y = (v_0 \sin\alpha_0) \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Уравнение траектории тела получим, исключив время t из этих уравнений:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0}. \qquad (3)$$

Это — уравнение параболы.

56. При $y = h_{\text{макс}}$ проекция скорости $v_y = 0$. Время подъема t и $h_{\text{макс}}$ найдем из уравнений (2) решений задач 54 и 55:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}, \qquad h_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g}.$$

57. Так как в месте падения $y = 0$, то из уравнения (2) решения задачи 55 найдем время полета: $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}$.

Дальность полета, т. е. координату места падения, найдем из уравнения (1) решения задачи 55, подставив в него найденное значение времени полета:

$$s = x_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}.$$

58. 1) График зависимости $v_y = f(t)$ строится по формуле (2) решения задачи 54 (рис. 202). При $t = 0$ имеем: $v_y = v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0$; при $t = t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$ проекция $v_y = 0$.

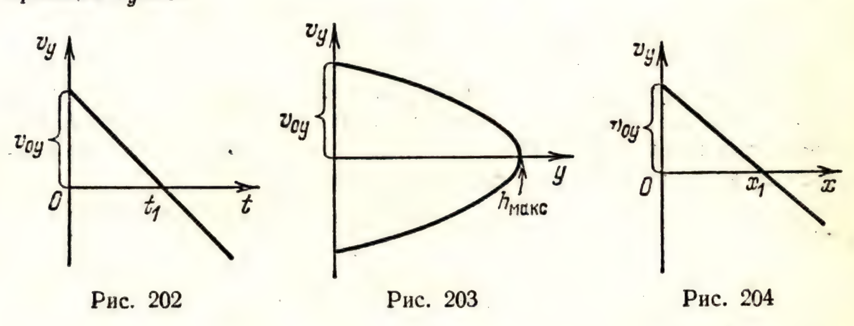


Рис. 202 Рис. 203 Рис. 204

2) Зависимость $v_y = f(y)$ получаем, исключив время t из уравнений (2) решения задач 54 и 55:

$$v_y = \pm\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha_0 - 2gy};$$

график $v_y = f(y)$ представлен на рис. 203.

3) Зависимость $v_y = f(x)$ получим, исключив время из уравнения (2) решения задачи 54 и уравнения (1) решения задачи 55:

$$v_y = v_0 \sin\alpha_0 - \frac{gx}{v_0 \cos\alpha_0};$$

график $v_y = f(x)$ представлен на рис. 204.

59. Из формулы (2) решения задачи 55 при $y = h$ получаем для t уравнение:

$$t^2 - \frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g} t + \frac{2h}{g} = 0, \qquad (1)$$

два корня которого $t_1 = 0{,}28$ с и $t_2 = 0{,}75$ с показывают, что на высоте $y = h$ камень побывал дважды.

60. Пользуясь уравнением (1) задачи 59 и свойствами корней квадратного уравнения, согласно которым $t_1 + t_2 = (2v_0 \sin\alpha_0)/g$ и $t_1 t_2 = 2h/g$, получим:

$$v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2\sin\alpha_0} = 78{,}4 \text{ м/с}; \quad h = \frac{g t_1 t_2}{2} = 73{,}5 \text{ м}.$$

61. Исключая начальную скорость v_0 из уравнения (2) задачи 54 и решения задачи 57 для x, получим:

$$s = \frac{2(v_y + gt)^2 \operatorname{ctg}\alpha_0}{g} = 284 \text{ м}.$$

62. В системе координат с началом в месте бросания (на вершине башни) (см. рис. 205) законы движения будут такими же, которые получены в решении задачи 55. Искомое расстояние s равно координате x камня при $y = -H$. Подставив $y = -H$ в уравнение (3) решения задачи 55, получим для x квадратное уравнение, решая которое найдем:

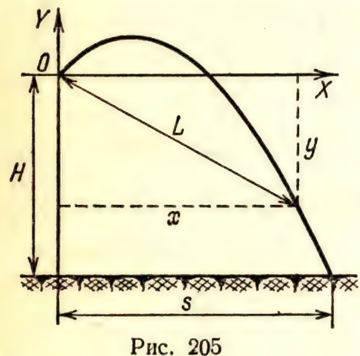


Рис. 205

$$s = \frac{v_0 \cos\alpha_0}{g}\left(v_0 \sin\alpha_0 + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha_0 + 2gH}\right).$$

В выбранной системе координат $x > 0$, поэтому второй корень уравнения отброшен.

63. Обозначим начальные скорости тел v_1 и v_2 соответственно. Для тел, упавших на землю, в формуле (3) решения задачи 55 надо положить $y = 0$. Заменив в этой формуле v_0 и α_0 на v_1 и α_1 для первого тела и на v_2 и α_2 для второго тела, найдем из двух получившихся уравнений:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_1}}.$$

Если $\alpha_2 = 90° - \alpha_1$, то $v_1/v_2 = 1$ и $v_1 = v_2$.

64. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gH} = 6{,}4$ м/с.

65. $v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$.

66. Согласно рис. 201, $\operatorname{tg}\beta = v_y/v_x$. По условию задачи $\operatorname{tg}\beta_1 = 1$, $\operatorname{tg}\beta_2 = -1$. Используя значения v_x и v_y, полученные в задаче 54 [формулы (1) и (2)], найдем:

$$t_1 = \frac{v_0}{g}(\sin\alpha_0 - \cos\alpha_0); \quad t_2 = \frac{v_0}{g}(\sin\alpha_0 + \cos\alpha_0).$$

67. Дальность полета снаряда без учета сопротивления воздуха при заданной начальной скорости можно найти по формуле $s=(v_0^2 \sin 2\alpha_0)/g$ (см. решение задачи 57). Согласно условию задачи $s=4L$. Отсюда находим:

$$v_0=2\sqrt{\frac{gL}{\sin 2\alpha_0}}=886 \text{ м/с}.$$

68. В системе координат с началом в точке A (рис. 9) траектория мотоциклиста будет описываться уравнением (3) решения задачи 55. Подставив в это уравнение координаты точки приземления $x=s$ и $y=-h$, найдем минимальную скорость:

$$v_{0\text{мин}}=\frac{s\sqrt{g}}{\cos\alpha_0\sqrt{2(h+s\,\text{tg}\,\alpha_0)}}.$$

69. Выберем систему координат, как показано на рис. 205. Согласно этому рисунку $L=\sqrt{x^2+y^2}$, где x и y — координаты камня в данный момент времени. Зависимость координат камня от времени дается формулами (1) и (2) решения задачи 55. Поэтому

$$L=t\sqrt{v_0^2-(v_0 g\sin\alpha_0)\cdot t+\frac{g^2t^2}{4}}=67{,}9 \text{ м}.$$

70. Чтобы снаряд достиг самолета, горизонтальная проекция его скорости v_x должна быть не меньше скорости самолета v, а вертикальная проекция начальной скорости v_{0y} должна быть по крайней мере равна $\sqrt{2gH}$. Отсюда минимальная начальная скорость снаряда $v_0=\sqrt{v^2+2gH}=743$ м/с.

Из условия $\text{tg}\,\alpha_0=\dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}=\dfrac{\sqrt{2gH}}{v}=1{,}56$ находим: $\alpha_0\approx 57°$.

71. $y_1-y_2=2v_0t\cos\alpha\approx 60$ м.

72. Расположим систему координат, как в решении задачи 44 (рис. 199). Проекции скорости груза при его падении $v_x=v_0$ и $v_y=-gt$. Угол наклона скорости к горизонту определяется выражением $\text{tg}\,\alpha=v_y/v_x$. Скорость имеет угол наклона α в момент времени $t=-\dfrac{v_0}{g}\,\text{tg}\,\alpha\ (\alpha<0)$. Подставив это значение t в закон движения груза по вертикальному направлению, $y=H-(gt^2/2)$, найдем:

$$h=y=H-\frac{v_0^2\,\text{tg}^2\,\alpha}{2g}.$$

73. В системе координат, показанной на рис. 206, координаты ключа в момент выбрасывания его из самолета

$$x_0=\left(v_0t_1+\frac{at_1^2}{2}\right)\cos\alpha_0,\quad y_0=\left(v_0t_1+\frac{at_1^2}{2}\right)\sin\alpha_0.$$

Проекции скорости ключа

$$v_{0x}=(v_0+at_1)\cos\alpha_0,\quad v_{0y}=(v_0+at_1)\sin\alpha_0-u_0.$$

Зависимость координат ключа от времени после выбрасывания:

$$x=x_0+v_{0x}t=\left(v_0t_1+\frac{at_1^2}{2}\right)\cos\alpha_0+[(v_0+at_1)\cos\alpha_0]\,t, \qquad (1)$$

$$y=y_0+v_{0y}t-\frac{gt^2}{2}=\left(v_0t_1+\frac{at_1^2}{2}\right)\sin\alpha_0+[(v_0+at_1)\sin\alpha_0-u_0]\,t-\frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

В момент падения ключа $y=0$. Исключая время из (1) и (2), найдем искомое расстояние x. Ввиду сложности коэффициентов в уравнении (2) рекомендуется предварительно вычислить эти коэффициенты. Имеем: $y_0=144$ м, $v_{0y}=29{,}5$ м/с, $g/2=4{,}9$ м/с^2.

Искомое расстояние $x=766$ м.

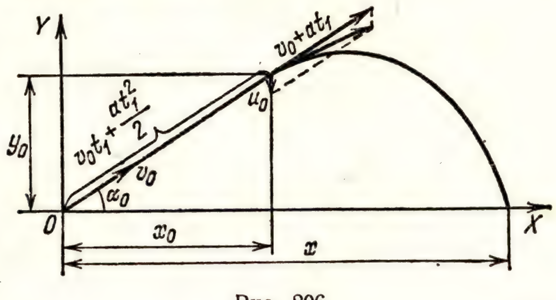


Рис. 206

74. Вертикальная проекция скорости в момент удара $v_y=\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2gh}$; время подъема на максимальную высоту $H_{макс}$ (см. рис. 207)

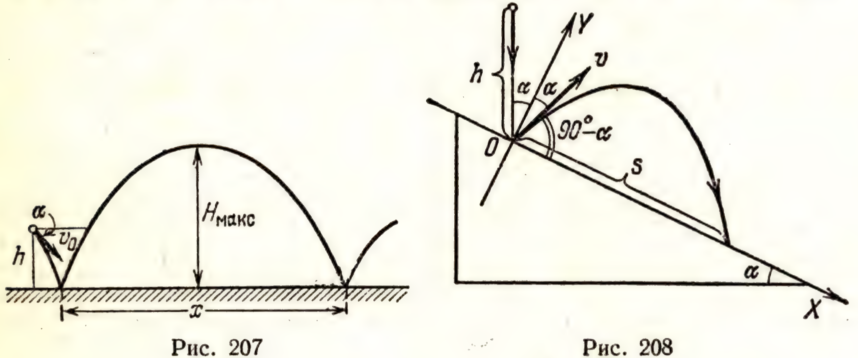


Рис. 207

Рис. 208

$t=v_y/g$. Горизонтальная составляющая скорости $v_x=v_0\cos\alpha$. Искомое расстояние

$$x=2tv_x=\frac{2v_0\cos\alpha}{g}\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2gh}\approx 9{,}7 \text{ м}.$$

75. В системе координат XOY с началом в точке первого соприкосновения шарика с плоскостью (рис. 208) скорость шарика, согласно законам упругого удара, в момент удара и первый момент после удара равна $\sqrt{2gh}$ и направлена после удара под углом $90°-\alpha$ к оси OX. Проекции скорости после удара:

$$v_x=\sqrt{2gh}\cos(90°-\alpha)+(g\sin\alpha)\cdot t,\quad v_y=\sqrt{2gh}\sin(90°-\alpha)-(g\cos\alpha)\cdot t,$$

или

$$v_x=\sqrt{2gh}\sin\alpha+gt\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$v_y=\sqrt{2gh}\cos\alpha-gt\cos\alpha. \qquad (2)$$

Время достижения высшей точки траектории по (2) равно $t_1 = \sqrt{2h/g}$, время между первым и вторым ударами $t = 2t_1$.

Искомое расстояние равно координате точки второго удара, т. е.

$$s = x = \sqrt{2gh}\, t \sin\alpha + \frac{gt^2}{2}\sin\alpha, \text{ или } s = 8h\sin\alpha = 4 \text{ м}.$$

§ 3. Вращательное движение

76. $R = v_1 l/(v_1 - v_2) = 1{,}8$ м.

77. $n = 60\,(v_1 - v_2)/2\pi l \approx 96$ об/мин.

78. При качении колеса по земле все его точки участвуют одновременно в двух движениях: вдоль земной поверхности с постоянной скоростью v, направление которой все время горизонтально, и вокруг оси с касательной скоростью v_τ, величина которой постоянна, а направление меняется. При качении без проскальзывания скорости v и v_τ равны по величине. Значения мгновенных скоростей указанных точек колеса можно найти, складывая v и v_τ по

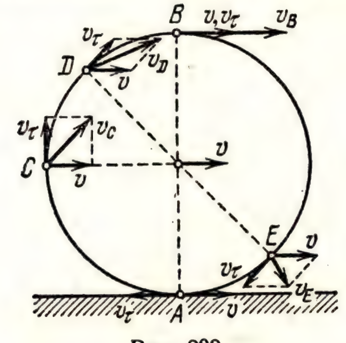


Рис. 209

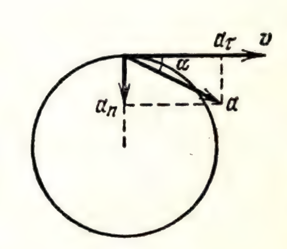


Рис. 210

правилам сложения векторов, как показано на рис. 209. В результате получим:

$$v_A = v_\tau - v = 0; \quad v_B = v_\tau + v = 2v; \quad v_C = \sqrt{v_\tau^2 + v^2} = v\sqrt{2};$$

$$v_D = \sqrt{v_\tau^2 + v^2 + 2v_\tau v\cos\alpha} = 2v\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$v_E = \sqrt{v_\tau^2 + v^2 - 2v_\tau v\cos\alpha} = 2v\sin\frac{\alpha}{2}.$$

79. $a_n = v^2/R$, $v = a_\tau t$. По условию задачи $a_n = na_\tau$, следовательно, $t = \sqrt{nR/a_\tau} = 2{,}78$ с.

80. $a_n = 4s^2t_2^2/Rt_1^4 = 25$ м/с².

81. $v_1 = 2v - v_2$ (см. задачу 78).

82. Как видно из рис. 210, $a_n/a_\tau = \operatorname{tg}\alpha = 0{,}58$.

83. На экваторе $v_0 = \frac{2\pi R}{T} = 465$ м/с, $a_{n0} = \frac{v_0^2}{R} = 0{,}034$ м/с². На широте $\varphi = 60°$

$$v_\varphi = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T} \approx 233 \text{ м/с}, \quad a_{n\varphi} = \frac{v_\varphi^2}{R\cos\varphi} = 0{,}017 \text{ м/с}^2.$$

84. $N = n_0 t/2 = 60$ оборотов.

85. Расстояние поезда от начала закругленного участка пути

$$s=v_0t+(a_\tau t^2/2), \qquad (1)$$

где a_τ — касательное ускорение. Зависимость скорости от времени:

$$v=v_0+a_\tau t. \qquad (2)$$

Из (1) находим: $a_\tau=\frac{2(s-v_0t)}{t^2}=\frac{1}{3}$ м/с².

Из 2) находим скорость: $v=\frac{2s-v_0t}{t}=25$ м/с.

Полное ускорение

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{\frac{v^4}{R^2}+a_\tau^2}=\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{(2s-v_0t)^4}{R^2}+4(s-v_0t)^2}=0{,}708 \text{ м/с}^2.$$

86. В системе координат XOY (рис. 211) скорость комка грязи в момент отрыва от колеса направлена по касательной к ободу в точке A (рис. 12), и если колесо катится без пробуксовки или проскальзывания, то $v_\tau=v$. Так как начальная вертикальная координата комка $y_0=R(1-\cos\alpha)$, то закон движения вдоль оси OY

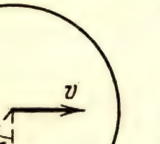


Рис. 211

$$y=R(1-\cos\alpha)+(v\sin\alpha)\cdot t-\frac{gt^2}{2}.$$

Далее, используя уравнение (2) задачи 54 и время движения до наибольшей высоты, найденное в задаче 56, получим:

$$y_{\text{макс}}=h=R(1-\cos\alpha)+\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Если движение автомобиля с той же скоростью сопровождается пробуксовкой колеса, то $v_\tau > v$, высота подъема комков грязи больше. Если же колесо проскальзывает относительно поверхности земли при торможении (движение юзом), то $v_\tau < v$, и комки будут взлетать на меньшую высоту.

87. Пусть за время t цилиндр сделал n оборотов. В этом случае шарик не будет задерживаться желобом, если длина n шагов винтового желоба будет равна расстоянию, на которое шарик упадет за это время при свободном падении, т. е. $nh=gt^2/2$. Если нить тянули при этом с ускорением a, то расстояние, на которое ее вытянули, $l=at^2/2$, что равно в то же время длине смотанных с цилиндра n витков нити $l=\pi Dn$. Из этих выражений легко получить:

$$a=\pi gD/h.$$

§ 4. Динамика прямолинейного движения

88. $v=ft/m\approx 43$ км/ч.

89. $f=F-ma=F-\frac{m}{2s}(v^2-v_0^2)\approx 4{,}3\cdot 10^4$ Н.

90. При спуске с постоянной скоростью сумма сил, действующих на шар, равна нулю: $Mg-Q-f=0$, где f — сила сопротивления движению шара. При подъеме шара сила сопротивления будет иметь по-прежнему величину f, так

как согласно условиям задачи скорость сохраняет свою величину, но теперь эта сила направлена вниз. Сумма всех сил с учетом уменьшения массы шара за счет выброшенного балласта по-прежнему равна нулю: $(M-m)g-Q+f=0$.

Исключая из этих уравнений f, найдем:

$$m=2\left(M-\frac{Q}{g}\right).$$

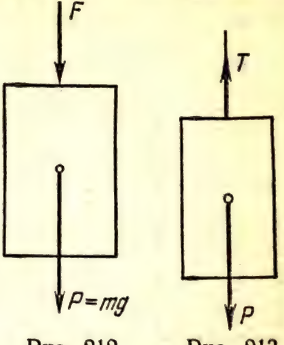


Рис. 212 Рис. 213

91. Действующие на тело силы изображены на рис. 212; F — искомая сила. На основании второго закона Ньютона $ma=F+mg$. Отсюда $F=m(a-g)\approx 26$ Н.

92. $F=ma=70$ Н.

93. Действующие на груз силы изображены на рис. 213. T — натяжение проволоки, $P=mg$ — сила тяжести. На основании второго закона Ньютона $ma=T-P$. Согласно условию задачи $T\leqslant T_{\text{макс}}=4410$ Н. Следовательно,

$$a\leqslant(T_{\text{макс}}-P)/m\approx 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

94. $m=2m_1m_2/(m_1+m_2)=190$ кг.

95. Натяжение каната не зависит от направления движения самой клети (направления ее скорости) и определяется только ее ускорением. В первом случае направление ускорения совпадает с направлением натяжения каната. Поэтому знаки a_1 и T_1 одинаковы и $ma_1=T_1-mg$. Отсюда

$$T_1=m(a_1+g)\approx 3420 \text{ Н}.$$

Во втором случае $ma_2=mg-T_2$. Следовательно,

$$T_2=m(g-a_2)\approx 2705 \text{ Н}.$$

96. Используя решение задачи 95, получим: $a=g\left(1-\frac{T}{P}\right)=2{,}45$ м/с². Ускорение направлено вниз.

97. Действующие на гири силы изображены на рис. 214. Уравнения движения имеют вид:

$$m_1a=T_2-T_1-P_1,\quad m_2a=T_1-P_2.$$

Здесь a — ускорение груза, равное ускорению лифта, $P_1=m_1g$ и $P_2=m_2g$ — силы тяжести. Разрешая уравнения относительно T_2, получим:

$$T_2=\frac{m_1+m_2}{m_2}T_1=14{,}7 \text{ Н}.$$

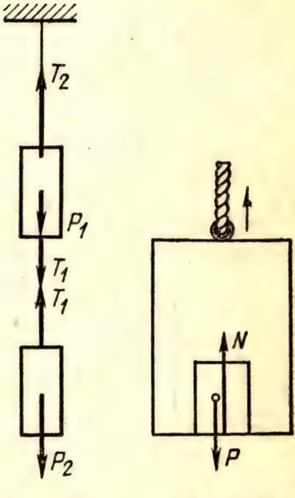


Рис. 214 Рис. 215

98. Действующие на груз силы изображены на рис. 215. Реакция опоры N направлена по ускорению. Следовательно, $ma=N-P$, где $P=mg$ — сила тяжести. Отсюда

$$N=mg+ma=1004{,}5 \text{ Н}.$$

По третьему закону Ньютона с такой же силой груз будет давить на дно клети.

99. $a = \frac{N}{m} - g = 0{,}49$ м/с². Ускорение лифта направлено вверх.

100. Действующие на тело силы изображены на рис. 216; F — сила, с которой действует на тело растянутая пружина (показание пружинных весов), $P = mg$ — сила тяжести.

В первом случае уравнение движения тела имеет вид: $ma_1 = F_1 - P$; отсюда $F_1 = m(g + a_1) = 14{,}7$ Н.

Во втором случае $ma_2 = P - F_2$, так как направления ускорения a_2 и силы тяжести совпадают. Следовательно, $F_2 = m(g - a_2) = 4{,}9$ Н.

В третьем случае $F_3 = m(g - a_3) = 7{,}35$ Н. Выражение для силы имеет тот же вид, что и во втором случае, ибо направление ускорения то же самое.

В последнем случае $F_4 = m(g + a_4) = 12{,}25$ Н.

Рис. 216

101. Действующие на тело силы изображены на рис. 217. На основании второго закона Ньютона $ma = F - f$, где $f = kN$, а N — реакция опоры. Так как движение вдоль вертикали отсутствует, $N = P = mg$. Следовательно, $F = ma + kP \approx 0{,}79$ Н.

102. $s = v^2/2a = v^2/2kg \approx 12{,}3$ м.

103. $v = \sqrt{2 \cdot 0{,}06gs} \approx 4{,}9$ м/с.

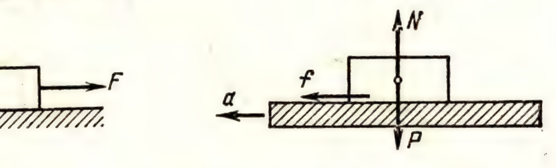


Рис. 217 Рис. 218

104. Действующие на груз силы изображены на рис. 218. В горизонтальном направлении на груз действует только сила трения f. Сообщаемое грузу ускорение $a = f/m$. В вертикальном направлении груз не ускоряется: $N - mg = 0$. Максимальное значение силы трения покоя $f_{\text{макс}} = kN = kmg$. Следовательно, возможные значения ускорения груза удовлетворяют неравенству

$$a \leqslant f_{\text{макс}}/m = kg.$$

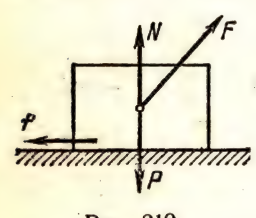


Рис. 219

Доске нужно сообщить ускорение $a_1 > kg = 1{,}96$ м/с². В этом случае сила трения не сможет сообщить грузу ускорение, достаточное для его движения без проскальзывания.

105. Используя решение задачи 104, легко найти: $F \geqslant kg(M + m) = 10{,}8$ Н.

106. На тело действуют четыре силы, изображенные на рис. 219;

$$a = \frac{g}{P}\left[F(\cos\alpha + k\sin\alpha) - kP\right]; \quad F_1 = \frac{kP}{\cos\alpha + k\sin\alpha}.$$

107. $a=\frac{F(\cos\alpha-k\sin\alpha)-mg}{m}$.

108. Силы, действующие на воз, показаны на рис. 220.

1) Если $P<F_3\sin\alpha$, то воз может оказаться «в облаках» (решение выходит за рамки условий задачи, так как рак и щука уже не будут тянуть в противоположные стороны).

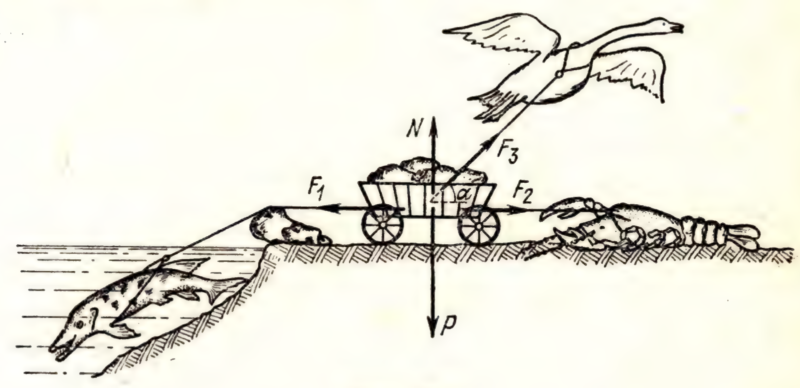


Рис. 220

2) Если $P>F_3\sin\alpha$ и $kN=k(P-F_3\sin\alpha)>|F_2-F_1+F_3\cos\alpha|$, то «воз и ныне там», т. е. $s=0$.

3) Если $P>F_3\sin\alpha$ и $k(P-F_3\sin\alpha)<|F_2-F_1+F_3\cos\alpha|$, то

$$s=[\pm(F_1-F_2-F_3\cos\alpha)-k(P-F_3\sin\alpha)]\frac{gt^2}{2P},$$

где знак плюс относится к случаю $F_1>F_3\cos\alpha+F_2$ и знак минус — к случаю $F_1<F_3\cos\alpha+F_2$.

109. $F=m\left(\frac{v_0}{t}-g\right)\approx 0{,}088$ Н.

110. $a=\frac{gH}{s}=58{,}8$ м/с^2; $N=mg+ma=mg\left(1+\frac{H}{s}\right)\approx 4802$ Н.

111. Минимальная сила $F=mg=735$ Н.

112. $h=m/2k=1{,}8$ м.

113. На первое тело вдоль горизонтали действуют сила F и натяжение нити T_1 (рис. 221). Действующие по вертикали силы взаимно уравновешиваются и на рис. 221 не изображены. Они не влияют на движение тел в направлении силы F. На второе тело действует натяжение нити T_2. Так как нить невесома, то $T_1=T_2=T$.

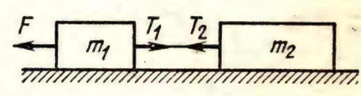


Рис. 221

Уравнения движения первого и второго тел имеют вид: $m_1a=F-T$; $m_2a=T$. Здесь учтено, что оба тела имеют одинаковые ускорения. Согласно условию задачи $T\leqslant T_{\text{макс}}$. Следовательно, $a\leqslant T_{\text{макс}}/m_2$ и

$$F\leqslant T_{\text{макс}}+m_1a=\frac{m_1+m_2}{m_2}T_{\text{макс}}=7{,}5 \text{ Н}.$$

Если сила приложена ко второму телу, то приведенные рассуждения остаются в силе, только массы m_1 и m_2 меняются местами. Теперь

$$F \leqslant \frac{m_2 + m_1}{m_1} T_{\text{макс}} = 15 \text{ Н}.$$

114. $T = (m_1 F_2 + m_2 F_1)/(m_1 + m_2)$.

115. $T = \dfrac{m_1 F_2 + (m_2 + m_3) F_1}{m_1 + m_2 + m_3}$.

116. На рис. 222 изображены силы, действующие на доску A с грузом и на чашку с гирями. Здесь N — сила реакции опоры, T — натяжение нити и f — сила трения. Так как движение по вертикали отсутствует, то $N - (P_1 + P_2) = 0$. При равномерном движении $T - f = 0$ и $P_3 + P_4 - T = 0$. Сила трения $f = kN = k(P_1 + P_2)$.

Исключая T из этих уравнений, найдем: $k = \dfrac{P_3 + P_4}{P_1 + P_2} \approx 0{,}3$.

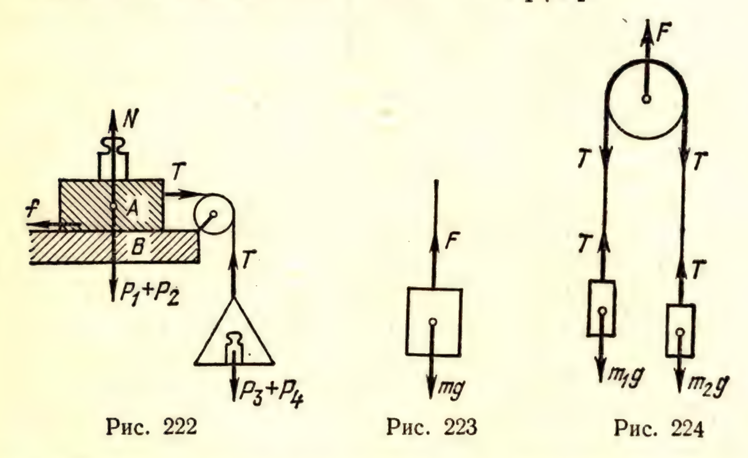


Рис. 222 Рис. 223 Рис. 224

117. На груз действуют сила тяжести mg и натяжение веревки, равное силе F, приложенной к ее другому концу (рис. 223). Искомая сила определяется с помощью второго закона Ньютона: $ma = F - mg$. Отсюда $F = m(a + g) = 108$ Н.

118. Действующие на блок и грузы силы изображены на рис. 224. Так как блок неподвижен, то действующая на него со стороны динамометра сила $F = 2T$. Уравнения движения грузов: $m_2 a = m_2 g - T$, $m_1 a = T - m_1 g$. Здесь учтено, что ускорение грузов одинаково по величине и что ускорение второго груза направлено вниз, а первого — вверх.

Исключая из этих уравнений ускорение, найдем: $T = \dfrac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$.

Искомое показание динамометра на основании третьего закона Ньютона равно $F = 2T = \dfrac{4 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \approx 62{,}7$ Н.

119. Так как масса первого груза во много раз меньше, чем масса второго, то можно считать, что грузы движутся с ускорением g. Натяжение нити определяется уравнением $mg \approx T - mg$. Отсюда $T \approx 2mg = 1$ кгс $= 9{,}8$ Н.

120. Согласно решению задачи 118 сила T, растягивающая пружину, равна $T=2m_1m_2g/(m_1+m_2)$. По закону Гука $T=k(l-l_0)$, где $k=F/x$ — коэффициент упругости пружины. Отсюда найдем:

$$l=l_0+\frac{2m_1m_2gx}{(m_1+m_2)F}=17{,}35 \text{ см}.$$

121. $t=\sqrt{\frac{2s(m_1+m_2)}{(m_2-m_1)g}}=0{,}7$ с, где $s=1$ м — путь, пройденный каждой из гирь.

122. $m_1=4sm/(gt^2-2s)=10$ г.

123. Действующие на тело и перегрузок силы изображены на рис. 225. $N=N'$ по третьему закону Ньютона. Уравнения движения для всех трех тел запишутся в форме:

$$ma=T-mg;\quad ma=mg-T+N;$$
$$m_1a=m_1g-N.$$

Исключая отсюда a и T, найдем:

$$N=\frac{2mm_1g}{2m+m_1}\approx 0{,}39 \text{ Н}.$$

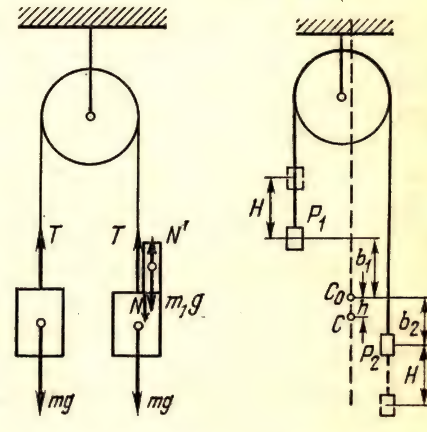


Рис. 225 Рис. 226

124. Центр тяжести грузов, очевидно, будет опускаться. Пусть вначале центр тяжести находится в точке C_0 (рис. 226) на расстоянии b_1 по вертикали от первого груза и на расстоянии b_2 от второго. Величины b_1 и b_2 удовлетворяют условию

$$P_1b_1=P_2b_2. \qquad (1)$$

За время t второй груз опустится на

$$H=at^2/2, \qquad (2)$$

а первый поднимется на ту же высоту. Центр тяжести системы опустится за это же время на высоту h, определяемую уравнением

$$P_2(H+b_2-h)=P_1(H+b_1+h).$$

Отсюда, учитывая уравнения (1) и (2), найдем, что в данный момент времени

$$h=\frac{P_2-P_1}{P_2+P_1}H=\frac{P_2-P_1}{P_2+P_1}\cdot\frac{at^2}{2}.$$

Ускорение a определяется системой уравнений, приведенной в решении задачи 118; оно равно $a=\frac{P_2-P_1}{P_1+P_2}g$. Поэтому

$$h=\left(\frac{P_2-P_1}{P_1+P_2}\right)^2\frac{gt^2}{2}=\frac{a't^2}{2}.$$

Таким образом, центр тяжести системы движется равноускоренно с ускорением $a'=\left(\frac{P_2-P_1}{P_1+P_2}\right)^2 g$.

125. Действующие на движущиеся тела силы изображены на рис. 227. Считая, что тело, имеющее массу m_1, поднимается, а неподвижный блок с телом, имеющим массу m_2, опускается, уравнения движения можно записать в форме: $m_1a_1 = T - m_1g$; $m_2a_2 = m_2g - 2T$.

Связь между ускорениями a_1 и a_2 можно найти из следующих соображений. Если первое тело поднимется на высоту h_1, то второе тело опустится за это время на высоту $h_2 = h_1/2$. Так как пройденные пути прямо пропорциональны ускорениям, то отсюда вытекает, что по абсолютной величине $a_2 = a_1/2$.

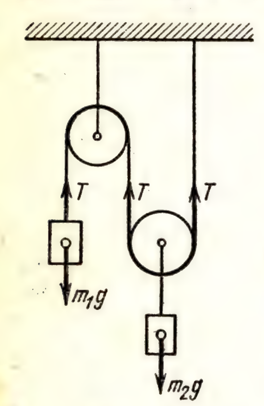


Рис. 227

Решая данную систему уравнений, найдем:

$$T = \frac{3m_1m_2g}{m_2 + 4m_1} \approx 1{,}26 \text{ Н};$$

$$a_1 = \frac{2(m_2 - 2m_1)g}{4m_1 + m_2} = 5{,}6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_2 = \frac{(m_2 - 2m_1)g}{4m_1 + m_2} = 2{,}8 \text{ м/с}^2.$$

126. На тело действуют три силы, изображенные на рис. 228. Ускорение вдоль наклонной плоскости определяется суммой проекций сил на данное направление: $ma = mg\sin\alpha - f$. Сумма проекций сил на направление, перпендикулярное к наклонной плоскости, равна нулю: $N - mg\cos\alpha = 0$. Следовательно, сила трения $f = kN = kmg\cos\alpha$.

Ускорение $a = g\sin\alpha - \frac{f}{m} = g(\sin\alpha - k\cos\alpha) \approx 2{,}45$ м/с².

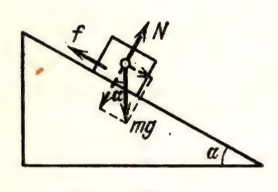


Рис. 228

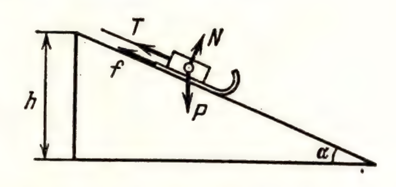


Рис. 229

127. Ускорение тела, как видно из решения задачи 126, равно $a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)$. Согласно условию задачи $\sin\alpha = \frac{h}{l} = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Время и конечная скорость определяются кинематически:

$$t = \sqrt{2l/a} \approx 2{,}5 \text{ с}, \quad v = \sqrt{2al} \approx 8 \text{ м/с}.$$

128. $t = \frac{v_0}{g}\,\frac{\sqrt{\sin\alpha - k\cos\alpha} + \sqrt{\sin\alpha + k\cos\alpha}}{(\sin\alpha + k\cos\alpha)\sqrt{\sin\alpha - k\cos\alpha}}$.

129. Действующие на санки силы изображены на рис. 229. Здесь $P = mg$ — сила тяжести, действующая на санки; N — реакция опоры. Второй закон

Ньютона для движения вдоль наклонной плоскости запишется в форме: $ma = P \sin\alpha - f - T$, где $\sin\alpha = h/l$, а $f = 0{,}1P$. Кинематическое соотношение, определяющее ускорение, имеет вид: $a = v^2/2l$. Следовательно,

$$T = \frac{Ph}{l} - 0{,}1P - \frac{Pv^2}{2gl} \approx 44{,}1 \text{ Н}.$$

130. Тело получает ускорение под действием сил, изображенных на рис. 230. Для движения тела вдоль наклонной плоскости уравнение Ньютона имеет вид: $ma = mg \sin\alpha + F \cos\alpha$. Отсюда

$$a = g \sin\alpha + \frac{F}{m} \cos\alpha = 10 \text{ м/с}^2.$$

Давление на плоскость, равное по третьему закону Ньютона силе N, можно найти из равенства нулю проекций сил на направление, перпендикулярное к наклонной плоскости: $P \cos\alpha - F \sin\alpha - N = 0$. Следовательно,

$$N = P \cos\alpha - F \sin\alpha = 277{,}3 \text{ Н}$$

131. На тела действуют силы, изображенные на рис. 231. Если предположить, что перетягивает груз массы M, то уравнения движения грузов

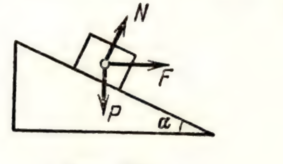


Рис. 230

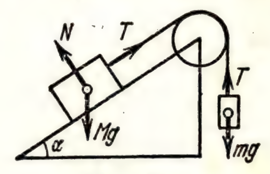


Рис. 231

запишутся в форме: $Ma = Mg \sin\alpha - T$; $ma = T - mg$. Исключая натяжение T, найдем:

$$a = \frac{Mg \sin\alpha - mg}{M + m} = -0{,}98 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус означает, что движение в действительности происходит в направлении, обратном тому, которое мы предположили.

132. Уравнения движения грузов для проекций на направления движения (положительные направления — вверх):

$$ma = mg - T_1; \quad m_2a = T_1 - T - m_2g(\sin\alpha \pm k\cos\alpha);$$

$$m_1a = T - m_1g(\sin\alpha \pm k\cos\alpha).$$

Здесь T_1 — натяжение нити между грузами с массами m и m_1; знак плюс относится к случаю, когда грузы движутся вверх по наклонной плоскости, знак минус — к случаю, когда они движутся вниз; начальная скорость всех грузов равна нулю. Из уравнений движения находим:

$$a = g\frac{m - (m_1 + m_2)(\sin\alpha \pm k\cos\alpha)}{m + m_1 + m_2}, \quad T = m_1m_2g\frac{1 + \sin\alpha \pm k\cos\alpha}{m + m_1 + m_2}.$$

При этом движение вверх по наклонной плоскости ($a > 0$) возможно лишь при условии

$$m > (m_1 + m_2)(\sin\alpha + k\cos\alpha),$$

а движение вниз — при условиях

$$m < (m_1 + m_2)(\sin\alpha - k\cos\alpha) \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha > k.$$

Если эти условия не выполняются, то грузы неподвижны, а величина T может принимать различные значения от 0 до

$$m_1 m_2 g \frac{1+\sin\alpha+k\cos\alpha}{m+m_1+m_2}$$

в зависимости от соотношений между m, m_1, m_2, k и α и от натяжения нити в начальный момент. Например, при $\operatorname{tg}\alpha < k$ и $m < m_2(\sin\alpha + k\cos\alpha)$ грузы на наклонной плоскости можно установить так, что нить между ними не будет натянута, т. е. $T=0$.

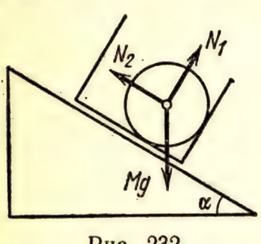


Рис. 232

133. Со стороны ящика на шар могут действовать силы N_1 и N_2, перпендикулярные к дну и к передней стенке ящика (см. рис. 232). Уравнение движения шара, таким образом, будет иметь вид: $Ma = Mg\sin\alpha - N_2$.

Учитывая, что ускорения шара и ящика равны, уравнение движения ящика можно записать в форме: $ma = mg\sin\alpha + N_2$, где m — масса ящика. Эти уравнения совместны лишь при условии $N_2=0$. Давление на переднюю стенку ящика будет отсутствовать, так как составляющие сил тяжести, действующих на шар и ящик, сообщают шару и ящику одинаковые ускорения $g\sin\alpha$.

Сила давления на дно ящика такая же, как и при обычном соскальзывании тела: $N_1 = Mg\cos\alpha$.

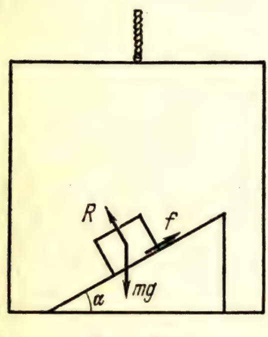


Рис. 233

134. На кубик действуют силы, изображенные на рис. 233: f — сила трения, R — реакция опоры, равная по величине искомому нормальному давлению N. Согласно условию задачи кубик движется вместе с лифтом с ускорением a, направленным вверх. Уравнение движения для вертикального направления имеет вид:

$$ma = R\cos\alpha - mg + f\sin\alpha. \qquad (1)$$

В горизонтальном направлении ускорение отсутствует. Поэтому сумма проекций сил на горизонтальное направление равна нулю:

$$f\cos\alpha - k\sin\alpha = 0. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$N = R = m(g+a)\cos\alpha, \quad f = m(g+a)\sin\alpha.$$

Таким образом, наличие ускорения у лифта эквивалентно увеличению ускорения свободного падения на величину a. Коэффициент трения должен, как и в случае неподвижной наклонной плоскости, удовлетворять условию

$$k > \operatorname{tg}\alpha.$$

135. Проекция силы тяжести, действующая на доску вдоль наклонной плоскости, равна $Mg\sin\alpha$. Следовательно, при равновесии доски такая же сила должна действовать на доску в противоположном направлении со стороны человека.

По третьему закону Ньютона на человека со стороны доски также будет действовать проекция $Mg \sin \alpha$, направленная параллельно плоскости вниз (рис. 234). На этом рисунке изображены лишь те составляющие сил, действующих на доску и человека, которые направлены вдоль наклонной плоскости.

По второму закону Ньютона ускорение человека вдоль наклонной плоскости определяется суммой проекций сил по этому направлению: $ma = mg \sin \alpha + Mg \sin \alpha$. Из этого уравнения найдем, что человек должен бежать с ускорением

$$a = g \sin \alpha \left(1 + \frac{M}{m}\right),$$

направленным вниз. Направление движения самого человека при этом безразлично.

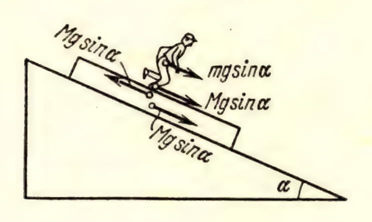


Рис. 234

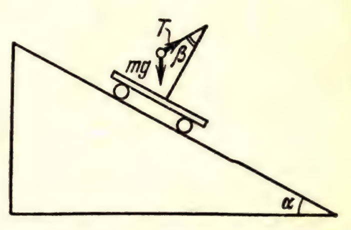


Рис. 235

136. Предположим, что при установившемся движении шарик отклонен от перпендикуляра к наклонной плоскости на угол β (рис. 235). Тогда уравнение Ньютона для движения шарика вдоль плоскости запишется в форме: $ma = mg \sin \alpha + T \sin \beta$.

Сумма сил, действующих на шарик в перпендикулярном к плоскости направлении, равна нулю: $mg \cos \alpha - T \cos \beta = 0$.

Но при установившемся движении все точки тележки, шарик и нить движутся с одним и тем же ускорением $a = g \sin \alpha$. Подставляя его в первое уравнение, получим: $T \sin \beta = 0$. Из второго уравнения видно, что $T \neq 0$. Следовательно, $\beta = 0$ и нить перпендикулярна к наклонной плоскости. Отсюда искомое натяжение

$$T = mg \cos \alpha = 1 \text{ гс} = 9{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

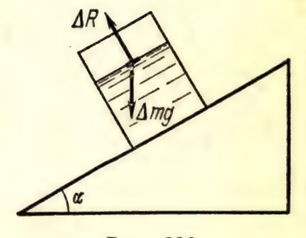


Рис. 236

137. На элемент жидкости Δm у поверхности воды действует сила тяжести Δmg и сила давления ΔR, перпендикулярная к поверхности (рис. 236). Если поверхность жидкости параллельна наклонной плоскости, то уравнение движения элемента жидкости будет иметь вид: $\Delta ma = \Delta mg \sin \alpha$. Следовательно, ускорение этого элемента $a = g \sin \alpha$. Это ускорение должен иметь весь бак с водой. Его уравнение движения

$$Ma = Mg \sin \alpha = Mg \sin \alpha - kMg \cos \alpha + F.$$

Отсюда находим, что действующая на бак сила F равна по величине силе трения:

$$F = kMg \cos \alpha.$$

138. При установившемся движении все элементы ведра с водой движутся по прямым линиям, образующим угол α с горизонтом, как и при движении тела по наклонной плоскости. Следовательно, все элементы воды движутся с ускорением $a = g \sin\alpha$, которое сообщается составляющей силы тяжести вдоль троса. Значит, сила давления со стороны дна ведра на воду перпендикулярна к направлению движения и уравновешивает составляющую силы тяжести вдоль этого направления: $N = mg\cos\alpha$ (рис. 237).

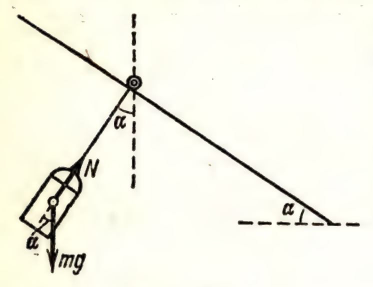


Рис. 237

По условию задачи $m = \rho Sh$, где S — площадь ведра, а ρ — плотность воды. Согласно третьему закону Ньютона давление воды на дно ведра

$$p = N/S = \rho gh\cos\alpha.$$

139. Бревно будет составлять с канатом одну линию лишь в том случае, если оно не будет касаться земли. В противном случае окажется, что сумма моментов сил относительно его центра тяжести отлична от нуля, когда бревно и канат составляют одну линию.

Уравнение движения бревна при выполнении условия задачи будет иметь вид: $ma = T\cos\alpha$, где m — масса бревна, T — сила натяжения каната, α — угол между бревном и поверхностью земли. По вертикали перемещения бревна не происходит, поэтому $mg = T\sin\alpha$. Отсюда

$$a = g\,\mathrm{ctg}\,\alpha \geqslant g\frac{\sqrt{(b+l)^2 - h^2}}{h}.$$

§ 5. Закон сохранения количества движения

140. $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = mvn = 15$ Н.

141. Так как стенка гладкая, то при столкновении составляющая количества движения мяча вдоль стенки не изменяется (см. рис. 238, на котором изображены векторы количества движения мяча перед ударом $\boldsymbol{p}_1$ и после удара $\boldsymbol{p}_2$). Составляющая же, перпендикулярная к стенке, меняет знак. В результате мяч отскакивает под углом α к стенке. Изменение проекции количества движения на направление, перпендикулярное к стенке, равно

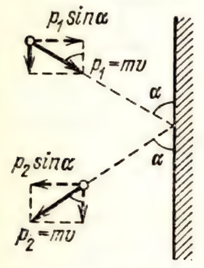


Рис. 238

$$\Delta p = mv\sin\alpha - (-mv\sin\alpha) = 2mv\sin\alpha.$$

Искомая сила

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv\sin\alpha}{\Delta t} = 15 \text{ Н}.$$

142. $\Delta p = m\left(v + \sqrt{2gh}\right) = 1{,}6$ кг · м/с.

143. $u = -mv/M = -3{,}25$ м/с. Знак минус указывает на то, что скорости орудия и снаряда направлены в противоположные стороны.

144. $u = mv/(M+m) \approx 1$ м/с.

145. Количество движения системы пушка — снаряд вдоль горизонтального направления, равное нулю до выстрела, за время выстрела не меняется, так как в этом направлении внешние силы не действуют. В данном случае выстрел произведен под углом α к горизонту, и проекция вектора количества движения снаряда на горизонтальное направление равна $mv\cos\alpha$ (рис. 239). По закону сохранения количества движения $Mu + mv\cos\alpha = 0$. Отсюда

$$u = -\frac{mv\cos\alpha}{M} = -7 \text{ м/с.}$$

146. $f = Ma = \frac{m^2v^2}{2sM} = 1{,}32 \cdot 10^4$ Н.

147. Проекция вектора количества движения снаряда на горизонтальное направление равна $v\sin\alpha$ (рис. 240). Закон сохранения количества движения

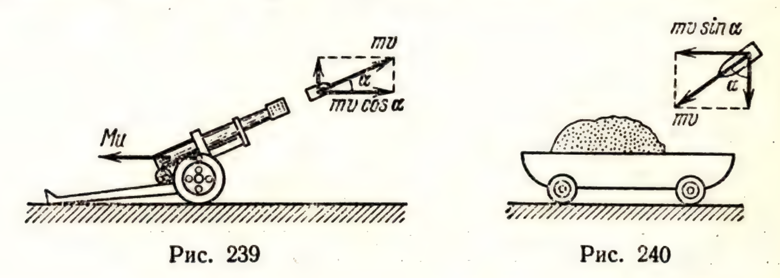


Рис. 239 Рис. 240

для направления вдоль горизонтали будет иметь вид $m_1v\sin\alpha = (m_1+m_2)u$. Отсюда

$$u = \frac{m_1v\sin\alpha}{m_1+m_2} \approx 1{,}25 \text{ м/с.}$$

Вертикальная же составляющая количества движения снаряда будет передана земному шару в целом.

148. $u = ms/Mt = 0{,}083$ м/с.

149. $v_1 = \frac{m}{m_1}v = \frac{5}{7}$ м/с, $v_2 = \frac{m}{m_2+m}v = \frac{5}{9}$ м/с.

150. $s = \frac{m_2^2v^2}{2kg(m_1+m_2)^2} = 50$ м.

151. $u = \frac{Mv - m\sqrt{2gl\sin\alpha}\cdot\cos\alpha}{M+m}$.

152. $v = \frac{(M-m)\sqrt{2gH}}{m} \approx 217$ м/с.

153. В первом случае $u_1 = \frac{m_1u - m_2v}{m_1 - m_2} \approx 6$ км/ч, во втором $u_2 = \frac{m_1u + m_2v}{m_1 - m_2} \approx$ ≈ 12 км/ч.

154. Скорость платформы после попадания на нее камня определяется с помощью закона сохранения количества движения: $u = m_1v/(m_1+m_2) =$ $= 16$ км/ч. Эта скорость не изменится при выпадении камня через люк, так как при этом не возникают силы, действующие на платформу в горизонтальном направлении.

155. $v_1 = \frac{(m_1+m_2)v - m_2 v_2}{m_1} = -15$ м/с; скорость большего осколка направлена против скорости движения ядра до разрыва.

156. $v_1 = \frac{m}{M} v_2 \approx 0{,}2$ м/с, $v_2 = v = 8$ м/с.

157. Скорости лодок после перебрасывания грузов определяются с помощью закона сохранения количества движения. Груз, брошенный вперед (в первую лодку), будет иметь относительно воды скорость $v+u$, а груз, брошенный назад (в третью лодку), приобретет скорость $v-u$. Количество движения системы «первая лодка — груз» до попадания груза в лодку равно $Mv + m(v+u)$. Приравнивая его количеству движения после попадания груза в лодку, получим:

$$Mv + m(v+u) = (M+m)v_1,$$

где v_1 — искомая скорость первой лодки. Отсюда

$$v_1 = \frac{Mv + m(v+u)}{M+m}.$$

Для третьей лодки закон сохранения количества движения имеет вид: $Mv + m(v-u) = (M+m)v_3$, и, следовательно,

$$v_3 = \frac{Mv + m(v-u)}{M+m}.$$

Скорость средней лодки не изменится. Действительно, до перебрасывания грузов количество движения лодки с грузом равно $(M+2m)v$. Согласно условию задачи оно не меняется при выбрасывании грузов:

$$(M+2m)v = Mv_2 + m(v+u) + m(v-u); \quad \text{отсюда} \quad v_2 = v.$$

158. Если скорость человека относительно лодки обозначить через v, а скорость лодки относительно воды — через u, то скорость человека относительно воды будет равна $v+u$. По закону сохранения количества движения $m(v+u) + Mu = 0$. Отсюда $\frac{u}{v} = -\frac{m}{M+m}$. Отношение скоростей во время движения остается постоянным. Поэтому отношение пройденных перемещений будет равно отношению скоростей: $\frac{s}{l} = -\frac{m}{M+m}$. Следовательно,

$$s = -\frac{lm}{M+m} = -1 \text{ м}.$$

Знак минус показывает, что перемещения человека и лодки противоположны по направлению.

159. Полная сила, с которой поезд действует на земной шар в горизонтальном направлении, равна нулю, так как сила тяги постоянна и равна силе трения. Разрыв состава не меняет этого факта, ибо сопротивление движению не зависит по условию задачи от скорости. Следовательно, сила, действующая в горизонтальном направлении со стороны Земли на систему «поезд — оторвавшийся вагон», также равна нулю. Поэтому к системе можно применить закон сохранения количества движения.

Удобнее всего это сделать в системе отсчета, движущейся со скоростью, равной скорости поезда до его разрыва: $mv + (M-m)u = 0$, где v и u — ско-

рости вагона и поезда относительно выбранной системы отсчета в произвольный момент времени. Очевидно, $\frac{v}{u} = -\frac{M-m}{m}$. Знак минус соответствует тому, что в нашей системе вагон и поезд движутся в разные стороны.

Так как отношение скоростей постоянно и начальные скорости вагона и поезда одинаковы, то отношение путей, пройденных в движущейся системе вагоном l'_1 и поездом l'_2, будет равно отношению скоростей:

$$\frac{l'_1}{l'_2} = \frac{M-m}{m}. \quad (1)$$

В момент, когда скорость вагона в движущейся системе координат станет равной скорости v_0 поезда до его разрыва, будет выполняться равенство

$$s = l'_1 + l'_2. \quad (2)$$

Пройденное вагоном расстояние l'_1 равно l_1 — расстоянию, которое вагон проходит до остановки в покоящейся системе координат. Ведь ускорение вагона по величине и время движения вагона одинаковы в обеих системах, и в одной из них скорость меняется от нуля до v_0, а в другой от v_0 до нуля Решая систему уравнений (1) и (2), найдем:

$$l_1 = \frac{M-m}{M} s = 480 \text{ м}.$$

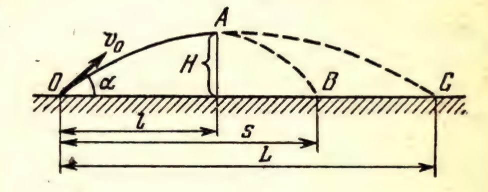


Рис. 241

160. На рис. 241 изображены траектории снаряда и осколков. Разрыв происходит в точке A. Как вытекает из кинематических соотношений, эта точка лежит на высоте $H = (v_0^2 \sin^2 \alpha)/2g$ и находится на расстоянии $l = (v_0^2 \sin 2\alpha)/2g$ от места выстрела (см. задачи 56, 57). Скорость снаряда в этой точке $v_H = v_0 \cos \alpha$. Начальные скорости осколков снаряда v_1 и v_2 связаны с v_H законом сохранения количества движения: $Mv_H = \frac{M}{2} v_1 + \frac{M}{2} v_2$, где M — масса снаряда.

Скорость первого осколка v_1 можно найти по заданному расстоянию s. Очевидно, $s - l = v_1 t$, где $t = \sqrt{2H/g} = (v_0 \sin \alpha)/g$ — время полета осколка. Отсюда

$$v_1 = \frac{sg}{v_0 \sin \alpha} - v_0 \cos \alpha.$$

Начальная скорость второго осколка $v_2 = 2v_H - v_1 = 3v_0 \cos \alpha - \frac{sg}{v_0 \sin \alpha}$. Искомое расстояние

$$L = l + v_2 t = \frac{2v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - s.$$

Данную задачу можно решить другим способом. Центр тяжести осколков движется так, как двигался бы неразорвавшийся снаряд. Осколки падают на землю одновременно, и центр тяжести системы в момент падения будет находиться на расстоянии $2l$ от места выстрела. Для этого необходимо, чтобы

выполнялось соотношение

$$\frac{M}{2}(2l-s)=\frac{M}{2}(L-2l);\quad \text{отсюда}\quad L=4l-s=\frac{2v_0^2\sin 2\alpha}{g}-s.$$

161. Примем за положительные направления вертикальное вниз и горизонтальное в сторону полета снаряда (рис. 242). После разрыва снаряда первый осколок согласно условию задачи имеет только вертикальную составляющую скорости. Поэтому закон сохранения количества движения для горизонтального направления имеет вид $Mv=\frac{M}{2}v_{2x}$, где M — масса снаряда, а v_{2x} — горизонтальная проекция скорости второго осколка.

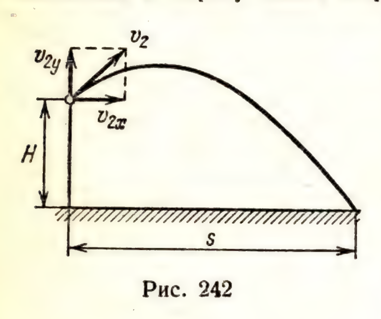


Рис. 242

Так как количество движения снаряда по вертикали перед взрывом равно нулю, $\frac{M}{2}v_{1y}+\frac{M}{2}v_{2y}=0$, то вертикальные составляющие скоростей осколков равны по величине и направлены в противоположные стороны. Следовательно, $v_{2y}=-v_{1y}$.

Запишем также кинематические уравнения движения осколков. Для первого и второго осколков

$$H=v_{1y}\tau+\frac{g\tau^2}{2},\quad H=v_{2y}t+\frac{gt^2}{2}\quad \text{и}\quad s=v_{2x}t,$$

где t — время падения второго осколка. Исключив из этих уравнений v_{1y}, v_{2x}, v_{2y} и t, получим для скорости снаряда перед разрывом квадратное уравнение:

$$v^2-\frac{s}{2H}\left(\frac{g\tau}{2}-\frac{H}{\tau}\right)v-\frac{gs^2}{8H}=0.$$

Из двух его корней

$$v=\frac{s}{4H}\left(\frac{g\tau}{2}-\frac{H}{\tau}\right)\pm\frac{s}{4H}\left(\frac{g\tau}{2}+\frac{H}{\tau}\right)$$

решением задачи будет корень, содержащий знак плюс, так как при нашем выборе положительного направления $v>0$.

Таким образом, окончательно $v=sg\tau/4H$.

§ 6. Статика

162. $T_1=F$; $T_2=2F$.

163. $d=D\sqrt{10p/nT}\approx 0{,}036$ м $=36$ мм.

164. Действующие на брусок силы изображены на рис. 243. N — нормальное давление, $f\leqslant kN$ — сила трения, $P=mg$ — сила тяжести. При равновесии $N=F$ и $f=P$. Следовательно, $kF\geqslant P$. Максимальное значение силы $F=$ $=P/k=490$ Н.

165. $F>kmg$.

166. На брусок действуют четыре силы, изображенные на рис. 244. Здесь N — нормальное давление, а $f\leqslant kN$ — сила трения. При равновесии суммы

проекций сил вдоль наклонной плоскости и в перпендикулярном направлении равны нулю:

$$f - mg\sin\alpha = 0; \quad F + mg\cos\alpha - N = 0.$$

Отсюда

$$F \geqslant \frac{mg}{k}(\sin\alpha - k\cos\alpha) \approx 32 \text{ Н}.$$

167. Действующие на доску силы изображены на рис. 245: N_1, N_2 — силы реакции, f_1, f_2 — силы трения, mg — сила тяжести. Равенство нулю суммы моментов сил относительно осей, проходящих через нижнюю и верхнюю опоры,

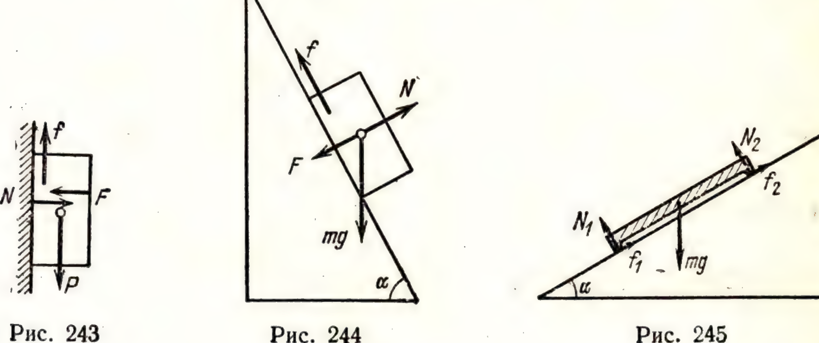


Рис. 243 Рис. 244 Рис. 245

дает: $N_1 = N_2 = \frac{1}{2}mg\cos\alpha$. Равенство нулю суммы проекций сил на направление вдоль наклонной плоскости приводит к уравнению $mg\sin\alpha = f_1 + f_2$. Скольжение будет отсутствовать при $f_1 \leqslant k_1 N_1$ и $f_2 \leqslant k_2 N_2$. Предельное значение угла определяется уравнением

$$mg\sin\alpha = (k_1 + k_2)\cdot\frac{1}{2}mg\cos\alpha; \quad \text{отсюда} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

168. Равенство проекций сил на горизонтальное направление требует равенства натяжения тросов (рис. 246). Для равновесия необходимо, чтобы сумма проекций сил на вертикальное направление была равна нулю: $2T\cos(\alpha/2) - P = 0$, где $P = mg$ — сила тяжести. Отсюда

$$T = \frac{mg}{2\cos(\alpha/2)} = 196 \text{ Н}.$$

169. $T_1 = T_3 \approx 98$ Н, $T_2 = 97{,}5$ Н.

170. На рис. 247 изображены силы, действующие на точку B кронштейна; $P = mg$ — сила тяжести, действующая на груз. Стержень AB растянут с силой T_1, а стержень BC сжат с силой T_2. Суммы проекций этих сил вдоль горизонтали и вдоль вертикали равны нулю, так как точка B находится в равновесии: $T_1 - T_2\cos\alpha = 0$, $P - T_2\sin\alpha = 0$. Отсюда

$$T_1 = mg\operatorname{ctg}\alpha = 568 \text{ Н}; \quad T_2 = \frac{mg}{\sin\alpha} \approx 1126 \text{ Н}.$$

171. $P = \sqrt{P_1 P_2} \approx 2{,}9$ кгс.

172. Равенство моментов сил тяжести относительно оси, проходящей через точку O (рис. 248), приводит к уравнению $mg\frac{l}{5}=Mg\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{5}\right)$, где l — длина стержня. Отсюда $M=2m/3=0{,}8$ кг.

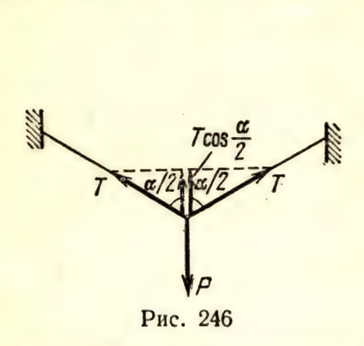


Рис. 246

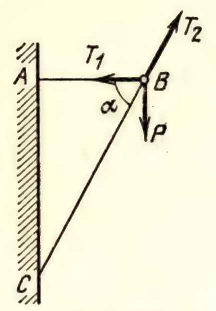


Рис. 247

173. Относительно оси, проходящей через край платформы, сумма моментов сил P и F равна нулю. Так как плечи этих сил в соответствии с условиями задачи одинаковы (рис. 249), то $P=F=2000$ Н.

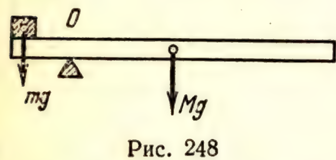


Рис. 248

174. На рис. 250 изображены силы, действующие на трубу. Согласно третьему закону Ньютона F_1 и F_2 равны по величине искомым силам. Так как сумма сил должна быть при равновесии равна нулю, то $F_1+F_2-mg=0$. Равенство моментов сил относительно оси, проходящей через точку B (можно было бы выбрать и любую другую ось), имеет вид $F_1(L-a)=mg(L/2)$. Решая полученную систему уравнений, найдем:

$$F_1=\frac{mgL}{2(L-a)}=490\text{ Н};\quad F_2=\frac{mg(L-2a)}{2(L-a)}=294\text{ Н}.$$

175. Если верхний конец лестницы немного отошел от стенки, то относительно оси, проходящей через точку O (рис. 251), момент создают только

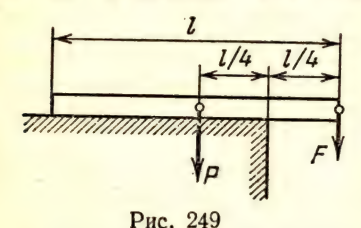


Рис. 249

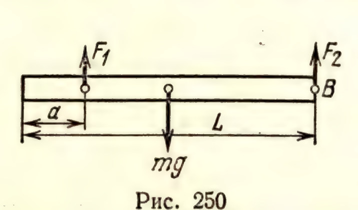


Рис. 250

силы F и $P=mg$. Равенство моментов этих сил позволяет записать уравнение

$$F\frac{L}{2}\cos\alpha-P\frac{2L}{3}\sin\alpha=0,$$

где L — длина лестницы. Отсюда $F=\frac{4}{3}mg\operatorname{tg}\alpha$.

176. $\alpha = \operatorname{arctg}(1/2k)$.

177. Действующие на дощечки силы изображены на рис. 252. Из равенства суммы сил вдоль вертикали следует, что $N = P$. Уравнение моментов сил

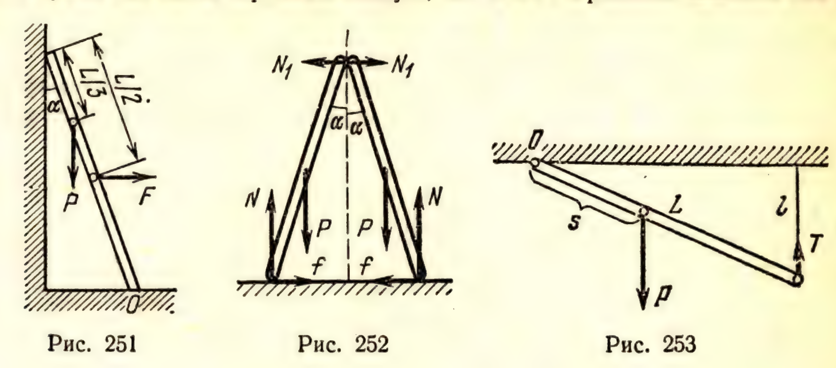


Рис. 251 Рис. 252 Рис. 253

относительно оси, проходящей через точку соприкосновения дощечек, имеет вид:

$$P\frac{1}{2}l\sin\alpha + fl\cos\alpha = Nl\sin\alpha.$$

Здесь l — длина дощечки. Отсюда

$$f = \left(N - \frac{1}{2}P\right)\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}N\operatorname{tg}\alpha.$$

Для равновесия необходимо выполнение условия $f \leqslant kN$. Следовательно,

$$k \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

178. Равенство нулю суммы моментов сил P и T (рис. 253) относительно оси шарнира (точка O) приводит к уравнению

$$T\sqrt{L^2 - l^2} - Ps\frac{\sqrt{L^2 - l^2}}{L} = 0,$$

где l — длина шнура. Отсюда искомое натяжение $T = Ps/L = 6$ Н.

179. $F_{\text{мин}} = \dfrac{P\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$.

180. $F = P(r_1 - r_2)/2l = 5$ Н.

181. $m_2 = \dfrac{m_1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; равновесие неустойчиво.

182. Так как стенка гладкая, то со стороны стены на шар действует только реакция опоры N, перпендикулярная к стене (рис. 254). Эта сила по третьему закону Ньютона равна по величине искомой силе давления шара на стену. Моменты сил N и $P = mg$ относительно точки O равны нулю. Следовательно, натяжение T нити также не создает момента относительно этой точки. Продолжение нити пройдет через центр шара.

Условия равновесия для составляющих сил вдоль горизонтали и вертикали имеют вид: $N - T\sin\alpha = 0$, $P - T\cos\alpha = 0$. Отсюда $N = P\operatorname{tg}\alpha$.

Из треугольника AOB находим:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{R}{\sqrt{(l+R)^2-R^2}};$$

следовательно, $N=\frac{PR}{\sqrt{l^2+2Rl}}=1{,}23$ Н.

183. Силы, действующие на шар, изображены на рис. 255. Сумма проекций сил на направление, перпендикулярное к дну чаши, должна быть равна

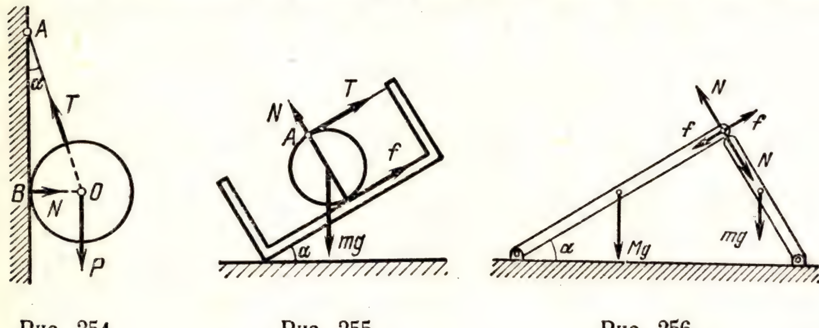


Рис. 254 Рис. 255 Рис. 256

нулю. Проекции на это направление имеют только сила тяжести mg и реакция дна чаши N. Таким образом, $N=mg\cos\alpha$. Следовательно, сила трения

$$f\leqslant kmg\cos\alpha. \qquad (1)$$

Равновесие шара зависит от выполнения этого неравенства. Поэтому выберем ось, относительно которой будем определять моменты сил, так, чтобы момент силы трения был отличен от нуля, момент же силы натяжения нити T обращался бы в нуль (чтобы можно было не вычислять эту силу). Этому условию удовлетворяет ось, проходящая через точку A закрепления нити перпендикулярно к плоскости рисунка. Относительно этой оси плечо силы трения $2R$, плечо силы тяжести $l=R\sin\alpha$, а плечи сил T и N равны нулю (R — радиус шара). Сумма моментов сил при равновесии равна нулю, т. е.

$$2Rf-mgR\sin\alpha=0; \quad \text{отсюда} \quad f=\frac{1}{2}mg\sin\alpha.$$

Учитывая неравенство (1), найдем, что при равновесии $kmg\cos\alpha\geqslant\frac{1}{2}mg\sin\alpha$. Следовательно, максимальный угол α определяется из условия $\operatorname{tg}\alpha=2k$.

184. Силы, действующие на верхние концы палочек, изображены на рис. 256: f — силы трения, N — силы упругого взаимодействия. Пусть L — длина большой палочки, а l — маленькой. Тогда уравнения моментов относительно осей A и B, проходящих через концы палочек (см. рис. 38), имеют вид:

$$Mg\frac{L}{2}\cos\alpha=NL, \quad mg\frac{l}{2}\sin\alpha=fl.$$

Отсюда

$$N=\frac{1}{2}Mg\cos\alpha, \quad f=\frac{1}{2}mg\sin\alpha.$$

Так как $f \leqslant kN$, то минимальное значение коэффициента трения, при котором система будет находиться в равновесии, равно:

$$k = \frac{f}{N} = \frac{m}{M} \operatorname{tg} \alpha.$$

185. Для равновесия необходимо, чтобы равнялись нулю сумма сил, действующих на стержень, и сумма моментов сил относительно оси, проходящей через любую неподвижную точку. Из уравнения $F_1 + F - F_2 = 0$ вытекает, что сила F параллельна силам F_1 и F_2, направлена вдоль F_1 и равна $F_2 - F_1 = 15$ Н (рис. 257).

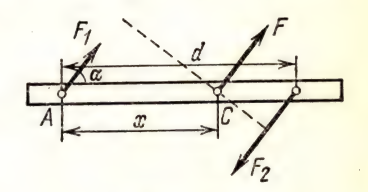


Рис. 257

Точку приложения силы F проще всего найти, если рассмотреть сумму моментов сил относительно оси, проходящей через эту точку. В этом случае момент силы F будет равен нулю и моменты сил F_1 и F_2 должны уравновешивать друг друга. Пусть эта точка C расположена на расстоянии x от точки A и все силы составляют со стержнем угол α. Тогда равенство моментов сил будет иметь вид $F_1 x \sin \alpha + F_2 (d - x) \sin \alpha = 0$. Отсюда $x = \dfrac{F_2 d}{F_2 - F_1} = 2{,}5$ м.

Результат не зависит от величины угла α. Исключение представляет случай $\alpha = 0$, когда сила F может быть приложена в любой точке стержня.

186. Сумма моментов сил тяжести относительно оси, проходящей через центр тяжести, должна равняться нулю. Обозначив через x расстояние от центра тяжести системы до центра тяжести стержня (рис. 258), получим уравнение

$$P_1 \left(\frac{l_1}{2} + \frac{d}{2} + x \right) + P_3 x - P_2 \left(\frac{l_2}{2} + \frac{d}{2} - x \right) = 0.$$

Отсюда $x = \dfrac{P_2 (l_2 + d) - P_1 (l_1 + d)}{2 (P_1 + P_2 + P_3)} = 0{,}05$ м, т. е. центр тяжести системы лежит в точке прикрепления второго кубика.

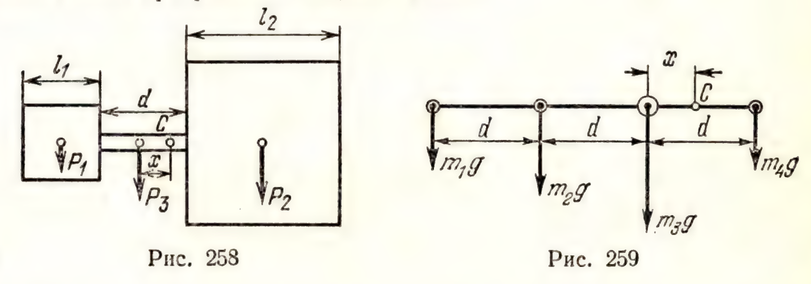


Рис. 258 Рис. 259

187. Положение центра тяжести системы заранее не известно. Поэтому можем предположить, что он находится в произвольной точке C стержня, не совпадающей с центром ни одного из шаров (рис. 259). Сумма моментов сил относительно оси, проходящей через точку C, должна быть равна нулю:

$$m_1 g (2d + x) + m_2 g (d + x) + m_3 g x - m_4 g (d - x) = 0.$$

Отсюда

$$x=\frac{m_4-m_2-2m_1}{m_1+m_2+m_3+m_4}d=-0{,}05 \text{ м}.$$

Знак минус означает, что центр тяжести системы лежит не справа от центра третьего шара, как мы предположили, а слева на расстоянии 5 см.

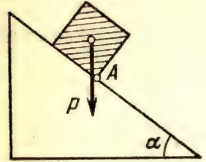


Рис. 260

188. Расстояние от середины медной проволоки до центра тяжести

$$x=\frac{\sqrt{3}\,\rho_a l}{2(2\rho_a+\rho_м)}\approx 16{,}3 \text{ см}.$$

189. Для того чтобы цилиндр не опрокинулся, необходимо, чтобы момент силы тяжести относительно оси, проходящей через точку A (рис. 260), поворачивал цилиндр против часовой стрелки. Следовательно, вертикальная прямая, проведенная через центр тяжести, должна проходить через основание цилиндра. По условию задачи сечение цилиндра представляет собой квадрат. Поэтому максимально допустимое значение угла α равно 45°.

190. $x=h^2/(d+2h)=4{,}5$ см.

191. $h/R=\sqrt{2/3}$.

192. На рис. 261 изображены силы, создающие отличный от нуля момент относительно оси, проходящей через точку A. Плечи сил $P_1=m_1g$ и $P_2=m_2g$ равны соответственно: $BC=\frac{3}{8}r\sin\alpha$ и $ED=r\cos\alpha$. Из равенства нулю суммы моментов этих сил $m_1\frac{3}{8}r\sin\alpha-m_2\cos\alpha=0$ следует: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{3}\frac{m_2}{m_1}$.

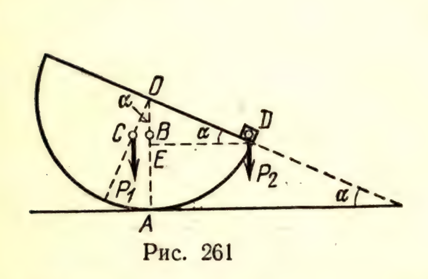


Рис. 261

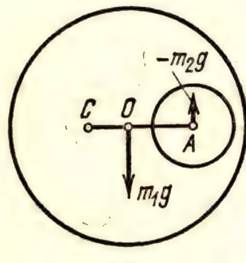


Рис. 262

193. При определении положения центра тяжести диск с вырезом формально можно рассматривать как сплошной диск с массой m_1, на который наложен диск радиуса r с отрицательной массой $-m_2$, равной по величине массе вырезанной части. Из соображений симметрии очевидно, что центр тяжести (точка C на рис. 262) лежит на продолжении прямой OA, соединяющей центры диска и выреза. Равенство моментов сил тяжести положительной и отрицательной масс относительно оси, проходящей через точку C, дает уравнение, определяющее искомое расстояние $x=OC$:

$$m_1gx=m_2g\left(x+\frac{R}{2}\right).$$

Учитывая, что $m_1 = \pi R^2 \sigma$ и $m_2 = \pi r^2 \sigma$, где σ — масса единицы площади диска, находим из этого уравнения:

$$x = \frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}.$$

194. На рис. 263 изображены силы, действующие на плиту. Из соображений симметрии очевидно, что в вершинах, соответствующих равным углам, на плиту со стороны несущих ее людей действуют одинаковые силы, т. е. $F_2 = F_3$. Центр тяжести треугольника лежит на пересечении его медиан (точка C на рис. 263). Равенство нулю суммы моментов сил относительно оси OO', проходящей через центр тяжести плиты параллельно основанию BD, приводит к уравнению

$$F_2 \frac{h}{3} + F_3 \frac{h}{3} - F_1 \frac{2h}{3} = 0.$$

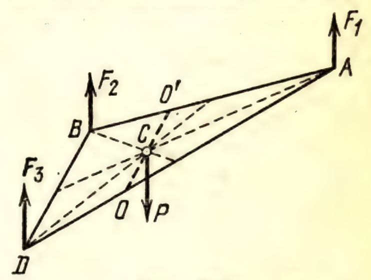


Рис. 263

Здесь учтено, что в равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, совпадает с медианой, а точка пересечения медиан отстоит от основания треугольника на 1/3 длины медианы. Из этого уравнения следует: $F_1 = F_2 = F_3$. Так как при равновесии сумма сил, действующих на плиту, равна нулю, то

$$F_1 + F_2 + F_3 - P = 0, \quad \text{где} \quad P = \frac{ah}{2} \rho g d \text{ — сила тяжести плиты.}$$

Учитывая, что силы F_1, F_2 и F_3 согласно третьему закону Ньютона равны по величине искомым силам, получаем:

$$F_1 = F_2 = F_3 = \frac{P}{3} = \frac{ah\rho g d}{6} \approx 176{,}4 \text{ Н}.$$

195. $l = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \dfrac{m_2 - m_1}{m_2} \approx 17{,}3$ см.

196. Стержень остается горизонтальным, если удлинения пружин одинаковы. В этом случае на стержень со стороны пружин будут действовать силы $F_1 = k_1 x$ и $F_2 = k_2 x$, где x — удлинение пружины (рис. 264). Точка O прикрепления груза определяется равенством моментов сил F_1 и F_2 относительно оси, проходящей через точку O: $F_1 a = F_2 (L - a)$, где a — расстояние от точки O до пружины с коэффициентом упругости k_1. Отсюда искомое расстояние $a = L \dfrac{k_2}{k_1 + k_2} = 0{,}6$ м.

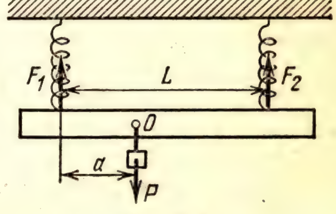


Рис. 264

197. $\Delta l = 3mgl / 2\pi r^2 E = 0{,}38$ мм.

198. Действующие на точку D силы изображены на рис. 265. Здесь $P = mg$ — сила тяжести, действующая на груз. Из соображений симметрии очевидно, что стержни AD и BD сжаты одинаково. Спроектировав силы на

направление высоты DE пирамиды $ABCD$ и приравняв нулю сумму проекций сил, получим уравнение $T \cos\alpha - 2N \cos\alpha = 0$, где α — угол между любым из ребер пирамиды и её высотой DE (равенство углов между ребрами пирамиды и высотой DE вытекает из равенства прямоугольных треугольников CDE, ADE и BDE).

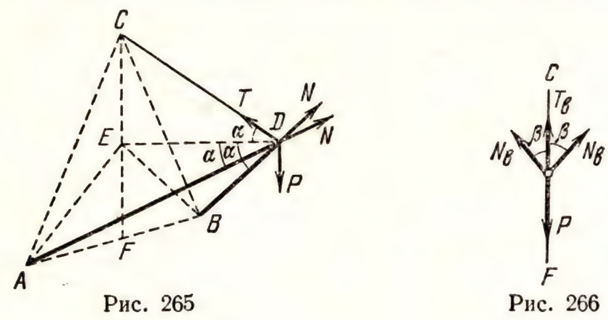


Рис. 265 Рис. 266

Теперь найдем проекции всех сил на вертикальную плоскость, перпендикулярную к высоте DE. Они изображены на рис. 266. Очевидно, $T_в = T \sin\alpha$; $N_в = N \sin\alpha$, причем $\sin\alpha = CE/l$. Угол $\beta = \angle AEF$; $\cos\beta = \frac{h - CE}{AE} = \frac{h - CE}{CE}$.

Сумма проекций всех сил на вертикаль CF равна нулю:

$$P - T \sin\alpha - 2N \sin\alpha \cos\beta = 0.$$

Учитывая, что $T = 2N$, и подставляя выражения для углов α и β, получим:

$$T = lmg/h; \quad N = lmg/2h.$$

§ 7. Работа и энергия

199. $l_2 = 4l_1 = 60$ см.

200. $F = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2d} = -2{,}5 \cdot 10^4$ Н; знак минус указывает на то, что сила F направлена против скорости пули.

201. $v = \sqrt{v_0^2 - 2Fd/m}$ и не зависит от скорости доски.

202. $s = \frac{m_2^2 v^2}{2(m_1 + m_2)^2 kg} = 50$ м.

203. Работа силы F равна приращению кинетической энергии, $Fx = E$, где x — расстояние, пройденное телом за время t. Так как ускорение тела $a = F/m$ постоянно, то $x = Ft^2/2m$. Следовательно, $E = (Ft)^2/2m = 0{,}05$ Дж.

204. $F = mv^2/2s = 9{,}6 \cdot 10^5$ Н; сила торможения должна увеличиться в два раза.

205. $A = \frac{m_1 v_1^2}{2m_2}(m_1 + m_2) = 38{,}4$ Дж.

206. $\overline{W} = mv^3/4l = 160$ кВт.

207. В 4 раза.

208. $W_{макс} = 4s^2m/t^3 = 200$ кВт.

209. Коэффициент полезного действия $\eta = Fv/W$. Отсюда $F = \eta W/v = 3{,}2 \cdot 10^4$ Н.

210. $\alpha = \frac{W}{mgv} - k \approx 0{,}007$ рад.

211. $V_0 = W/\rho g H \eta = 10^3$ м³/с.

212. $W_0 = MgH/\eta\tau = 20$ кВт.

213. $\alpha \approx \arcsin(0{,}3) \approx 17°$.

214. $W_0 = (mgl \sin\alpha)/\tau\eta \approx 3{,}46$ кВт.

215. $v \geqslant \sqrt{4gl} \approx 198$ см/с.

216. Потенциальная энергия маятника, отклоненного на угол α, равна $U = mgh$, где $h = DC$ (рис. 267). Очевидно, что $DC = BD - BC = l(1 - \cos\alpha) = l \cdot 2\sin^2(\alpha/2)$. Следовательно, $U = 2mgl \sin^2(\alpha/2)$. Максимальную скорость маятник будет иметь в положении D, когда вся потенциальная энергия его превратится в кинетическую, $2mgl \sin^2(\alpha/2) = mv^2/2$. Отсюда $v = 2\sqrt{gl}\sin(\alpha/2)$.

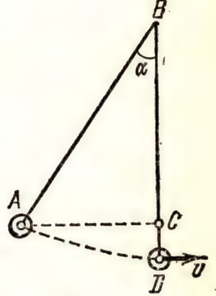


Рис. 267

217. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gH}$.

218. $T = mg^2t^2/2 \sin^2\alpha \approx 58$ Дж.

219. $T = mg^2t^2/4 = 480$ Дж.

220. $T = mg^2\tau^2/2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ Дж.

221. $A = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = 4987{,}5$ Дж.

222. $p_{\text{ср}} = mg^2t^2/2\pi d^2 l \approx 6{,}1 \cdot 10^4$ Н/м² $\approx 0{,}6$ атм.

223. $H = v_0^2/4g = 61{,}25$ м.

224. $T = h(F - mg) = 98$ Дж.

225. $F = \frac{m}{2s}[v_0^2 + 2g(H + s)] \approx 26\,900$ Н.

226. Если принять за нуль потенциальную энергию груза на уровне головки сваи, то энергия груза в момент удара будет только кинетической. Она равна полной энергии груза в тот момент, когда груз был отпущен, т. е.

$$E = \frac{Pv_1^2}{2g} = PH + \frac{Pv^2}{2g} = 2{,}25 \cdot 10^4 \text{ Дж.} \quad (1)$$

Здесь v_1 — скорость груза непосредственно перед ударом.

Ввиду кратковременности удара сила сопротивления грунта не может за время удара заметно изменить количество движения системы. Так как удар неупругий, то

$$\frac{Pv_1}{g} = \frac{(P+Q)v_2}{g}, \quad (2)$$

где v_2 — скорость груза и сваи сразу после удара. Разность конечной энергии груза и сваи (их потенциальной энергии на глубине h) и их начальной энергии (кинетической их энергии сразу после удара) равна работе сил сопротивления грунта, т. е.

$$(P+Q)h - \frac{(P+Q)v_2^2}{2g} = Fh. \quad (3)$$

Из соотношений (1)—(3) найдем:

$$h = \frac{P^2(2gH + v^2)}{2g(P+Q)(P+Q-F)} = -0{,}6 \text{ м.}$$

Здесь $F > (P+Q)$. В противном случае свая безостановочно погружается, если даже груз на нее помещен без всякого удара, а при $Q > F$ ее погружение происходит вообще без груза.

Время между двумя последовательными ударами не меньше

$$t = \frac{H}{v} + \frac{v}{g} + \frac{\sqrt{2gH + v^2}}{g}.$$

Число ударов в минуту не более

$$n = \frac{60vg}{Hg + v^2 + v\sqrt{2gH + v^2}} \approx 13.$$

227. $A = mgh + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \approx 8{,}1 \cdot 10^7$ Дж, без учета работы по преодолению сопротивления воздуха.

228. $\alpha \approx 60°$.

229. $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{m^2 v_1^2}{2M^2 g}$.

230. $T = U = mg^2\tau^2/8 \approx 5$ Дж.

231. $v_0 = 4\sqrt{2gH}/3 = 16{,}2$ м/с.

232. $H = \frac{v^2}{2g(1 + k \operatorname{ctg} \alpha)}$.

233. $s = H(1 - k \operatorname{ctg} \alpha)/k$. При $k > \operatorname{tg} \alpha$ санки останутся на месте.

234. $U_3 - U_2 = mgl$; $U_2 - U_1 = mg\frac{l}{2}$; $U_3 - U_1 = mg\frac{3}{2}l$.

235. $A = S\rho g H^2/2 = 19{,}6 \cdot 10^5$ Дж, где ρ — плотность земли.

236. Пусть потенциальная энергия цепочки, лежащей на столе, равна нулю. Тогда в момент, когда будет свешиваться часть цепочки длиной x, ее потенциальная энергия будет равна силе тяжести $\frac{m}{L}gx$ свешивающейся части, умноженной на $-x/2$ (цепочка однородна, и центр тяжести свешивающейся части находится на расстоянии $x/2$ ниже края стола). Здесь m — масса цепочки. На основании закона сохранения энергии имеем (пренебрегая потенциальной энергией части цепочки, свешивающейся в начальный момент): $\frac{mv^2}{2} - \frac{mg}{2L}x^2 = 0$. Отсюда $v = x\sqrt{g/L}$.

237. Центр тяжести воды в колодце находится на расстоянии $\frac{3}{4}H$ от поверхности земли. Поэтому на подъем воды из колодца затрачивается работа

$$A_1 = mg\frac{3}{4}H = \rho g \frac{H}{2} S \frac{3}{4} H = \frac{3}{8}\rho g S H^2,$$

где ρ — плотность воды.

Кроме того, насос сообщает воде некоторую кинетическую энергию, так как из трубы вода вытекает с определенной скоростью. Эту скорость v можно найти из соотношения $\frac{H}{2}S = \pi R^2 v\tau$. Дополнительная работа

$$A_2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\rho H^3 S^3}{16\pi^2 R^4 \tau^2}.$$

Полная работа

$$A=\frac{3}{8}\rho gSH^2+\frac{\rho H^3S^3}{16\pi^2R^4\tau^2}.$$

238. $T=\frac{m_1^2v_1^2}{2(m_1+m_2)}\approx 1{,}8\cdot 10^{-8}$ Дж.

239. Согласно закону сохранения количества движения $mv_0=Mu+mv$, где u и v — скорости шара и пули в первый момент после пробивания шара пулей. Закон сохранения энергии дает два уравнения: $Mgh=Mu^2/2$ и $mgH=$ $=mv^2/2$. Исключая из этих уравнений u и v, найдем:

$$H=\frac{(mv_0-M\sqrt{2gh})^2}{2m^2g}.$$

240. $T=mv_0^2/10=0{,}2$ Дж.

241. $U=kmgl$.

242. На основании законов сохранения количества движения и энергии можно записать следующие уравнения:

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2';$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_1v_1'^2}{2}+\frac{m_2v_2'^2}{2},$$

где v_1' и v_2' — скорости шаров после соударения. Для решения этой системы уравнений удобно в обоих уравнениях по одну сторону знака равенства объединить величины, относящиеся к первому шару, а по другую — ко второму, после чего разделить второе уравнение на первое. В результате получится уравнение первой степени: $v_1+v_1'=v_2+v_2'$. Решая это уравнение совместно с первым, легко получить:

$$v_1'=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2};\quad v_2'=\frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2}.$$

243. $\tau=2L/v$.

244. На основании закона сохранения энергии $mgh=\frac{mu^2}{2}+\frac{Mv^2}{2}$, где u — скорость бруска, а v — скорость клина после того, как брусок соскользнет на горизонтальную поверхность. Согласно закону сохранения импульса $mu=Mv$. Данные уравнения позволяют определить скорость: $v=m\sqrt{\frac{2gh}{(m+M)M}}$.

245. При столкновении двух одинаковых шаров происходит обмен скоростями. Движущийся шар останавливается, а покоящийся приобретает его скорость. Это непосредственно вытекает из выражений для скоростей шаров после столкновения, полученных при решении задачи 242:

$$v_1'=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2};\quad v_2'=\frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2}.$$

При $m_1=m_2$ и $v_2=0$ будем иметь: $v_1'=0$, а $v_2'=v_1$. Поэтому после ряда последовательных столкновений все шары будут покоиться, кроме последнего шара, который приобретает скорость $v=10$ м/с.

246. Шар A получит скорость $v=-v_0/5$, а шары B и C — скорости $v_1=$ $=4v_0/5$.

247. В момент столкновения на маленькие шары действуют силы, направленные вдоль линий, соединяющих их центры с центром большого шара. Поэтому после столкновения их движение происходит по этим линиям. Ввиду симметрии их скорости имеют одинаковую величину и составляют с направлением движения большого шара одинаковые углы α (рис. 268). Большой же шар сохраняет свое направление движения.

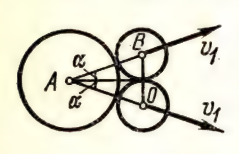


Рис. 268

Запишем закон сохранения импульса для проекций на направление движения большого шара и закон сохранения энергии:

$$Mv_0 = Mv + 2mv_1 \cos\alpha, \quad \frac{Mv_0^2}{2} = \frac{2mv_1^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}, \qquad (1)$$

где M — масса большого, а m — масса маленького шара. Преобразуем выражения (1) к виду:

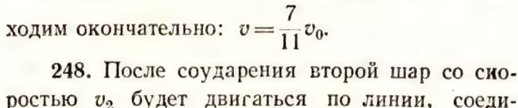
$$M(v_0 - v) = 2mv_1 \cos\alpha, \quad M(v_0^2 - v^2) = 2mv_1^2. \qquad (2)$$

Затем, возведя первое из уравнений (2) в квадрат и поделив на второе, получим:

$$\frac{M(v_0 - v)}{v_0 + v} = 2m\cos^2\alpha. \qquad (3)$$

При делении отброшен случай $v = v_0$, когда скорость большого шара не изменяется, т. е. столкновения не произошло. Из уравнения (3) найдем:

$$v = \frac{M - 2m\cos^2\alpha}{M + 2m\cos^2\alpha}.$$



Рассматривая треугольник OAB, получим: $\cos^2\alpha = 8/9$. Учитывая также, что $M = 8m$, находим окончательно: $v = \frac{7}{11}v_0$.

Рис. 269

248. После соударения второй шар со скоростью v_2 будет двигаться по линии, соединяющей центры шаров во время столкновения (см. решение задачи 247), а первый — под углом α_1 к этой линии со скоростью v_1 (рис. 269). Напишем закон сохранения импульса для проекций на направление вдоль этой линии и перпендикулярно к ней:

$$mv\cos\alpha = mv_1\cos\alpha_1 + mv_2, \quad mv\sin\alpha = mv_1\sin\alpha_1, \qquad (1)$$

а также закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}, \qquad (2)$$

где m — масса каждого шара. Сократим уравнения (1) на m, возведем каждое из них в квадрат и сложим. В результате получится:

$$v^2 = v_1^2 + 2v_1v_2\cos\alpha_1 + v_2^2. \qquad (3)$$

Сократив (2) на $m/2$ и вычтя полученное выражение из (3), получим: $2v_1v_2\cos\alpha_1 = 0$. Отсюда следует, что $\cos\alpha_1 = 0$, т. е. $\alpha_1 = \pi/2$.

249. Пусть скорость первого шара до удара $v_1 > 0$. Тогда скорость второго шара до удара $v_2 < 0$. Учитывая знаки v_1 и v_2, найдем из формул, полученных в решении задачи 242, скорости после удара первого и второго шаров:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 - 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{(m_1 - m_2) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Так как $m_1 > m_2$, то $v_2' > 0$ в любом случае. Для выполнения требования $v_1' > 0$ необходимо, чтобы

$$(m_1 - m_2) v_1 > 2m_2 v_2, \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{m_2} - 1 > 2\frac{v_2}{v_1}.$$

С другой стороны, согласно условию задачи

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = k^2 \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}. \qquad (1)$$

Следовательно,

$$\frac{m_1}{m_2} - 1 > \frac{2}{k}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}; \quad \text{отсюда} \quad \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} > \frac{1 \pm \sqrt{k^2+1}}{k}.$$

Так как после учета знаков скоростей везде подразумеваются их абсолютные значения, то из (1) следует, что $\sqrt{m_1/m_2} > 0$. Поэтому решение неравенства со знаком минус следует отбросить. Таким образом, имеем:

$$\frac{v_2}{v_1} > \frac{1 + \sqrt{k^2+1}}{k^2} \qquad (2)$$

и из формулы (1), учитывая, что $m_1 > m_2$,

$$\frac{v_2}{v_1} > \frac{1}{k}. \qquad (3)$$

Из этих двух неравенств следует взять неравенство (2) как более сильное (числитель в правой его части больше k и, следовательно, правая часть больше $1/k$). При $k = 4/3$ получим: $\dfrac{v_2}{v_1} > \dfrac{3}{2}$.

250. $h = 4lm_1^2/(m_1 + m_2)^2 = 12{,}5$ см.

251. Шарики столкнутся на высоте $h = 3v_0^2/8g$; первый шарик поднимется на высоту $H = v_0^2/2g$.

252. Полная энергия после взрыва

$$E = (m_1 + m_2) gH + \frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2},$$

где v_{10} и v_{20} — скорости осколков непосредственно после взрыва. Так как взрыв протекал очень быстро, то импульсом силы тяжести за время взрыва можно пренебречь и для нахождения соотношения между скоростями осколков непосредственно после взрыва применить закон сохранения количества движения: $m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = 0$. Решая систему этих двух уравнений, найдем:

$$v_{10} = -\sqrt{2\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{E - (m_1 + m_2) gH}{m_1 + m_2}}, \quad v_{20} = \sqrt{2\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{E - (m_1 + m_2) gH}{m_1 + m_2}}.$$

Искомые скорости будут:

$$v_1 = v_{10} - g\tau \approx -164 \text{ м/с}, \quad v_2 = v_{20} - g\tau \approx 245 \text{ м/с}.$$

§ 8. Динамика вращательного движения

253. $\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{M\sqrt{2gl} - mv}{2(M+m)\sqrt{gl}}\right)$.

254. $n > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{R}} \approx 0{,}16$ об/с.

255. $t = \frac{t_0}{\omega}\sqrt{\frac{kg}{R}} \approx 1$ мин.

256. $k = v^2/Rg \approx 0{,}2$.

257. $A = 2\pi^2 r^2 m (n_2^2 - n_1^2) = 15{,}8$ Дж.

258. $\frac{F}{P} = \frac{\omega^2 D}{2g} = 40$.

259. В вершине петли, когда самолет летит вверх колесами, на пилота действует сила тяжести mg и сила N со стороны сиденья, направленная вниз (рис. 270, *а*), или со стороны ремней, направленная вверх (рис. 270, *б*). Эти

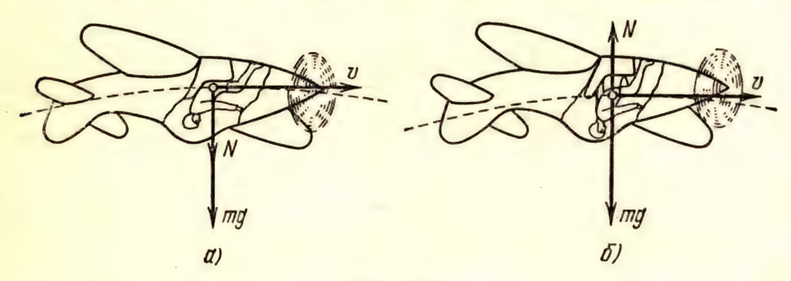


Рис. 270

силы сообщают необходимое для вращения центростремительное ускорение. Следовательно, в общем случае $\frac{mv^2}{R} = mg + N$.

При достаточно большой скорости самолета $\frac{mv^2}{R} > mg$ и $N > 0$, т. е. N направлена в ту же сторону, что и сила тяжести, и, следовательно, пилот будет прижат к сиденью (рис. 270, *а*). При $\frac{mv^2}{R} = mg$ пилот перестанет давить на сиденье. Наконец, при настолько малой скорости, что $\frac{mv^2}{R} < mg$, сила $N < 0$. В этом случае пилот повисает на ремнях и сила N будет направлена вверх (рис. 270, *б*). Таким образом, требуемые значения скорости определяются неравенством $v^2/R \geqslant g$. Отсюда $v \geqslant \sqrt{gR} \approx 50$ м/с $= 180$ км/ч.

260. $T \leqslant 2\pi\sqrt{l/g} = 3{,}14$ с.

261. $F = (2\pi n)^2 (l_1 m_1 - l_2 m_2)$.

262. Силы, действующие на автомобиль вдоль направления радиуса моста, изображены на рис. 271; $P = mg$ — сила тяжести, N — реакция опоры. По третьему закону Ньютона искомая сила F равна по величине реакции опоры N. Согласно второму закону Ньютона центростремительное ускорение автомобиля определяется суммой сил, действующих на него вдоль радиуса окружности,

по которой он движется: $\frac{mv_1^2}{R} = mg - N$. Отсюда

$$N = F = mg - \frac{mv_1^2}{R} = 7800 \text{ Н}.$$

Давление на мост станет равным нулю при условии $\frac{mv_2^2}{R} = mg$. Следовательно, $v_2 = \sqrt{gR} \approx 80$ км/ч. При $v > v_2$ автомобиль также не будет оказывать давление на мост.

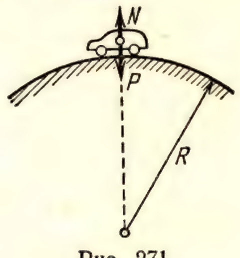


Рис. 271

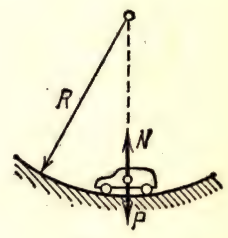


Рис. 272

263. Действующие на автомашину вдоль радиуса моста силы изображены на рис. 272. В отличие от задачи 262, здесь к центру окружности, по которой происходит движение автомобиля, направлена сила N, а не сила тяжести P. Согласно второму закону Ньютона $\frac{mv^2}{R} = N - mg$. Искомая сила

$$F = N = mg + \frac{mv^2}{R} \approx 21600 \text{ Н}.$$

264. Вдоль радиуса моста на автомобиль действует реакция опоры N и проекция силы тяжести $mg \cos \alpha$ (рис. 273). Согласно второму закону Ньютона искомая сила $F = N = mg \cos \alpha - \frac{mv^2}{2}$. Она достигнет максимума при $\alpha = 0$.

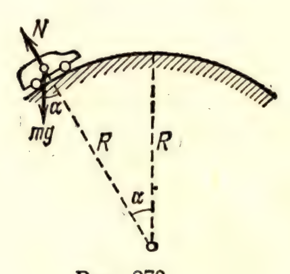


Рис. 273

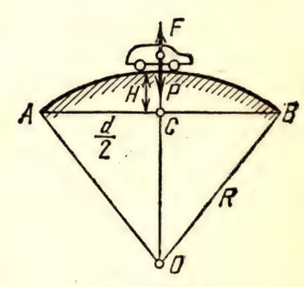


Рис. 274

265. Наибольшая нагрузка на мост (см. задачу 264) будет в верхней точке моста. Минимально допустимое значение скорости v можно найти из выражения $mg - F = mv^2/R$, где m — масса грузовика. Следовательно, должно выполняться неравенство $v \geqslant \sqrt{\frac{R(mg - F)}{m}}$.

Радиус кривизны моста определяется из треугольника ACO, изображенного на рис. 274 По теореме Пифагора $R^2=\frac{d^2}{4}+(R-H)^2$. Отсюда $R=\frac{4H^2+d^2}{8H}$.

Подставляя найденное значение R в выражение для скорости, получим:

$$v \geqslant 40{,}6 \text{ км/ч}.$$

266. Искомую скорость можно найти с помощью закона сохранения энергии. Если за нулевой уровень потенциальной энергии принять горизонтальную плоскость, проходящую через точку O, то начальная энергия грузов будет равна нулю. Поэтому будет равна нулю и полная конечная энергия грузов в тот момент, когда стержень займет вертикальное положение. Обозначив через m массу каждого из малых грузов, будем иметь:

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{m\,(2v)^2}{2}+\frac{2mv^2}{2}-mg\,\frac{l}{2}-mgl+2mg\,\frac{l}{2}=0.$$

Здесь учтено, что скорость малого груза на конце стержня вдвое больше скорости среднего груза. Отсюда $v=\sqrt{gl/7}$.

267. Действующие на систему «человек — трапеция» силы изображены на рис. 275. Согласно второму закону Ньютона $\frac{mv^2}{l}=2T-mg$, так как в нижней точке траектории человек имеет ускорение v^2/l, направленное вверх. Отсюда

$$T=\frac{mv^2}{2l}+\frac{mg}{2}\approx 500 \text{ Н}.$$

268. Наибольшее натяжение нить имеет в момент, когда шарик проходит через положение равновесия. Именно в этой точке скорость шарика максимальна, а натяжение направлено против силы тяжести (рис. 276). По второму

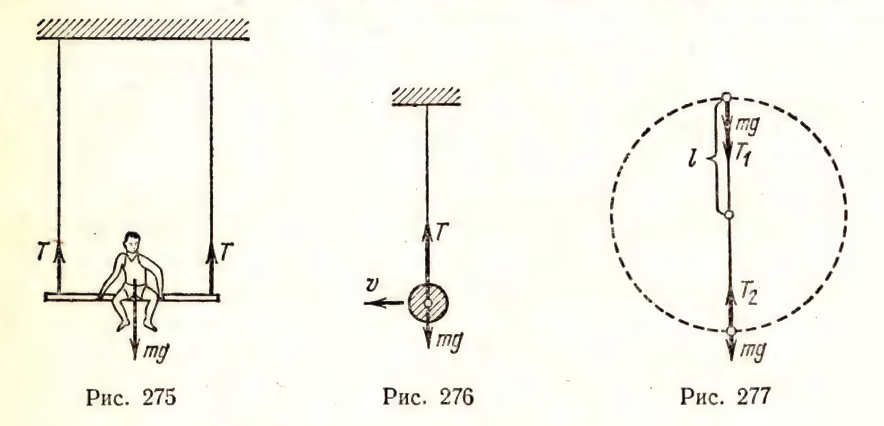


Рис. 275 Рис. 276 Рис. 277

закону Ньютона $\frac{mv^2}{l}=T-mg$, где l — длина нити, а T — ее натяжение. Скорость v шарика можно найти с помощью закона сохранения энергии: $\frac{mv^2}{2}=$ $=mgl$. Исключая из этих двух уравнений v, найдем: $T=3mg$.

Следовательно, нить должна выдерживать утроенный вес шарика.

269. Силы, действующие на грузик в верхней и нижней точках траектории, изображены на рис. 277. Уравнения движения для этих положений грузика запишутся следующим образом:

$$m\omega^2 l = mg + T_1, \quad m\omega^2 l = T_2 - mg,$$

где $\omega = 2\pi n$ — угловая скорость вращения. Отсюда

$$T_1 = m\omega^2 l - mg \approx 31{,}35\ \text{Н}, \quad T_2 = m\omega^2 l + mg \approx 31{,}75\ \text{Н}.$$

270. а) $T_{\text{н}} - T_{\text{в}} = 2mg$; б) $T_{\text{н}} - T_{\text{в}} = 6mg$. Здесь $T_{\text{н}}$ — натяжение штанги при положении груза внизу, а $T_{\text{в}}$ — при положении груза вверху.

271. Второй закон Ньютона в момент, когда шарик проходит положение равновесия, можно записать в виде: $\frac{mv^2}{l} = T - mg$ (рис. 278). Скорость шарика в нижней точке траектории можно найти из закона сохранения энергии:



Рис. 278

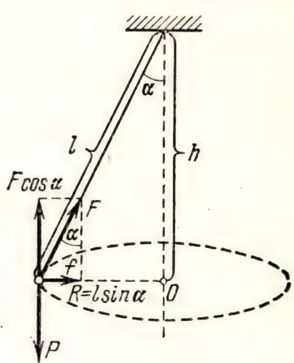


Рис. 279

$\frac{mv^2}{2} = mgl\ (1 - \cos\alpha)$. Нить оборвется, если $T > 2mg$. Следовательно, $\cos\alpha < 1/2$, а $\alpha > 60°$.

272. $\cos\alpha = 1 - \frac{(l-a)\ (T_0 - mg)}{2mgl}$.

273. $m_1/m_2 = 3$, так как ось должна проходить через центр тяжести системы.

274. $\omega = \sqrt{g/(R-h)}$.

275. Груз массы m_1 должен находиться на расстоянии $x_1 = m_2 l/(m_1 + m_2)$ от оси вращения; $T = m_1 m_2 l\omega^2/(m_1 + m_2)$.

276. Мальчик движется по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости с радиусом $R = l \sin\alpha$, где α — угол между канатом и вертикалью (рис. 279). Центростремительной силой, действующей на него, является проекция $f = F \sin\alpha$ силы натяжения каната на направление радиуса (проекция другой силы, действующей на мальчика, — силы тяжести, — на это направление равна нулю). Учитывая, что угловая скорость мальчика $\omega = 2\pi n$, где n — число оборотов в единицу времени, напишем второй закон Ньютона для движения по окружности:

$$m\omega^2 R = f, \quad \text{или} \quad 4\pi^2 n^2 ml \sin\alpha = F \sin\alpha.$$

Отсюда найдем:

$$F = 4\pi^2 n^2 ml \approx 355\ \text{Н}.$$

277. Центростремительной силой, действующей на камень, является проекция $f = F \sin\alpha$ силы натяжения веревки F на направление радиуса (рис. 279). Здесь α — угол, который веревка составляет с вертикалью. Второй закон Ньютона для движения камня по окружности радиуса R будет иметь вид:

$$m\omega^2 R = F \sin\alpha, \qquad (1)$$

где $\omega = 2\pi/T$ — угловая скорость камня, а m — его масса. Так как в вертикальном направлении ускорения у камня нет, то проекции на вертикаль сил, действующих на него, равны по величине и противоположны по направлению, т. е.

$$F \cos\alpha = P = mg. \qquad (2)$$

Разделив (1) на (2), получим: $\operatorname{tg}\alpha = \omega^2 R/g$. Из чертежа найдем: $R = h \operatorname{tg}\alpha$ и, следовательно, $\omega^2 h/g = 1$. Отсюда получим: $\omega = \sqrt{g/h}$ и

$$T = 2\pi\sqrt{h/g} \approx 2{,}25 \text{ с}.$$

278. $F = mg\sqrt{5}$ (см. задачи 276 и 277).

279. На шарик действуют сила тяжести mg и сила натяжения нити F (рис. 280). Движение его относительно Земли складывается из движения по

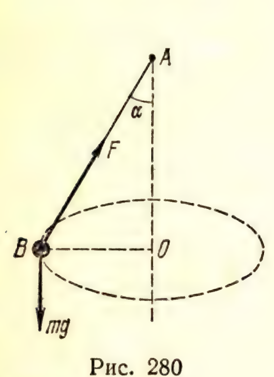


Рис. 280

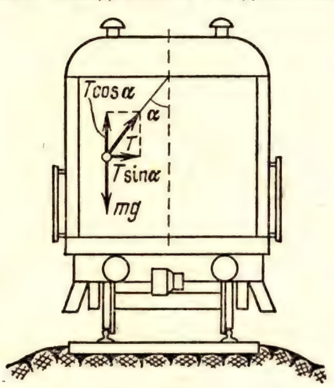


Рис. 281

вертикали вместе с лифтом и обращения вокруг оси AO. Напишем второй закон Ньютона для проекций на вертикальное направление

$$ma = mg - F\cos\alpha$$

и для проекций на направление радиуса OB окружности, описываемой шариком,

$$m\omega^2 l \sin\alpha = F\sin\alpha,$$

где ω — угловая скорость шарика, m — его масса. Исключая из этих уравнений F, получим: $\omega^2 l = (g-a)/\cos\alpha$. Отсюда

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g-a}}.$$

280. $l_0 = \dfrac{(2\pi n)^2 m l_1 - F}{(2\pi n)^2 (mg - F\cos\alpha)}\, g.$

281. На шар действуют силы, изображенные на рис. 281: T — натяжение нити, $P = mg$ — сила тяжести. (Центр окружности, по которой движется вагон, на этом рисунке справа от вагона). Центростремительной силой для шара

является проекция силы натяжения на направление радиуса (проекция силы тяжести на это направление равна нулю). Второй закон Ньютона для движения по окружности в этом случае можно записать в виде: $\frac{mv^2}{R} = T\sin\alpha$. В вертикальном направлении ускорения у шара нет, поэтому проекции на вертикаль сил, действующих на шар, равны по величине и противоположны по направлению, т. е. $mg = T\cos\alpha$. Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{v^2}{Rg} = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{и} \quad v = \sqrt{Rg\operatorname{tg}\alpha} \approx 112 \text{ км/ч}.$$

Натяжение нити $T = mg/\cos\alpha \approx 137$ Н.

282. Если тело еще не покинуло поверхность полусферы, то на него кроме силы тяжести mg действует еще реакция опоры N (рис. 282). Второй закон Ньютона при движении по полусфере имеет вид:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha - N,$$

т. е. произведение массы тела на центростремительное ускорение равно сумме проекций на радиус полусферы сил, действующих на тело. Угол α определяет положение тела на полусфере.

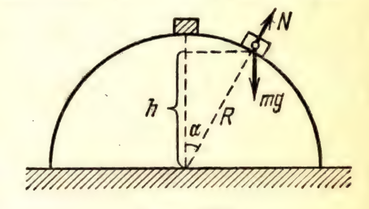


Рис. 282

В момент, когда N делается равным нулю, тело отрывается от полусферы. Значение соответствующего угла α определяется из уравнения $mv^2/R = mg\cos\alpha$. Используя закон сохранения энергии, можно записать:

$$mgR = \frac{mv^2}{2} + mgR\cos\alpha.$$

Следовательно, $2(1-\cos\alpha) = \cos\alpha$. Отсюда $\cos\alpha = 2/3$.

Искомая высота $h = R\cos\alpha = 2R/3$.

283. $N = mg\left(1 - 3\frac{h}{R}\right)$. При $h < R/3$ давление колечка направлено к центру большого кольца, а при $h > R/3$ — от центра.

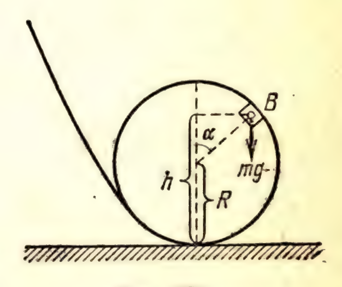


Рис. 283

284. Тело отрывается от поверхности петли в точке B (рис. 283), когда сила реакции, действующая на него со стороны поверхности петли, становится равной нулю и центростремительной силой является проекция $mg\cos\alpha$ силы тяжести на радиус. Следовательно, как и в задаче 282, здесь должны выполняться уравнения для второго закона Ньютона и для закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha, \quad mgH = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Учитывая, что $h = R(1+\cos\alpha)$ (рис. 283), находим из этих уравнений: $\cos\alpha = 2/3$ и $h = \frac{5}{3}R$.

Чтобы тело не оторвалось от петли в верхней ее точке, когда $\alpha=0$ и $h=2R$, исходные уравнения должны иметь вид:

$$\frac{mv^2}{R}=mg \quad \text{и} \quad mgH_1=\frac{mv^2}{2}+2mgR.$$

Из этих уравнений найдем: $H_1=\frac{5}{2}R$.

285. На велосипедиста и велосипед действуют три силы: вес mg, реакция опоры N и сила трения f (рис. 284). Так как центр тяжести не перемещается по вертикали, то $N-mg=0$. Необходимое для движения по окружности центростремительное ускорение сообщается силой трения: $\frac{mv^2}{R}=f$. Направление результирующей силы $\boldsymbol{N}+\boldsymbol{f}$ совпадает с направлением вдоль велосипеда к центру тяжести системы «велосипедист — велосипед». Поэтому $f=N\operatorname{ctg}\alpha=mg\operatorname{ctg}\alpha$. Подставляя это значение f в уравнение движения, найдем: $v=\sqrt{gR\operatorname{ctg}\alpha}$.



Рис. 284



Рис. 285

286. Так как можно считать, что момент сил относительно центра тяжести велосипеда с велосипедистом равен нулю, то сила трения отсутствует (см. рис. 285, на котором изображены силы, действующие на систему). Равенство нулю суммы проекций сил на вертикальное направление дает уравнение $N\cos\alpha=mg$, поэтому $N=mg/\cos\alpha$. С такой же силой велосипед будет давить на дорогу.

Центростремительное ускорение сообщается проекцией силы N на горизонтальное направление: $\frac{mv^2}{R}=N\sin\alpha=mg\operatorname{tg}\alpha$. Отсюда $v=\sqrt{Rg\operatorname{tg}\alpha}$.

287. $\alpha=\operatorname{arctg}(Rg/v^2)$.

§ 9. Закон всемирного тяготения

288. $F=2\cdot10^{20}$ Н.

289. Человек прыгнет на Луне в шесть раз дальше и выше, чем на Земле.

290. $v=\sqrt{Rg/6}\approx1{,}7$ км/с.

291. $\Delta P=P/4$, где P — сила тяжести корпуса ракеты у Земли.

292. $g' = g\frac{M'}{M}\left(\frac{R}{R'}\right)^2 = 1{,}65$ м/с², где M' и R' — масса и радиус Луны, а M и R — масса и радиус Земли.

293. $g' = g\frac{R'\rho'}{R\rho} \approx 270$ м/с².

294. $A = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgR}{2} \approx 1{,}6 \cdot 10^{10}$ Дж.

295. $T = \sqrt{2\pi^2 D^3/\gamma M} = 1{,}57 \cdot 10^6$ с.

296. $\rho = 3v^2R/4\pi\gamma r^3 \approx 500$ кг/м³.

297. $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_0^3}{\gamma M}\left(1+\frac{H}{R_0}\right)^3}$. Учитывая, что $g = \frac{\gamma M}{R_0^2}$, и пренебрегая квадратом и кубом отношения H/R_0, найдем: $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g}+\frac{3H}{g}}$.

298. $T = 4\pi\sqrt{2R_0/g} \approx 3$ ч 58 мин.

299. $R = \sqrt[3]{gR_0^2T^2/4\pi^2} \approx 42\,400$ км.

300. $T = 2\pi\sqrt{R^3/gr^3} \approx 27$ суток.

301. При взвешивании на тело действуют две силы, изображенные на рис. 286: сила тяготения P и натяжение пружины T. Обе силы направлены вдоль радиуса планеты. На экваторе тело движется по окружности со скоростью $v = \frac{2\pi}{t}R$, где R — радиус планеты. Разность сил $P - T$ сообщает телу центростремительное ускорение. Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{4\pi^2 mR}{t^2} = P - T.$$

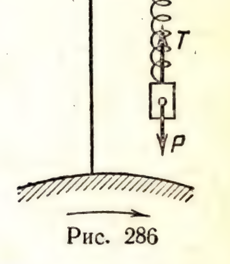


Рис. 286

По условию задачи $T = 0{,}9\,P$. Сила всемирного тяготения на поверхности планеты $P = \gamma\frac{mM}{R^2}$, где M — ее масса. Искомую плотность $\rho = \frac{M}{{}^4/_3\pi R^3}$ можно найти, подставив в уравнение движения выражения для сил P и T:

$$\rho = \frac{3\pi}{0{,}1\gamma t^2} \approx 3{,}03 \text{ г/см}^3.$$

§ 10. Гидро- и аэромеханика

В ответах и решениях задач этого параграфа везде $\rho_0 = 10^3$ кг/м³ = 1 г/см³ — плотность воды, $g = 9{,}8$ м/с² — ускорение свободного падения.

302. Не изменится.

303. $p = \rho_0 g\left(\frac{4V}{\pi d^2} - h\right) \approx 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ атм $\approx 1{,}2 \cdot 10^3$ Н/м².

304. $H = R$.

305. Давление в мм рт. ст. вычисляется по формуле $p = p_0 - \frac{\rho_0}{\rho_1}l$, где $\rho_0 = 1$ г/см³ — плотность воды, $\rho_1 = 13{,}6$ г/см³ — плотность ртути, а l взято в миллиметрах. Искомое давление $p = 752{,}6$ мм рт. ст.

306. Давление в любой точке сосуда с жидкостью согласно закону Паскаля зависит только от глубины. На границе между маслом и водой у открытого конца сосуда давление воды будет $p' = p_0 + \rho_0 g H$. С другой стороны, разность давлений масла внутри сосуда между точкой A и границей масла с водой определяется высотой столба масла: $p' - p = \rho g h$. Отсюда

$$p = p_0 + g(\rho_0 H - \rho h) = 1{,}206 \cdot 10^5 \ \text{Н/м}^2 = 1{,}18 \ \text{атм}.$$

307. $h = \rho H/\rho_0 = 18$ см.

308. $h = 2\rho_0 l/(3\rho - \rho_0)$.

309. $h = (m + \rho_0 V)/2\rho S$.

310. $F = fh/H = 10^4$ Н.

311. $\dfrac{S}{s} = \dfrac{mghn}{A} = 490$; s — площадь малого поршня, S — площадь большого поршня.

312. Искомое давление $p = \rho_0 g h_1 + \rho g h_2$, где h_1 и h_2 — высоты столбов воды и ртути (рис. 287). Согласно условию задачи $H = h_1 + h_2$ и $\rho_0 h_1 S = \rho h_2 S$, где S — площадь поперечного сечения сосуда. Решив полученную систему уравнений, найдем:

$$p = \frac{2\rho_0 \rho g H}{\rho_0 + \rho} \approx 26\,100 \ \text{Н/м}^2.$$

Рис. 287

313. $P = \rho_0 \rho g h S/(\rho_0 - \rho) \approx 45{,}1$ Н, где ρ_0 — плотность воды.

314. $V_1 \leqslant \dfrac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_0 - \rho_1} V_2 = 1{,}7$ м³, где ρ_0 — плотность воды.

315. $h = \dfrac{m}{S} \cdot \dfrac{\rho - \rho_0}{\rho\rho_0} = -2{,}5$ см (уровень понизится); ρ_0 — плотность воды.

316. $\rho = (\rho_2 - \rho_1)\dfrac{R^3}{r^3} + \rho_1$.

317. $M = \dfrac{\pi D^2 L}{4}(\rho_0 - \rho) \approx 74$ кг.

318. $P_0 = P\left(1 + \dfrac{\rho_1}{\rho}\right) \approx 150{,}24$ кгс.

319. $\rho = \rho_0 P_0/(P_0 - P_1) \approx 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м³, где ρ_0 — плотность воды.

320. $\rho_1 = \dfrac{P_2 - P_1}{P_2 - P_3}\rho_3 = 700$ кг/м³, $\rho_2 = \dfrac{P_2}{P_2 - P_3}\rho_3 = 9000$ кг/м³.

321. $T = gS[\rho l - \rho_0(l - l_1)] \approx 440$ Н.

322. $V = \dfrac{P_2(\rho_1 - \rho_0) - P_1(\rho_1 - \rho_2)}{g\rho_1(\rho_0 - \rho_2)} = 10$ см³, где ρ_0 — плотность воды.

323. $P = P_0\left(1 - \dfrac{d_2}{d_1}\right) + Vd_2 \approx 881{,}16$ гс.

324. $M_1 = 59{,}2$ г; $M_2 = 240{,}8$ г.

325. Равновесие сохранится.

326. $\rho = 2\rho_0 k\left(1 - \dfrac{1}{2}k\right) = 0{,}36$ г/см³. Здесь $k = 1/5$ — отношение длины части палочки, находящейся в воде, ко всей длине палочки.

327. $\dfrac{l_2}{l_1} = 1 + \dfrac{4\pi r^3}{3m}(2\rho - \rho_0) \approx 1{,}58$.

328. Равенство моментов сил, изображенных на рис. 288, относительно оси рычага (точки O) позволяет написать уравнение: $P_0 l_1 - F l_1 = P l_2$, где $P_0 = \rho g l^3$ — вес куба, $F = \rho_0 g \frac{2l^3}{3}$ — действующая на него выталкивающая сила, ρ — плотность вещества куба и ρ_0 — плотность воды. Так как свободно плавающий куб погружен в воду на 3/4 своего объема, то $\rho = 0{,}75\rho_0$. Подставив выражения для сил в исходное уравнение, получим:

$$l = \sqrt[3]{4Pl_2/\rho_0 g l_1} \approx 4 \text{ см.}$$

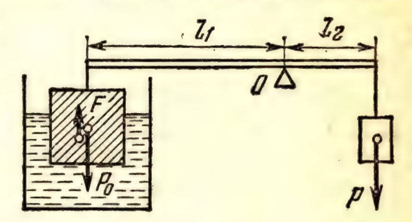


Рис. 288

329. После того как коробочку пустили плавать в банку, объем содержимого банки, находящегося ниже уровня воды, включая теперь и подводную часть коробочки, увеличился на величину Sl, где S — площадь поперечного сечения банки. Но так как объем воды в банке не изменился, то увеличение объема как раз равно объему подводной части коробочки, т. е. равно объему вытесненной ею воды.

Объем стенок коробочки V_1 можно найти из равенства ее веса выталкивающей силе: $V_1 \rho g = Sl\rho_0 g$, где ρ_0 — плотность воды. Если бы коробочка сразу утонула, то уровень воды в банке поднялся бы на величину x, которую можно найти из равенства $Sx = V_1 = \rho_0 Sl/\rho$. При потоплении коробочки уровень воды опустится на величину

$$l - x = l\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \approx 1{,}74 \text{ см.}$$

330. После того как на первый куб положен второй, первый куб погружается в ртуть на 0,3 своего объема. Следовательно, плотность материала второго куба $\rho_2 = 0{,}3\,\rho_1 \approx 4{,}1$ г/см³.

Равновесие будет неустойчивым, так как при отклонении кубов от положения равновесия возникает момент сил, еще больше наклоняющий систему

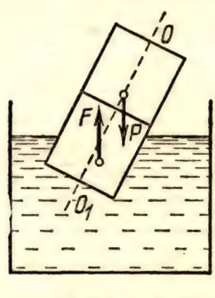


Рис. 289

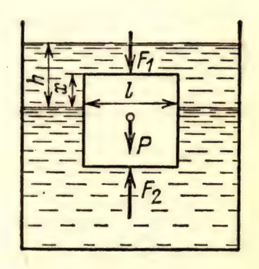


Рис. 290

(см. рис. 289, где F — выталкивающая сила, точка приложения которой смещена относительно оси OO_1).

331. На куб вдоль вертикали действуют три силы (рис. 290): сила тяжести $P = \rho g l^3$, сила давления на верхнюю грань $F_1 = \rho_1 g (h - x) l^2$ и сила

давления на нижнюю грань $F_2 = [\rho_1 gh + \rho_2 g(l-x)]\, l^2$. При равновесии $F_1 + P - F_2 = 0$. Отсюда $\rho l - \rho_1 x = \rho_2 l - \rho_2 x$. Объем части куба, находящейся в верхней жидкости, $V' = l^2 x$. Следовательно, в верхней жидкости находится часть объема, равная $\frac{V'}{l^3} = \frac{x}{l}$. Как вытекает из полученного уравнения,

$$\frac{x}{l} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}.$$

332. Погруженная в ртуть часть объема куба равна $1 - \frac{3}{4}\frac{\rho}{\rho - \rho_0} = 0{,}19$; здесь ρ_0 — плотность воды.

333. $f = \rho_0 Vg = 0{,}0098$ Н $= 980$ дин.

334. $a = g/2 = 4{,}9$ м/с^2.

335. $V_2 = \frac{\rho_1 g - \rho(a+g)}{(\rho_1 - \rho)(a+g)} V_1 = \frac{1}{3} V_1$.

336. $A = g(\rho - \rho_0) HV \approx 73\,500$ Дж; здесь ρ_0 — плотность воды.

337. $\Delta U = mgH\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) = -0{,}49$ Дж; потенциальная энергия уменьшилась.

338. Потенциальная энергия мяча увеличится на $\Delta U = \left(\frac{1}{6}\pi d^3 \rho_0 - m\right) gh \approx 265$ Дж.

339. $h = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} H = 9$ см; здесь ρ_0 — плотность воды.

340. На любой малый элемент жидкости массы Δm, находящийся у поверхности, действуют: 1) сила давления N со стороны окружающей жидкости, направленная перпендикулярно к поверхности, и 2) сила тяжести Δmg, направленная вертикально вниз (рис. 291). Сумма этих сил должна быть горизонтальна, так как элемент вместе с сосудом движется, имея горизонтальное ускорение a. По второму закону Ньютона $\Delta m a = \Delta mg \operatorname{tg} \alpha$. Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = a/g$.

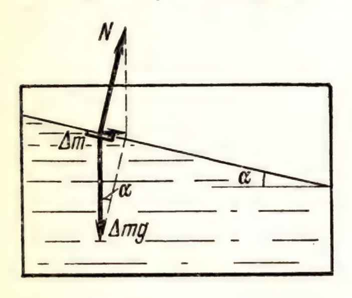


Рис. 291

341. $h = Q_1^2/2gS^2 = 5$ м.

342. Импульс силы $F\Delta t$, действующей на стенку, равен по величине изменению количества движения воды за время Δt, так как по третьему закону Ньютона силы взаимодействия стенки и струи равны. За время Δt через сечение трубки протечет масса воды $m = \rho_0 Sv\,\Delta t$. Согласно условию задачи конечная скорость воды в горизонтальном направлении равна нулю. Поэтому за время Δt количество движения струи изменится на $\Delta p = mv = \rho_0 Sv^2\,\Delta t$, где ρ_0 — плотность воды. Следовательно, $F = \rho_0 Sv^2 = 40$ Н.

343. Удобнее решать задачу, считая катер неподвижным, а воду — движущейся относительно него со скоростью v. Тогда вода в трубке поднимется вверх, приобретая некоторый запас потенциальной энергии, за счет кинетической энергии жидкости, поступающей в нижний конец трубки. Закон сохра-

нения энергии, отнесенный к единице объема жидкости, будет иметь вид: $\frac{\rho v^2}{2} = \rho g h$, где ρ — плотность воды. Отсюда $h = \frac{v^2}{2g} \approx 1{,}3$ м.

344. $v \approx \sqrt{2gh} \approx 4{,}4$ м/с (см. решение задачи 343).

345. $F = 2\rho g h S = 2pS$, где p — давление у дна. Вода действует на стенку с отверстием с силой на $2pS$ меньшей, чем на противоположную стенку, а не на pS, как могло бы показаться на первый взгляд. Это связано с уменьшением давления на стенку с отверстием вследствие большей скорости течения воды у этой стенки.

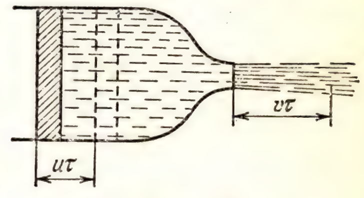


Рис. 292

346. Пусть за время τ поршень перемещается на расстояние $u\tau$ (рис. 292), где u — скорость поршня. Тогда сила F совершит на это время работу $A = Fu\tau$. Масса вытекшей за время τ жидкости равна $\rho S u \tau$. Поэтому изменение кинетической энергии жидкости равно $\rho S u \tau \left(\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2}\right)$. Это изменение произошло за счет работы внешней силы F. Следовательно,

$$\rho S u \tau \left(\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2}\right) = F u \tau.$$

Скорость истечения жидкости v связана со скоростью u соотношением $Su = sv$. Исключая из двух последних уравнений u, найдем:

$$v = \sqrt{\frac{2F}{S\rho} \cdot \frac{1}{1 - (s^2/S^2)}}.$$

Если, как обычно, $s \ll S$, то $v \approx \sqrt{2F/S\rho}$.

§ 11. Колебания и волны

347. $l_1 = \frac{n_2^2 \Delta l}{n_1^2 - n_2^2} = 9$ см, $\quad l_2 = \frac{n_1^2 \Delta l}{n_1^2 - n_2^2} = 25$ см.

348. $T = \pi \sqrt{g/l}$.

349. $T = \pi \sqrt{g} \left(\frac{1}{\sqrt{l}} + \frac{1}{\sqrt{l_1}}\right) = \pi \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

350. 5 раз.

351. Период маятника возрастет в 1,0000093 раза.

352. Период колебаний маятника на Луне увеличится примерно в 2,4 раза (см. решение задачи 292).

353. На поверхности земли маятник длиной l за время t совершит $N = t/T_1$ колебаний, причем $T_1 = 2\pi \sqrt{l/g_1}$, где g_1 — ускорение свободного падения на поверхности земли. На высоте h над землей часы отстанут на время $\Delta t = N(T_2 - T_1)$, где $T_2 = 2\pi \sqrt{l/g_2}$ — период колебаний маятника на высоте h, а g_2 — ускорение свободного падения на этой высоте. Используя формулу $P_2 = \frac{P_1}{[1 + (h/R)]^2}$, связывающую силу тяжести $P_2 = mg_2$ на высоте h

с силой тяжести $P_1=mg_1$ на поверхности земли, полученную в решении задачи 291, найдем:

$$\frac{g_2}{g_1}=\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

(R — радиус Земли). Следовательно, отношение периодов

$$\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}=\frac{R}{R+h}.$$

Отсюда

$$T_2=T_1\frac{R+h}{R}, \quad T_2-T_1=\frac{T_1h}{R}.$$

Таким образом, за время t часы отстанут на

$$\Delta t=\frac{T_1Nh}{R}=\frac{th}{R}.$$

При $t=1$ сутки $=86\,400$ с отставание составит $\Delta t=2{,}7$ с.

354. $U=\frac{mg^2}{4\pi^2\nu^2}(1-\cos\alpha)\approx 2{,}9\cdot 10^{-3}$ Дж.

355. По отношению к стенкам лифта, движущегося с ускорением a, тела, неподвижные относительно земли, будут иметь ускорение, направленное против ускорения лифта. Это эквивалентно изменению ускорения свободного падения. Оно, можно сказать, будет равно не g, а $g\pm a$ в зависимости от направления ускорения лифта. Именно так можно истолковать результаты, полученные при решении задач 95, 96, 98—100. Таким образом, в лифте, движущемся с ускорением a, маятник длиной l имеет период $T=2\pi\sqrt{l/(g\pm a)}$, причем знак плюс под корнем соответствует ускорению, направленному вверх, а знак минус — ускорению, направленному вниз. Направление же движения лифта (направление его скорости) на период колебаний никакого влияния не оказывает.

Период колебаний маятника в лифте согласно условию задачи увеличился: маятник совершил $N=100$ колебаний за время $t=2$ мин 30 с $=150$ с, а не за 100 с. Следовательно, ускорение свободного падения тел в лифте относительно его стенок равно $g-a$, а сам лифт имеет ускорение, направленное вниз. Период колебаний маятника в движущемся лифте $T=2\pi\sqrt{l/(g-a)}=t/N$. В том же случае, когда лифт неподвижен относительно земли, маятник имеет период $T_0=2\pi\sqrt{l/g}=1$ с. Отношение периодов равно:

$$\frac{T}{T_0}=\frac{t}{NT_0}=\sqrt{\frac{g}{g-a}}.$$

Отсюда найдем:

$$a=g\left(1-\frac{N^2T_0^2}{t^2}\right)\approx 5{,}4 \text{ м/с}^2.$$

356. Ускорение свободного падения относительно вагона складывается геометрически из вертикально направленного ускорения свободного падения g относительно земли и дополнительного ускорения a, направленного горизонтально, которое имеют относительно стенок вагона тела, неподвижные относительно земли (см. решение задачи 355). Поэтому маятник в вагоне будет

иметь период

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}}.$$

357. $T=2\pi\sqrt{3R/2g}$ (см. решение задачи 355).

358. Преграда находится на расстоянии $s=vt/2=660$ м.

359. $v_1=sv/(s-v\tau)=5100$ м/с.

360. $v_0=v+\frac{gH}{2v}=349{,}8$ м/с.

361. Длина волны в первом опыте $\lambda_1=l/n$, где n — число длин волн, укладывающихся на расстоянии l. Во втором опыте $\lambda_2=l/(n-2)$. До повышения температуры скорость звука $v_1=\nu\lambda_1=\nu l/n$, а после повышения $v_2=\nu\lambda_2=$ $=\nu l/(n-2)$. Или, так как $n=\nu l/v_1$, то $v_2=\nu l v_1/(\nu l-2v_1)$.

Скорость звука возрастает по линейному закону: $v_2=v_1(1+\alpha\,\Delta t)$, где $\alpha=(0{,}5/330)$ К$^{-1}$. Подставляя в данное выражение значение v_2, получим:

$$l=\frac{2v_1(1+\alpha\,\Delta t)}{\nu\alpha\,\Delta t}\approx 450\text{ м}.$$

362. Искомая скорость $v=\lambda/T=1435$ м/с.

363. $\nu=v/4l=812$ Гц.

364. $\varphi=2\pi/2=180°$.

365. $\nu=v/\lambda\approx 425$ Гц.

366. При распространении волн частота колебаний не изменяется при переходе из одной среды в другую. Так как $v=\nu\lambda$, то $v_1=2v_2$.

367. Так как при переходе из одной среды в другую частота волны не меняется, то $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}=4{,}35$.

368. Камертон без резонансного ящика звучит гораздо слабее, чем с ящиком, и, следовательно, теряет меньше энергии в единицу времени на излучение звуковых волн. Поэтому камертон, зажатый в тиски, будет звучать дольше.

369. Звучание камертона усиливается в тот момент, когда частота собственных колебаний воздушного столба в сосуде совпадает с частотой колебаний камертона. Собственные колебания воздушного столба в закрытой с одного конца трубе соответствуют установлению в ней стоячей волны такой длины λ, что у закрытого конца образуется узел смещения частиц воздуха, а у открытого — пучность. Таким образом, в свободной части трубы h укладывается $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$ и т. д., т. е. в общем случае $\frac{2k+1}{4}\lambda=h$, где k — целое число. Напомним, что в стоячей волне между двумя узлами укладывается половина длины волны.

Так как частота колебаний в звуковой волне $\nu=v/\lambda$, то соответствующая некоторому значению k частота камертона $\nu=\frac{2k+1}{4h}v$. По условию задачи частота имеет вполне определенное значение. Поэтому различным высотам воздушного столба h_1 и h_2 должны соответствовать два значения k, отличающиеся на единицу: $k_1=n$ и $k_2=n+1$, причем должно выполняться условие:

$$\frac{2k_1+1}{4h_1}v=\frac{2k_2+1}{4h_2}v.$$

Отсюда, полагая $n=0$, найдем: $k_1=0$ и $k_2=1$. Следовательно,

$$\nu=\frac{v}{4h_1}=\frac{3v}{4h_2}=340\ \text{Гц}.$$

370. $\nu_1=v/4l=85$ Гц; $\nu_2=\nu_3=v/2l=170$ Гц.

371. Частота звука зависит от скорости движения источника (эффект Доплера). При неподвижном источнике (точка S на рис. 293) за время, равное периоду колебаний T, колебание распространится на расстояние, равное длине волны $\lambda_0=vT$. Если же источник (S' на рис. 293) движется со скоростью u, то за время T он пройдет в направлении распространения волны путь uT, и колебание распространится за это время на расстояние $\lambda=\lambda_0-uT=(v-u)T$. При удаляющемся источнике $\lambda=(v+u)T$. Таким образом, частота колебаний, воспринимаемых ухом неподвижного человека от движущегося источника звука,

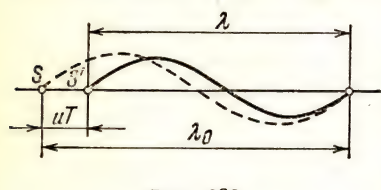


Рис. 293

$$\nu=\frac{v}{\lambda}=\frac{v\nu_0}{v\mp u}.$$

Это выражение можно упростить, если $u\ll v$. Для этого умножим числитель и знаменатель на $(v\pm u)$ и пренебрежем членом u^2 по сравнению с v^2. Тогда

$$\nu=\nu_0\left(1\pm\frac{u}{v}\right).$$

Знаку плюс соответствует приближение источника, а знаку минус — удаление.

Согласно условию задачи $\nu<\nu_0$ и, следовательно, теплоход удаляется от берега. Искомая скорость $u=v\left(1-\frac{\nu}{\nu_0}\right)=4{,}25$ м/с.

ГЛАВА II

ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

§ 12. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

372. Стержни при нагревании на Δt будут иметь длины

$$l_1' = l_1 + l_1\beta_1\,\Delta t \quad \text{и} \quad l_2' = l_2 + l_2\beta_2\,\Delta t.$$

По условию $l_2' - l_1' = l_2 - l_1$. Следовательно,

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

Так как коэффициенты расширения зависят от температуры, то найденное условие удовлетворяет поставленному требованию для интервалов температур, в которых можно считать, что $\beta_2/\beta_1 = \text{const}$.

373. Зазор при понижении температуры ниже нуля увеличивается. Следовательно, величина зазора должна определяться только максимальной температурой нагревания выше нуля. Для моста на юге $L_{50} - L_0 = L_0\beta t_1 = 50$ мм, для моста на севере $L_{20} - L_0 = L_0\beta t_2 = 20$ мм.

374. $\Delta t = n/300\beta = 100°C$.

375. $t_1 = \dfrac{l_{02} - l_{01}}{l_{01}\beta_1 - l_{02}\beta_2} = 83{,}4$ °C; $t_2 = \dfrac{l_{02} - l_{01}}{3\,(l_{01}\beta_1 - l_{02}\beta_2)} = 27{,}8$ °C.

376. $V_{15} = V_1\,(1 + \alpha_1\,\Delta t_1 + \alpha_2\,\Delta t_2 + \alpha_3\,\Delta t_3) = 1001$ см³, где $\Delta t_1 = 3$ °C, $\Delta t_2 = 6$ °C, $\Delta t_3 = 15$ °C $-$ 10 °C $= 5$ °C.

377. Для $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ средний коэффициент объемного расширения

$$\alpha = \frac{h_2 - h_1}{h_1 t_2 - h_2 t_1}.$$

378. Если V_0 — объем шарика и ртути при температуре t_0, то при температуре $t = 100$ °C шарик и канал до деления 100 °C будут иметь объем $(V_0 + V)\,(1 + 3\beta t)$. Этот объем равен объему ртути $V_0\,(1 + \alpha t)$ при той же температуре. Отсюда

$$V_0 = \frac{V\,(1 + 3\beta t)}{(\alpha - 3\beta)\,t} \approx \frac{V}{(\alpha - 3\beta)\,t} \approx 191 \text{ мм}^3.$$

379. При указанных размерах сосуда и шара и указанном объеме налитой воды $V_0 = 500$ см³ шар находится целиком под водой,

$$\Delta h = \frac{4\,(\alpha V_0 + 3\beta V)\,(t_2 - t_1)}{\pi d^2} \approx 0{,}37 \text{ см}.$$

380. При нагревании объем сосуда увеличился на $\Delta V_1 = V_1 3\beta_1 \Delta t$, объем латунного цилиндра $V_2 = m/\rho$ увеличился на $\Delta V_2 = \frac{m}{\rho} \cdot 3\beta_2 \Delta t$ и объем воды $V_3 = V_1 - V_2$ изменился на $\Delta V_3 = (V_1 - V_2)\alpha \Delta t$. Так как уровень воды в сосуде не изменился, то $\Delta V_1 - \Delta V_2 = \Delta V_3$. Отсюда находим:

$$\alpha = \frac{3(\beta_1 V_1 \rho - \beta_2 m)}{V_1 \rho - m} = -3{,}79 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}.$$

Так как величина α получилась отрицательной, то нагревание происходило при температуре между 0 и 4 °C.

381. $\Delta p = \frac{\rho_0 g \alpha \Delta t (V - hS)}{S(1 + \alpha \Delta t)} = 2240$ Н/м^2 = 2240 Па $\approx$ 16,8 мм рт. ст.

§ 13. Теплота, калориметрия, коэффициент полезного действия

382. $c_x = \frac{m_к c(\theta - t_0)}{m_2(t - \theta) - m_1(\theta - t_0)} = 2$ кДж/(кг · °C).

383. $\theta = \frac{(\mu pcV + c_1 MRT_1)T}{\mu pcV + c_1 MRT}$, где $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная.

384. Температура смеси $\theta = -19$ °C; количество теплоты, необходимое для нагревания, $q = 1300$ кДж = 1,3 МДж.

385. $c = \frac{c_0[m_2(t_2 - t) - m_1(t_1 - t)]}{t_1 - t_2} \approx 140$ Дж/°C; здесь $c_0 \approx 4{,}2$ кДж/(кг · °C) — удельная теплоемкость воды.

386. Термометр при погружении в воду получил количество теплоты $q = c(t_1 - t_2)$. Это количество теплоты отдано ему водой, следовательно, $q = m_1 c_1 (t_x - t_1)$, где $c_1 \approx 4{,}2$ кДж/(кг · °C) — удельная теплоемкость воды. Отсюда

$$t_x = \frac{c(t_1 - t_2)}{m_1 c_1} + t_1 = 32{,}5 \text{ °C}.$$

387. Терялось количество теплоты $q = 161{,}3$ Дж/с.

388. Можно представить себе четыре случая: 1) весь лед растает и температура смеси будет выше $t_0 = 0$ °C; 2) вся вода замерзнет и температура смеси будет ниже t_0; 3) температура смеси будет равна t_0 и часть воды замерзнет, и 4) температура смеси будет равна t_0 и часть льда растает.

При охлаждении до t_0 вода отдает количество теплоты $q_1 = c_1 m_1 (t_1 - t_0) = 42$ кДж, в то время как при нагревании до t_0 лед поглощает количество теплоты $q_2 = c_2 m_2 (t_0 - t_2) = 420$ кДж. Так как $q_2 > q_1$, то могут осуществляться лишь случаи 2 или 3. Если замерзнет вся вода, то она отдаст еще количество теплоты $q_3 = m_1 r = 660$ кДж. Так как $q_3 + q_1 > q_2$, то возможен лишь случай 3. Следовательно, температура смеси $\theta = t_0 = 0$ °C.

Составив для этого случая уравнение теплового баланса

$$c_1 m_1 (t_1 - \theta) + m_x r = m_2 c_2 (\theta - t_2),$$

найдем из него массу замерзшей воды:

$$m_x = \frac{m_2 c_2 (\theta - t_2) - m_1 c_1 (t_1 - \theta)}{r} = 1{,}145 \text{ кг}.$$

Таким образом, массы находящихся в калориметре при температуре $\theta=0$ °C воды и льда будут соответственно m_1-m_x и m_2+m_x. Их объемы будут

$$V_1=\frac{m_1-m_x}{\rho_1} \quad \text{и} \quad V_2=\frac{m_2+m_x}{\rho_2},$$

а общий объем

$$V=V_1+V_2=\frac{m_1-m_x}{\rho_1}+\frac{m_2+m_x}{\rho_2}=7{,}54\cdot10^{-3}\ \text{м}^3.$$

389. Теплота, полученная льдом при нагревании от температуры t_2 до 0 °C, равна mc_2t_2. Теплота, требующаяся для плавления льда, равна mr. Теплота, полученная водой, образовавшейся изо льда, при нагревании от 0 °C до температуры θ, равна $mc_1\theta$. Теплота, отданная теплой водой при остывании от температуры t_1 до температуры θ, равна $(\rho V-m)\,c_1\,(t_1-\theta)$, где $(\rho V-m)$ — масса теплой воды, а $\rho=10^3$ кг/м³ — плотность воды.

Составляем уравнение теплового баланса:

$$mc_2t_2+mr+mc_1\theta=(\rho V-m)\,c_1\,(t_1-\theta).$$

Отсюда

$$m=\frac{\rho Vc_1\,(t_1-\theta)}{r+c_2t_2+c_1t_1}\approx30\ \text{кг}.$$

390. $m_2=\dfrac{m_1c_1\,(t_1-t_0)+m_1r+m_1c_2\,(t_0-\theta)}{c_2\,(\theta-t_2)}\approx40$ кг; здесь $t_0=0$ °C.

391. $T_0=T_1-\dfrac{2q-mr}{2mc}=273$ К.

392. $c=\dfrac{r\tau_1}{(t_2-t_1)\,\tau_2-(t_3-t_2)\,\tau_1}\approx0{,}23$ кДж/(кг · °C).

393. Количество теплоты, необходимое для нагревания льда до $t_0=0$ °C,

$$q_1=\frac{P_1}{g}c_2\,(t_0-t_1)=0{,}21\ \text{МДж}.$$

Для плавления льда

$$q_2=\frac{P_1}{g}r=34\ \text{МДж},$$

для нагревания воды до температуры кипения $t_2=100$ °C

$$q_3=\frac{P_1}{g}c_1\,(t_2-t_1)=4{,}2\ \text{МДж}$$

и для испарения воды

$$q_4=\frac{P_1}{g}\lambda=23\ \text{МДж}$$

(здесь P_1/g — масса льда). Сравнивая эти теплоты с количеством теплоты q, видим, что

$$q_1+q_2+q_3<q<q_1+q_2+q_3+q_4,$$

т. е. весь лед превратится в воду с температурой $t_2=100$ °C и лишь часть воды с весом P_1-P превратится в пар. На превращение в пар этого количества воды потребуется количество теплоты

$$q_5=\frac{P_1-P}{g}\lambda.$$

Таким образом, теплота, сообщенная содержимому сосуда,

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + q_5.$$

Подставив сюда выражения для теплот и решив полученное уравнение относительно P, найдем:

$$P = \frac{P_1}{\lambda}\left[\lambda + c_2(t_0 - t_1) + r + c_1(t_2 - t_0)\right] - \frac{qg}{\lambda} = 46 \text{ Н.}$$

394. $h = \dfrac{{}^1/_2(\lambda + c_1 t_2)\, m - \rho V c t_1}{\rho_1 a b r} \approx 0{,}4$ см. Здесь $\rho = 1$ г/см³ — плотность воды, $c = 4{,}2$ кДж/(кг · °С) — ее удельная теплоемкость.

395. В сосуде происходит выделение теплоты q_1 за счет конденсации пара и теплоты q_2 при охлаждении воды, образовавшейся из этого пара, от температуры $t_2 = 100$ °С до температуры смеси ϑ. В то же время происходит поглощение теплоты q_3 при плавлении льда и q_4 при нагревании воды, бывшей ранее в сосуде и образовавшейся при плавлении льда, от $t_1 = 0$ °С до температуры смеси. Максимальное количество выделяемой теплоты (когда весь пар сконденсируется, а образовавшаяся при этом вода охладится до 0 °С)

$$q_1 + q_2 = m_3\lambda + m_3 c(t_2 - t_1) \approx 18 \text{ кДж}$$

равно как раз теплоте, поглощаемой льдом в том случае, когда он весь расплавится, $q_3 = m_2 r \approx 18$ кДж. Таким образом, $q_4 = 0$ и в сосуде будет только вода при температуре

$$\vartheta = t_1 = 0 \text{ °С.}$$

396. Испарившаяся вода имеет массу $m_1 - m$. На ее испарение требуется количество теплоты $q = (m_1 - m)\lambda$. При быстром откачивании теплота от окружающих тел не успевает передаваться воде. Поэтому все это количество теплоты получается при образовании льда, т. е. $q = mr$. Следовательно,

$$(m_1 - m)\lambda = mr \quad \text{и} \quad m = \frac{m_1\lambda}{\lambda + r} = 35 \text{ г.}$$

397. $m = m_1 \dfrac{r + \lambda}{r} = 22{,}7$ г (см. решение задачи 396).

398. Количество теплоты, необходимое для испарения эфира, отдается водой и эфиром при их охлаждении до $t_2 = 0$ °С и водой при замерзании. Таким образом,

$$M\lambda = Mc_2(t_1 - t_2) + mc_1(t_1 - t_2) + mr.$$

Отсюда

$$m = \frac{M\left[\lambda - c_2(t_1 - t_2)\right]}{r + c_1(t_1 - t_2)} = 0{,}082 \text{ кг.}$$

399. Теплота, необходимая для нагревания воды, отнимается у воды при превращении ее в лед, т. е. $Mc(t - t_1) = mr$. Отсюда $m = \dfrac{Mc(t - t_1)}{r} = 0{,}124$ кг.

400. Предположим, что при нагревании температура содержимого колбы увеличилась на величину ΔT. До нагревания вода имела объем $V_1 = m_1/\rho_1$, а ртуть $V_2 = m_2/\rho_2$. Плотность воды после нагревания стала $\rho_3 = \rho_1/(1 + \alpha_1 \Delta T)$. Объем вытекшей воды

$$\Delta V_3 = \frac{m_3}{\rho_3} = \frac{m_3(1 + \alpha_1 \Delta T)}{\rho_1}.$$

При нагревании объем воды увеличился на величину $\Delta V_1 = \alpha_1 V_1 \Delta T$, а объем ртути — на величину $\Delta V_2 = \alpha_2 V_2 \Delta T$. Так как колба была заполнена до краев, то $\Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V_3$. Повышение температуры ΔT можно найти из уравнения: $q = m_1 c_1 \Delta T + m_2 c_2 \Delta T$. Решая эти уравнения, получим:

$$\alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 m_2 q} [m_3 (m_1 c_1 + m_2 c_2) - \alpha_1 q (m_1 - m_3)] \approx 1{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

401. Масса латуни $m_1 = V_0 \rho_0 = V \rho$, где $\rho = \rho_0/(1 + 3\beta t)$ — плотность латуни до погружения в калориметр, когда кусок латуни имел температуру t. Отсюда $V = \frac{m_1}{\rho_0}(1 + 3\beta t)$. Для определения начальной температуры латуни t составим уравнение теплового баланса: теплота, затраченная на таяние льда, получена за счет охлаждения латуни, т. е. $m_2 r = m_1 c (t - t_0)$, откуда, учитывая, что $t_0 = 0$ °C, имеем: $t = m_2 r / m_1 c$. Следовательно,

$$V = \frac{m_1}{\rho_0}\left(1 + \frac{3\beta m_2 r}{m_1 c}\right) = 0{,}0000512 \text{ м}^3 = 51{,}2 \text{ см}^3.$$

402. Количество теплоты, выделяемое при сгорании топлива в единицу времени, $q = mQ$. Из этого количества теплоты за то же время превращается в полезную работу лишь часть $N = q\eta$, где $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$ — наибольший коэффициент полезного действия двигателя ($T_1 = t_1 + 273°$ и $T_2 = t_2 + 273°$). Количество же работы, совершаемое в единицу времени, есть мощность. Следовательно, полезная мощность, развиваемая этим двигателем, не может превышать $N = mQ \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 263$ кВт.

403. Максимальные теоретически возможные коэффициенты полезного действия (к. п. д.) двигателя $\eta_1 = (T_2 - T_3)/T_2$ и паровой машины $\eta_2 = (T_1 - T_3)/T_1$ (здесь $T_1 = t_1 + 273°$ и аналогично T_2 и T_3). Отношение коэффициентов полезного действия двигателя и паровой машины

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{(T_2 - T_3)\, T_1}{(T_1 - T_3)\, T_2} \approx 2.$$

404. Расход горючего $m = N/Q\eta v = 5$ кг/км.

405. $Q = Ns/mv\eta \approx 46$ МДж/кг.

406. Условие движения спутника по орбите радиуса R (закон Ньютона) $m_1 v^2/R = m_1 g$ может быть выполнено в том случае, если спутнику сообщена кинетическая энергия $W = m_1 v^2/2$. Эта энергия получается путем превращения тепловой энергии $q = Qm$, выделенной при сгорании керосина, в механическую энергию, т. е. $W = q$. Совместное решение этих уравнений дает: $m = \frac{m_1 g R}{2Q} \approx$ ≈ 670 кг.

407. $\eta = (Ns/\rho V Q v) \cdot 100\% = 32\%$.

408. $\eta = \frac{V\rho c\,(t_2 - t_1)}{N\tau} \cdot 100\% = 52\%$.

409. В окружающее пространство за время τ отдается количество теплоты, отнятое у воды при ее охлаждении и превращении в лед, $q_1 = mc\,(t_2 - t_1) + mr$, а также превращенная в теплоту в процессе работы холодильника энергия W, полученная от электросети. Всего за время τ отдается теплоты $q\tau = q_1 + W$. Мощность, потребляемая холодильником,

$$N = \frac{W}{\tau} = q - \frac{q_1}{\tau} = q - \frac{m}{\tau}[c\,(t_2 - t_1) + r] = 416 \text{ Вт}.$$

410. $q = ma^2t^2/2 = 225$ МДж.

411. $v = \sqrt{4c(T_2 - T_1) + 4r - 2gh} = 388$ м/с.

412. Так как движение равномерное, то сила натяжения веревки F равна сумме проекций на направление наклонной плоскости силы тяжести и силы трения: $F = mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)$. При подъеме тела на высоту h оно проходит вдоль наклонной плоскости расстояние $l = h/\sin\alpha$. Сила F совершает работу $A = Fl$. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии тела (кинетическая энергия не изменяется) и на нагревание бруска и доски, т. е. $A = mgh + W$. Отсюда легко найти: $W = mghk \operatorname{ctg}\alpha$.

413. $q = mgl\sin\alpha - \dfrac{mv^2}{2} = 100$ Дж $= 24$ кал.

414. $n = \dfrac{N}{pSl} = 2$ об/с $= 120$ об/мин.

415. Из закона сохранения количества движения находим скорость куба после пролета сквозь него пули: $v = \dfrac{m}{M}(v_1 - v_2)$. Количество энергии, превратившейся в тепло, равно разности кинетической энергии пули перед попаданием в куб $mv_1^2/2$ и кинетической энергии куба и пули после прохождения пули сквозь куб $\dfrac{Mv^2}{2} + \dfrac{mv_2^2}{2}$. Следовательно,

$$W = \frac{mv_1^2}{2} - \left(\frac{Mv^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\left[v_1^2 - v_2^2 - \frac{m}{M}(v_1 - v_2)^2\right].$$

416. Согласно закону сохранения количества движения скорость совместного движения шаров после абсолютно неупругого удара равна $v = (m_1v_1 - m_2v_2)/(m_1 + m_2)$. Далее из закона сохранения энергии следует:

$$q = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{m_1m_2(v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = 15 \text{ Дж}.$$

§ 14. Законы идеального газа и уравнение состояния

417. См. рис. 294, 295 и 296.

418. Согласно закону Бойля—Мариотта $p_0V_0 = p_1V_1$, откуда $V_1 = p_0V_0/p_1 = 0{,}02$ м³.

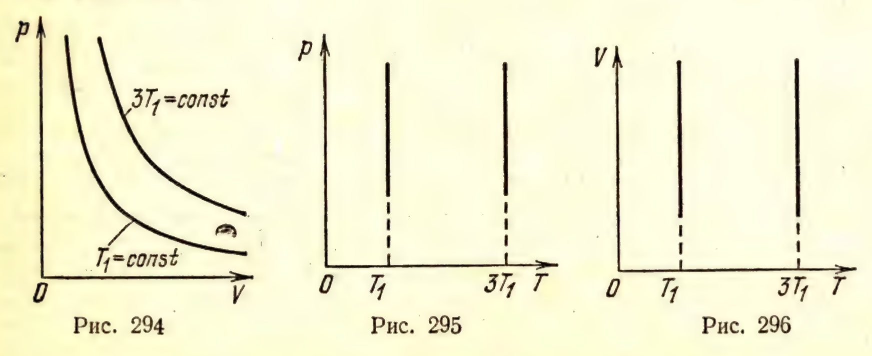


Рис. 294 Рис. 295 Рис. 296

419. $p_1 = V_2\,\Delta p/(V_1 - V_2) = 1{,}2 \cdot 10^4$ Н/м² $= 12$ кПа $= 90$ мм рт. ст.

420. $p = \frac{F \cos\alpha}{S} + p_0 = 110$ кПа.

421. $\Delta h = \frac{|mRT - \mu V p_0|}{\mu V \rho_0 g} \approx 2{,}9$ см. Здесь $\rho_0 = 10^3$ кг/м³ — плотность воды, $g = 9{,}8$ м/с², $\mu = 0{,}032$ кг/моль — молярная масса кислорода, $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная.

422. $P_1 = p_0 S_0 + P = 260$ Н (рис. 297).

423. $F = p_0 l \pi r^2/(l-d) \approx 46$ Н.

424. Давление воздуха p_1 внутри трубки, обращенной открытым концом вверх, равно сумме атмосферного давления p_0 и давления столбика ртути $\rho g h$, т. е. $p_1 = p_0 + \rho g h$. Объем воздуха в трубке $V_1 = lS$, где S — площадь поперечного сечения трубки (рис. 298). Когда трубка повернута открытым концом

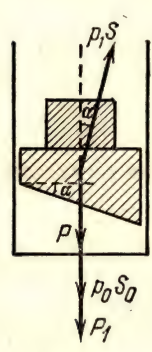


Рис. 297

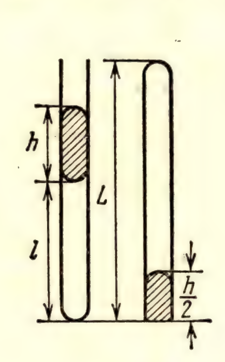


Рис. 298

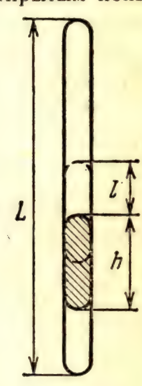


Рис. 299

вниз, то атмосферное давление p_0 уравновешивается давлением воздуха внутри трубки p_2 и давлением столбика оставшейся в ней ртути $\rho g h/2$, т. е. $p_0 = p_2 + \rho g \frac{h}{2}$, или $p_2 = p_0 - \rho g \frac{h}{2}$. Объем воздуха в этом случае $V_2 = \left(L - \frac{h}{2}\right) S$. Подставив значения давлений и объемов в выражение для закона Бойля — Мариотта $p_1 V_1 = p_2 V_2$, найдем:

$$l = \frac{[p_0 - (\rho g h/2)]\,[L - (h/2)]}{p_0 + \rho g h}.$$

425. В обоих концах трубки воздух первоначально занимал объем $V_1 = \frac{L-h}{2} S$, где S — площадь поперечного сечения трубки, и имел давление p_1. Когда трубку поставили вертикально, объем воздуха в верхней части трубки стал $V_2 = \left(\frac{L-h}{2} + l\right) S$ (рис. 299), а давление p_2. В нижней части трубки объем стал $V_3 = \left(\frac{L-h}{2} - l\right) S$, а давление p_3. Согласно закону Бойля — Мариотта для верхней части трубки $p_1 V_1 = p_2 V_2$, откуда

$$(L-h)\,p_1 = (L-h+2l)\,p_2, \qquad (1)$$

и для нижней части трубки $p_1V_1 = p_3V_3$, откуда

$$(L-h)\,p_1 = (L-h-2l)\,p_3. \qquad (2)$$

С другой стороны, столбик ртути находится в равновесии, когда давление воздуха в нижней части трубки равно сумме давлений воздуха в верхней части трубки и столбика ртути, т. е.

$$p_3 = p_2 + \rho g h. \qquad (3)$$

Исключив p_2 и p_3 из уравнений (1), (2) и (3), найдем:

$$p_1 = \frac{\rho g h\,[(L-h)^2 - 4l^2]}{4l\,(L-h)} = 50 \text{ кПа}.$$

426. Давление воздуха в трубке до ее погружения было p_0, а объем его $V_0 = LS$, где S — площадь поперечного сечения трубки. После погружения трубки в ртуть давление воздуха в ней стало $p_1 = p_0 + \rho g h$, а объем его $V_1 = (h+x)\,S$ (рис. 300). По закону Бойля — Мариотта $p_0V_0 = p_1V_1$, или после подстановки значений давлений и объемов $p_0LS = (p_0 + \rho g h)\,(h+x)\,S$. Отсюда

$$x = \frac{p_0 L}{p_0 + \rho g h} - h = -0{,}38 \text{ м},$$

т. е. запаянный конец трубки находится на глубине 38 см ниже уровня ртути в сосуде.

427. $x = \dfrac{Lp_0}{2\,(p_0 + \rho g h)} - h = -0{,}57$ м (рис. 301), т. е. поршень должен быть ниже уровня ртути на 57 см.

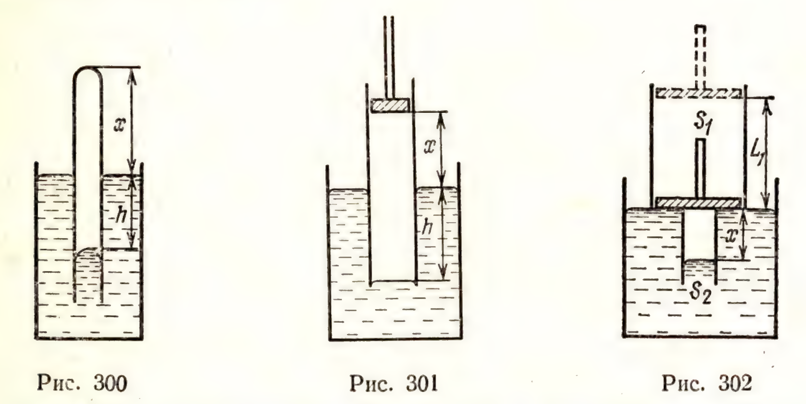


Рис. 300 Рис. 301 Рис. 302

428. До вдвигания поршня объем воздуха в цилиндре был $V_0 = S_1L_1$, а его давление p_0. При вдвинутом поршне объем воздуха в трубке $V_1 = S_2x$, а его давление $p_1 = p_0 + \rho g x$ (рис. 302). Согласно закону Бойля — Мариотта $p_0V_0 = p_1V_1$, или $p_0S_1L_1 = (p_0 + \rho g x)\,S_2x$. Решив относительно x это квадратное уравнение, найдем:

$$x = \frac{p_0}{2g\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{p_0}{2g\rho}\right)^2 + \frac{p_0S_1L_1}{\rho g S_2}}.$$

Перед корнем следует взять знак плюс, так как x мы считали положительной величиной (с увеличением x давление p_1 увеличивается). Подставив в то же

уравнение $x = L_2$ и решив его относительно S_1, найдем минимальное поперечное сечение цилиндра:

$$S_{1\,\text{мин}} = \frac{(p_0 + \rho g L_2) S_2 L_2}{p_0 L_1}.$$

429. До подъема поршня объем воздуха в трубке $V_0 = Sh_0$ (где S — площадь поперечного сечения трубки), а давление воздуха p_0. После подъема поршня на высоту H ртуть в трубке поднимется на высоту h над уровнем ртути в сосуде (рис. 303). Объем воздуха в трубке станет $V_1 = S(H - h)$,

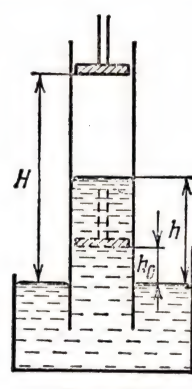


Рис. 303

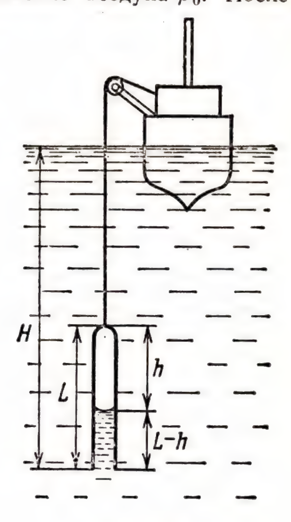


Рис. 304

а его давление $p_1 = p_0 - hd$. Отсюда $h = (p_0 - p_1)/d$. Согласно закону Бойля — Мариотта $p_0 V_0 = p_1 V_1$, или $p_0 S h_0 = p_1 S (H - h)$. Подставив сюда выражение для h, получим: $p_0 h_0 d = p_1 (Hd - p_0 + p_1)$. Решив это уравнение, найдем:

$$p_1 = \frac{p_0 - Hd}{2} \pm \sqrt{\frac{(p_0 - Hd)^2}{4} + p_0 h_0 d}.$$

Так как давление воздуха в трубке не может быть отрицательным, то перед корнем следует взять знак плюс. В результате вычислений получится: $p_1 = 1{,}15 \cdot 10^4$ Н/м².

430. Объем воздуха в трубке до ее погружения $V_0 = LS$, где S — поперечное сечение трубки. Давление воздуха в трубке до погружения p_0. Если нижний конец трубки погружен до глубины H (рис. 304), то объем воздуха в ней $V_1 = hS$, а уровень воды внутри трубки находится на глубине $H - (L - h)$ ниже поверхности моря. При этом давление воздуха в трубке $p_1 = p_0 + \rho g (H - L + h)$. По закону Бойля — Мариотта $p_0 V_0 = p_1 V_1$, т. е. $p_0 LS = [p_0 + \rho g (H - L + h)] hS$. Отсюда

$$H = \frac{(p_0 + \rho g h)(L - h)}{\rho g h} \approx 41{,}6 \text{ м}.$$

431. Давление воздуха на дне водоема $p_1 = p_0 + \rho g H$. На глубине h давление воздуха $p_2 = p_0 + \rho g h$. Объем пузырька на глубине h равен $v = \frac{4}{3}\pi r^3$. Согласно

закону Бойля — Мариотта

$$p_1V_0=p_2v, \quad \text{или} \quad (p_0+\rho gH)\,V_0=(p_0+\rho gh)\,\frac{4}{3}\,\pi r^3.$$

Отсюда

$$r=\sqrt[3]{\frac{3\,(p_0+\rho gH)\,V_0}{4\pi\,(p_0+\rho gh)}}.$$

432. $a_2=a_1\sqrt{\dfrac{p_0T_2}{(p_0+\rho_0 gh)\,T_1}}\approx 1{,}37$ см (см. решение задачи 431).

433. $k=\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{p_0}{p_0+\rho gh}=0{,}19$. Здесь V — объем лодки, V_1 — объем, свободный от воды.

434. $H=\dfrac{p_0\,(V_1-V_2)\,\Delta h}{V_1\,\Delta p}=1380$ м.

435. Начальный объем воздуха под поршнями $V_1=Sh$, где S — площади поперечных сечений сосудов. Конечный объем воздуха под закрепленным поршнем

$$V_2=S\left(h+\frac{h}{2}\right)=\frac{3}{2}\,Sh,$$

а под подвижным поршнем

$$V_3=S\left(h+x-\frac{h}{2}\right)=S\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

(рис. 305). Конечные давления под ними соответственно p_2 и p_3. Разность этих давлений определяется разностью уровней жидкости в сосудах: $p_2-p_3=$

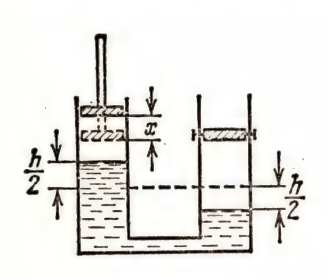


Рис. 305

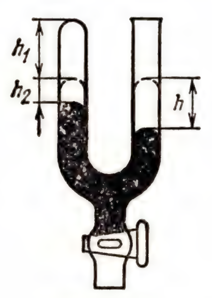


Рис. 306

$=\rho gh$. Согласно закону Бойля — Мариотта для сосуда с закрепленным поршнем

$$p_1V_1=p_2V_2, \quad \text{или} \quad p_1Sh=p_2\,\frac{3}{2}\,Sh, \quad \text{откуда} \quad p_2=\frac{2}{3}\,p_1.$$

Следовательно,

$$p_3=p_2-\rho gh=\frac{2}{3}\,p_1-\rho gh.$$

Согласно закону Бойля — Мариотта для сосуда с подвижным поршнем

$$p_1V_1=p_3V_3, \quad \text{или} \quad p_1Sh=p_3S\left(x+\frac{h}{2}\right)=\left(\frac{2}{3}\,p_1-\rho gh\right)S\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{(4p_1 + 3\rho gh)\,h}{2\,(2p_1 - 3\rho gh)}.$$

436. Начальный объем воздуха в закрытом колене $V_1 = Sh_1$, где S — площадь поперечного сечения этого колена; начальное давление воздуха в нем p_0. После выпускания части ртути объем воздуха в этом колене стал $V_2 = S\,(h_1 + h_2)$ (рис. 306), а давление $p_1 = p_0 - \rho g\,(h - h_2)$. Согласно закону Бойля — Мариотта

$$p_0V_1 = p_1V_2, \text{ или } p_0Sh_1 = [p_0 - \rho g\,(h - h_2)]\,S\,(h_1 + h_2).$$

Отсюда найдем:

$$h = h_2\,\frac{p_0 + \rho g\,(h_1 + h_2)}{\rho g\,(h_1 + h_2)} = 0{,}53 \text{ м}.$$

437. Перед засасыванием воздух занимает объем баллона V и имеет давление p. В конце засасывания объем V_1, занимаемый воздухом, состоит из объема баллона и объема засасывающей камеры: $V_1 = V + v$. Давление при этом становится p_1. Согласно закону Бойля — Мариотта $pV = p_1V_1$, или $\frac{p}{p_1} = \frac{V + v}{V}$. По условию задачи $p/p_1 = n$. Следовательно, $v = V\,(n - 1) = 0{,}8$ л.

438. Перед засасыванием объем воздуха равен объему баллона V, а давление его p_0. В конце первого засасывания объем воздуха складывается из объема баллона V и объема засасывающей камеры v, а давление его становится p_1. Согласно закону Бойля — Мариотта $p_0V = p_1\,(V + v)$, откуда

$$p_1 = p_0\,\frac{V}{V + v}.$$

При втором цикле роль начального давления будет играть p_1. Поэтому

$$p_2 = p_1\,\frac{V}{V + v} = p_0\left(\frac{V}{V + v}\right)^2.$$

При третьем цикле начальное давление будет p_2. Следовательно,

$$p_3 = p_2\,\frac{V}{V + v} = p_0\left(\frac{V}{V + v}\right)^3,$$

и т. д. Ясно, что после n циклов давление будет

$$p_n = p_0\left(\frac{V}{V + v}\right)^n; \text{ отсюда } \frac{p_n}{p_0} = \left(\frac{V}{V + v}\right)^n.$$

Логарифмируя, найдем: $\lg\,(p_n/p_0) = n\,\lg\,[V/(V + v)]$. Окончательно имеем:

$$n = \frac{\lg\,(p_n/p_0)}{\lg\left(\frac{V}{V + v}\right)}.$$

439. Объем воздуха при давлении p, необходимый для работы n молотков, $V_1 = nv$. По закону Бойля — Мариотта $p_0V = pV_1$. Отсюда $n = p_0V/pv = 20$ молотков.

440. В конце каждого засасывания воздух с атмосферным давлением p_0 занимает объем v засасывающей камеры насоса. В мяче это количество воздуха занимает объем V и имеет парциальное давление p, которое можно найти при

помощи закона Бойля — Мариотта: $p=\frac{v}{V}p_0$. После n качаний давление p_1 в мяче будет равно сумме парциальных давлений:

$$p_1=np=\frac{nvp_0}{V}=0{,}2 \text{ МПа}.$$

441. Парциальное давление каждой порции воздуха можно найти при помощи закона Бойля — Мариотта (см. решение задачи 440): $p=\frac{v}{V}p_0$, где $v=$ $=\pi d^2h/4$ — объем воздуха, засасываемого при каждом ходе насоса. Сумма парциальных давлений всех порций воздуха, добавляемых в камеру за n ходов насоса, будет $np=\pi d^2hnp_0/4V$. Сложив эту величину с начальным давлением в камере p_0, найдем конечное давление: $p_1=\frac{\pi d^2hnp_0}{4V}+p_0$. Отсюда число ходов насоса, необходимых для получения давления p_1 в камере, $n=\frac{4V(p_1-p_0)}{\pi d^2hp_0}$. Время накачивания камеры

$$t=n\tau=\frac{4V(p_1-p_0)\tau}{\pi d^2hp_0}\approx 46 \text{ с}.$$

442. После соединения сосудов воздух, находившийся в каждом из них, распределится по объему V_1+V_2 двух сосудов. Для воздуха, находившегося в первом сосуде, согласно закону Бойля — Мариотта $p_1V_1=p_1'(V_1+V_2)$, и для воздуха, находившегося во втором сосуде, $p_2V_2=p_2'(V_1+V_2)$, где p_1' и p_2' — парциальные давления. Складывая эти равенства, получим: $p_1V_1+p_2V_2=$ $=(p_1'+p_2')(V_1+V_2)$. Но по закону Дальтона установившееся давление $p=$ $=p_1'+p_2'$. Таким образом,

$$p=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}=6{,}75\cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

443. $p_1=\frac{p(V_1+V_2)-p_2V_2}{V_1}=1{,}8$ МПа (см. решение задачи 442).

444. $p=4p_1m_1/(2m_1+m_2)$.

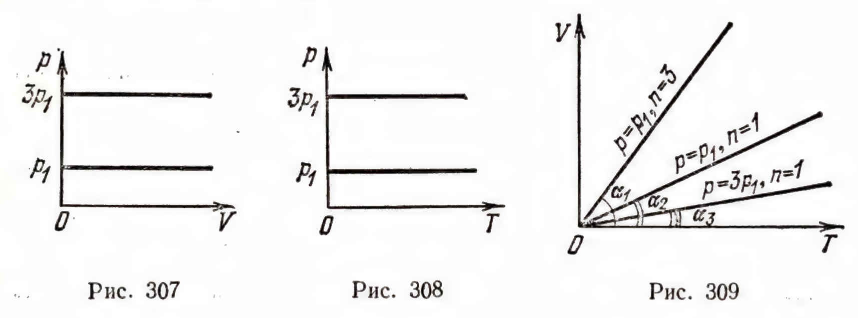


Рис. 307 Рис. 308 Рис. 309

445. Графики изобарных процессов в координатах p, V и p, T представлены на рис. 307 и 308, в координатах V, T — на рис. 309.

446. Начальная температура $T_1 = \frac{\Delta T}{(V_2/V_1) - 1} = 1$ К, конечная температура $T_2 = \frac{\frac{V_2}{V_1} \cdot \Delta T}{(V_2/V_1) - 1} = 2$ К. Здесь $V_2 = 2V_1$.

447. $\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = 0{,}04$, или 4%.

448. Для ненагретого баллона, согласно закону Бойля — Мариотта, $pV = p'(V - S\,\Delta l)$; для нагретого, согласно объединенному газовому закону, $\frac{pV}{T_0} = \frac{p'(V + S\,\Delta l)}{T_0 + \Delta T}$, где p — первоначальное давление в баллонах, а p' — давление в них после нагревания. Исключив из этих уравнений p/p', найдем:

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{2S\,\Delta l}{V - S\,\Delta l} \approx \frac{2S\,\Delta l}{V}.$$

Здесь пренебрегается объемом капилляра по сравнению с объемом баллонов.

449. От $T_1 = \frac{TV}{V + n\,\Delta V} = 267$ К до $T_2 = \frac{T(V + N\,\Delta V)}{V + n\,\Delta V} = 321$ К.

450. $V_1 = \frac{VT_1}{T_1 + T_2} = 200$ см³ и $V_2 = \frac{VT_2}{T_1 + T_2} = 300$ см³.

451. Изменение объема ΔV одинаково для обеих половин. Для ненагретой части цилиндра $p_0V = p_1(V - \Delta V)$, а для нагретой $\frac{p_0V_0}{T} = \frac{p_1(V + \Delta V)}{T_1}$, где V — первоначальный объем каждой половины цилиндра. Исключая отсюда $\Delta V/V$, найдем: $p_1 = p_0 \frac{T + T_1}{2T} = 105$ кПа.

452. Пусть при горизонтальном положении трубки объем каждой из половин был V. При вертикальном ее положении объем верхней половины стал $V + \Delta V$ и давление в ней p_1, а объем нижней половины $V - \Delta V$ и давление в ней $p_1 + (mg/S)$. Согласно закону Бойля — Мариотта для верхней и нижней половин имеем:

$$pV = p_1(V + \Delta V), \quad pV = \left(p_1 + \frac{mg}{S}\right)(V - \Delta V).$$

После деления уравнений на V имеем:

$$p = p_1\left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right) \quad \text{и} \quad p = \left(p_1 + \frac{mg}{S}\right)\left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right).$$

Исключив из этих уравнений неизвестную величину $\Delta V/V$, получим квадратное уравнение

$$p_1^2 - \left(p - \frac{mg}{S}\right)p_1 - \frac{mgp}{2S} = 0,$$

из которого найдем:

$$p_1 = \frac{1}{2}\left[p - \frac{mg}{S} + \sqrt{p^2 + \left(\frac{mg}{S}\right)^2}\right]$$

(второй корень отброшен, так как он дает для p_1 отрицательные значения).

453. $x = \frac{\rho gl\,(L - l)}{2(2p + \rho gl)} = 17$ см. Здесь ρ — плотность ртути, $\rho gl = 30$ мм рт. ст. $= 4$ кПа — давление столбика ртути длиной $l = 30$ мм.

454. $T_2=\frac{\rho_1 T_1}{\rho_2}=\frac{mT_1}{V_1\rho_2}=225$ К, или $t_2=-48$ °С.

455. Так как давление в колбе перед погружением и в конечном ее состоянии одинаково (равно атмосферному), то для этих состояний газа $V_1/V_2 = T_1/T_2$, где

$$V_1=\frac{4}{3}\pi a^3+\frac{1}{4}\pi d^2 l \quad \text{и} \quad V_2=\frac{4}{3}\pi a^3+\frac{1}{8}\pi d^2 l$$

— начальный и конечный объемы воздуха в колбе. Следовательно,

$$T_1=\frac{V_1}{V_2}T_2=2T_2\frac{16a^3+3ld^2}{32a^3+3ld^2}=316 \text{ К, или } t_1=43\text{ °С}.$$

456. $\rho_2=\rho_0 T_0/T_2=0,41$ кг/м³.

457. Уравнение состояния до нагревания $pV=\frac{m}{\mu}RT$, после нагревания $p(V+Sh)=\frac{m}{\mu}R(T+\Delta T)$, где p, V и T — давление, объем и температура газа до нагревания. Вычитая второе уравнение из первого и учитывая, что $p=p_0+(P/S)$, найдем:

$$P=\frac{mR\,\Delta T}{\mu h}-p_0 S\approx 8,5\cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Здесь $\mu=32$ кг/кмоль — молярная масса кислорода, R — универсальная газовая постоянная.

458. Условие $V/T=\text{const}$ означает, что процессы нагревания и охлаждения происходят изобарно. При отношении начальных объемов $V_1/V_2=1/2$ эти объемы составляют части $V_1=\frac{1}{3}V_0$ и $V_2=\frac{2}{3}V_0$ от объема V_0 всей трубки. Конечные объемы обеих частей одинаковы, $V_3=\frac{1}{2}V_0$. Согласно закону Гей-Люссака для меньшей части $V_1/V_3=T_0/T_1$, для большей части $V_2/V_3=T_0/T_2$, где $T_0=273$ К — температура, соответствующая начальным условиям. Отсюда

$$T_1=\frac{T_0V_3}{V_1}=\frac{3}{2}T_0\approx 410 \text{ К, или } t_1=137\text{ °С};$$

$$T_2=\frac{T_0V_3}{V_2}=\frac{3}{4}T_0\approx 205 \text{ К, или } t_2=-68\text{ °С}.$$

459. $x=LT_2/(T_1+T_2)\approx 42$ см.

460. $T_1=\frac{p_1}{p_2}T_2=404$ К.

461. $P=Sp_1(T_2-T_1)/T_1=46$ Н.

462. Манометры обычно градуируются так, что они показывают разность между давлением внутри баллона и атмосферным давлением. Поэтому давление в баллоне, когда он находится в помещении, равно $p_1=p+p_0$, и давление в баллоне, когда он вынесен на улицу, $p_2=p+p_0-\Delta p$. Так как объем газа остается неизменным, то по закону Шарля $p_1/T_1=p_2/T_2$, где $T_2=t+273°$ — температура наружного воздуха. Отсюда

$$T_2=\frac{p_2}{p_1}T_1=\frac{p+p_0-\Delta p}{p+p_0}T_1=256 \text{ К, или } t_2=-17\text{ °С}.$$

463. Давление газа, которым наполняются лампы, должно удовлетворять закону Шарля: $p/T_1 = p_0/T_2$. Отсюда $p = \frac{T_1}{T_2} p_0 = 74$ кПа.

464. Пусть в цилиндре под поршнем находится некоторое количество газа, который при температуре $t = 0\,°C$ имеет давление p_0 и объем V_0.

1) Нагреем газ до температуры t_1 при постоянном давлении p_0. Тогда по закону Гей-Люссака газ займет объем $V_1 = V_0(1+\alpha t_1)$.

2) Сожмем газ при постоянной температуре t_1 от объема V_1 до объема V_0. В результате газ будет иметь давление p_1, причем по закону Бойля — Мариотта $p_0 V_1 = p_1 V_0$.

3) Охладим газ до температуры t_0 при постоянном объеме V_0. При этом газ возвратится в первоначальное состояние, и его давление уменьшится от p_1 до p_0. Согласно закону Шарля p_1 и p_0 связаны соотношением $p_1 = p_0(1+\beta t)$.

Подставив выражение для V_1 из первого пункта и выражение для p_1 из третьего пункта в выражение закона Бойля — Мариотта из второго пункта, получим: $p_0 V_0 (1+\alpha t_1) = p_0 V_0 (1+\beta t_1)$. Отсюда $\alpha = \beta$.

465. Графики процесса в координатах p, V и p, T приведены на рис. 310 и 311.

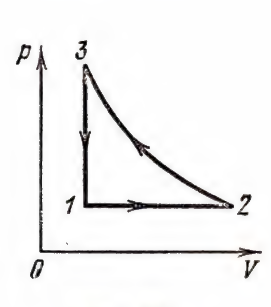


Рис. 310

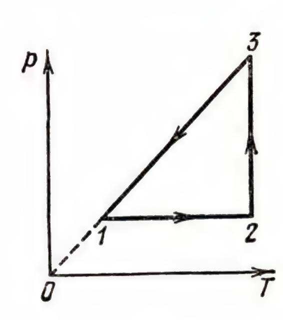


Рис. 311

466. Для перехода между состояниями *3* и *1* (как и для всякого другого) должно выполняться соотношение $p_3V_3/T_3 = p_1V_1/T_1$ (*а*). С другой стороны, как видно из рис. 63, в этом случае $V = kp$, т. е. $V_3/p_3 = V_1/p_1$ (*б*). Процесс перехода между состояниями *1* и *2* изохорный. Следовательно, $p_1/p_2 = T_1/T_2$ (*в*). Наконец, процесс *2—3* изобарный, т. е. $p_2 = p_3$ (*г*). Из соотношений (*а*) — (*г*) найдем: $T_3 = T_2^2/T_1$.

467. $p_4 = \frac{p_1 V_1 T_3}{V_4 T_1} = 10^5$ Н/м² $= 100$ кПа $= 0{,}1$ МПа.

468. Для данного количества газа при любых процессах можно применять объединенный газовый закон в виде $\frac{pV}{T} = B = \text{const}$. Постоянную величину B можно найти, подставив в это уравнение известные для начального состояния значения p_1, V_1, T_1; имеем для нашей задачи: $B = \frac{p_1 V_1}{T_1} = 0{,}5$ Дж/К. Графическое решение задачи получим, построив графики процессов. Предварительно выбрав масштаб для p, V и T, из рис. 312, 313 и 314 получим, что $p_4 = 100$ кПа.

469. При давлении $p_0 = \rho g H_0 = 101{,}3$ кПа, где $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м³ — плотность ртути, $g = 9{,}8$ м/с² — ускорение свободного падения и $H_0 = 760$ мм рт. ст.,

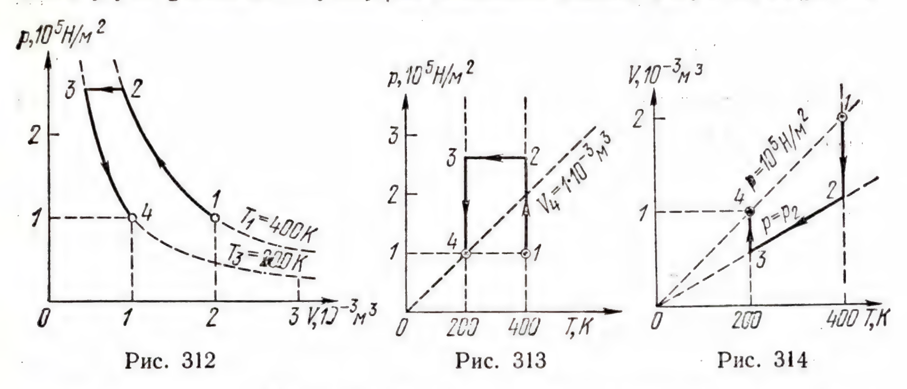


Рис. 312 Рис. 313 Рис. 314

и при температуре $T_0 = 273$ К (так называемые нормальные условия) моль любого газа согласно закону Авогадро занимает объем $V_{0\mu} = 22{,}41$ л $= 0{,}02241$ м³. Отсюда

$$R = \frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_{0\mu}}{T_0} = 8{,}31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

470. Из уравнения объединенного закона газового состояния, учитывая, что молярная масса водорода $\mu = 0{,}002$ кг/моль и газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), найдем: $m = \dfrac{\mu p V}{RT} = 0{,}138$ кг.

471. $\mu_1 = \dfrac{m_1 \mu_2 p_2 T_1}{m_2 p_1 T_2} = 0{,}028$ кг/моль, где $\mu_2 = 0{,}002$ кг/моль — молярная масса водорода, $T_1 = t_1 + 273°$, $T_2 = t_2 + 273°$. Неизвестный газ — азот.

472. Уравнение состояния воздуха в сосуде объемом V при атмосферном давлении p до нагревания: $pV = \dfrac{m_1}{\mu} RT_1$; после нагревания: $pV = \dfrac{m_2}{\mu} RT$. Здесь m_1 — масса воздуха в сосуде до нагревания, m_2 — масса его после нагревания и μ — молярная масса воздуха. Поделив второе уравнение на первое, найдем: $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{T_1}{T_2} = 0{,}415$, или 41,5%.

473. $\dfrac{m_1 - m_2}{m_1} = \dfrac{p_1 - p_2}{p_1} = 0{,}2$, или 20%.

474. $m_2 - m_1 = \dfrac{\mu V}{R}\left(\dfrac{p_2}{T_2} - \dfrac{p_1}{T_1}\right) = 5{,}7 \cdot 10^{-2}$ кг.

475. $\mu = mRT/pV = 0{,}032$ кг/моль (кислород).

476. Из уравнения состояния можно найти плотность газа: $\rho = m/V = \mu p/RT$, где $\mu = 0{,}028$ кг/моль — молярная масса азота. Отсюда $\rho = 1{,}12$ кг/м³.

477. $\rho = 0{,}49$ кг/м³ (см. решение задачи 476).

478. $p = 0{,}4RT\rho_0/\mu = 24$ МПа (см. решение задачи 476).

479. *Первый способ.* Согласно решению задачи 442 установившееся давление выражается формулой $p = (p_1 V_1 + p_2 V_2)/(V_1 + V_2)$. Отсюда $p_1 = \dfrac{p(V_1 + V_2) - p_2 V_2}{V_1} = 5 \cdot 10^5$ Па.

Второй способ. Уравнение состояния воздуха в первом баллоне $p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT$, во втором баллоне $p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT$ и после соединения баллонов $p(V_1+V_2) = \frac{m_1+m_2}{\mu} RT$, где m_1 и m_2 — массы воздуха в первом и втором баллонах соответственно. Исключив из этих уравнений m_1 и m_2, получим снова: $p_1 = \frac{p(V_1+V_2)-p_2V_2}{V_1}$.

Третий способ. Предположим, что в трубе, соединяющей баллоны, имеется поршень (рис. 315). Сместим поршень так, чтобы давление в баллонах стало одинаковым и равным p. Объем воздуха в первом баллоне увеличится на величину ΔV и станет $V_1+\Delta V$, а во втором баллоне уменьшится на ту же величину и станет $V_2-\Delta V$. Теперь поршень можно удалить, не нарушая равновесия газа. По закону Бойля—Мариотта $p_1V_1 = p(V_1+\Delta V)$ и $p_2V_2 = p(V_2-\Delta V)$. Складывая эти уравнения, найдем: $p_1V_1+p_2V_2 = p(V_1+V_2)$. Отсюда получим для определения p_1 прежнюю формулу.

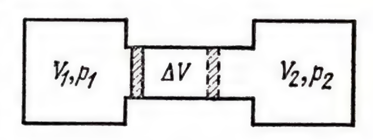


Рис. 315

480. $p = \frac{T}{2}\left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2}\right)$.

481. Уравнения состояния газа до нагревания в каждой половине цилиндра

$$pLS = \frac{m}{\mu} RT, \qquad (1)$$

где $LS = V$ — объем половины цилиндра, S — площадь его поперечного сечения. Объем нагретой половины стал $V_1 = (L+l)S$ и уравнение состояния газа в ней

$$p_1(L+l)S = \frac{m}{\mu} R(T+\Delta T), \qquad (2)$$

а объем другой половины $V_2 = (L-l)S$ и уравнение состояния газа в ней

$$p_1(L-l)S = \frac{m}{\mu} RT. \qquad (3)$$

Здесь p_1 — давление газа после смещения поршня, одинаковое в обеих половинах цилиндра в силу равновесия поршня, $T+\Delta T$ — температура в нагретой половине. Поделив два последних уравнения друг на друга, получим:

$$T+\Delta T = T\frac{L+l}{L-l}; \text{ отсюда } \Delta T = \frac{2Tl}{L-l} = 404 \text{ К}.$$

Правые части первого и третьего уравнений равны между собой, поэтому $p_1(L-l)S = pLS$ (это уравнение представляет собой закон Бойля—Мариотта для той части цилиндра, температура которой не изменилась). Из этого уравнения

$$p_1 = Lp/(L-l) = 167 \text{ кПа}.$$

482. $h = L\left(1-\sqrt{T_2/T_1}\right) \approx 10$ см. (При решении задачи обратить внимание, что $\rho g = p_0/L$.)

483. Так как водород свободно проходит через перегородку, то он распространяется по объему V всего сосуда, и для него уравнение состояния будет $p_1V=\frac{m_1}{\mu_1}RT$, где $\mu_1=0{,}002$ кг/моль — молярная масса водорода. В той части сосуда, в которой раньше был один водород, он и в дальнейшем останется один, так что давление в этой части сосуда будет $p_1=\frac{m_1RT}{\mu_1V}=33$ кПа. Для азота уравнение состояния будет $p_2\frac{V}{2}=\frac{m_2}{\mu_2}RT$, где $m_2=2{,}8\cdot10^{-2}$ кг — масса азота и $\mu_2=0{,}028$ кг/моль — его молярная масса. Так как в этой половине сосуда будет и водород и азот, то полное давление p будет складываться из парциальных давлений p_1 и p_2. Таким образом,

$$p=p_1+p_2=\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{2m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V}=0{,}1 \text{ МПа}.$$

484. В той части цилиндра, в которой находится водород, поршень будет находиться на расстоянии от торца

$$x=\frac{\mu_1LT_2}{\mu_1T_2+\mu_2T_1}=60 \text{ см};$$

здесь $\mu_1=0{,}032$ кг/моль — молярная масса кислорода, $\mu_2=0{,}002$ кг/моль — молярная масса водорода.

485. Уравнения состояния для первой и второй частей сосуда до выравнивания температуры $pV_1=\frac{m_1}{\mu}RT_1$ и $pV_2=\frac{m_2}{\mu}RT_2$. Поделив их друг на друга, находим: $\frac{V_1T_2}{V_2T_1}=\frac{m_1}{m_2}$. Уравнение состояния для первой и второй частей сосуда после выравнивания температуры $p'V_1'=\frac{m_1}{\mu}RT$ и $p'V_2'=\frac{m_2}{\mu}RT$, где V_1' — конечный объем первой части, V_2' — конечный объем второй части, T — общая температура и p' — давление, одинаковое в обеих частях в силу равновесия перегородки. Поделив эти два уравнения друг на друга, найдем: $V_1'/V_2'=m_1/m_2$. Таким образом, $\frac{V_1'}{V_2'}=\frac{V_1T_2}{V_2T_1}=\frac{4}{5}$.

486. Пусть длина той части сосуда, которая заполнена кислородом, равна x, тогда водородом заполнена часть сосуда длиной $L-x$. Их объемы равны соответственно $V_1=xS$ и $V_2=(L-x)S$, где S — площадь поперечного сечения сосуда. Уравнения состояния кислорода и водорода:

$$pxS=\frac{m}{\mu_1}RT,\quad p(L-x)S=\frac{m}{\mu_2}RT,$$

где m и p — одинаковые, по условию задачи, массы и давления кислорода и водорода. Поделив одно уравнение на другое, получим:

$$\frac{x}{L-x}=\frac{\mu_2}{\mu_1};\ \text{отсюда}\ x=\frac{L\mu_2}{\mu_1+\mu_2}=5 \text{ см},$$

т. е. поршень находится на расстоянии $x=5$ см от конца той части цилиндра, в которой содержится кислород.

487. Положив в уравнениях состояния, приведенных в решении задачи 486, $x = L/2$, $T = T_1$ для кислорода и $T = T_2$ для водорода, заметим, что левые части этих уравнений будут равны. Приравняв поэтому правые части, получим: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 16$. При любых температурах, для которых будет выполняться это условие, поршень будет делить сосуд на равные части.

488. $T = \frac{\mu p V}{mR} = 280$ К, т. е. $t = 7°$С.

489. После подъема шара его объем стал $V_2 = V_1 + nV_1$, где $n = 5\% = 0{,}05$, а давление газа в нем $p_2 = p_0 + \Delta p$. Согласно объединенному газовому закону $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$. Отсюда

$$T_2 = \frac{p_2 V_2 T_1}{p_1 V_1} = \frac{(p_0 + \Delta p)(1 + n) T_1}{p_1} = 255 \text{ К, или } t_2 = -18°\text{С}.$$

490. Объем водорода, заключенного в n баллонах, $V = nv$. При помощи объединенного газового закона $\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$ находим: $n = \frac{p_1 V_1 T}{pvT_1} \approx 536$ баллонов.

491. Действующая на стоящий на горизонтальной плоскости автомобиль сила тяжести P, направленная вниз, уравновешивается четырьмя силами давления со стороны грунта на шины, направленными вверх. Будем считать, что все четыре последние силы одинаковы и равны $f = P/4$. На соприкасающийся с грунтом плоский участок шины сверху (изнутри) действуют силы давления pS воздуха, заключенного в шине, снизу же действуют силы со стороны грунта f. Эти силы уравновешиваются. Таким образом, давление воздуха внутри шины при температуре t_2 равно $p = \frac{f}{S} = \frac{P}{4S}$. Согласно объединенному газовому закону $\frac{pV_2}{T_2} = \frac{p_0 V_1}{T_1}$, или, учитывая значение p, имеем: $\frac{PV_2}{4ST_2} = \frac{p_0 V_1}{T_1}$. Отсюда $P = \frac{4ST_2 p_0 V_1}{V_2 T_1} = 4 \cdot 10^4$ Н.

492. Чтобы вытеснить воду из цистерны, воздух должен иметь давление, по крайней мере равное давлению воды на этой глубине: $p_2 = p_0 + dh$. После расширения воздух займет объем $V_2 = V + V_1$. Согласно объединенному газовому закону

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \text{ или } \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{(p_0 + dh)(V + V_1)}{T_2}.$$

Отсюда

$$V = \frac{p_1 V_1 T_2}{(p_0 + dh) T_1} - V_1 = 1{,}85 \text{ м}^3.$$

493. $T_1 > \frac{F + p_0 S}{p_0 S} T = 390$ К, т. е. $t > 117°$С.

494. Равновесие устанавливается в том случае, когда силы давления воздуха в цилиндрах на оба поршня будут равны, т. е. при условии $p_1 S_1 = p_2 S_2$. Применим для воздуха в первом цилиндре объединенный газовый закон $\frac{p_0 V_1}{T_1} = \frac{p_1 V_1'}{T_2}$ и для воздуха во втором цилиндре закон Бойля—Мариотта $p_0 V_2 = p_2 V_2'$. После нагревания поршни сместятся на одинаковые расстояния,

и *изменения* объемов воздуха в цилиндрах будут пропорциональны площадям поршней, т. е. $\frac{V_1'-V_1}{V_2-V_2'}=\frac{S_1}{S_2}$. Решив эту систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными p_1, p_2, V_1', V_2', найдем, в частности:

$$p_2=\frac{S_1p_0(T_2V_1+T_1V_2)}{T_1(S_2V_1+S_1V_2)};\ \text{отсюда}\ F=p_2S_2=\frac{S_1S_2p_0(T_2V_1+T_1V_2)}{T_1(S_2V_1+S_1V_2)}.$$

495. Из уравнений состояния находим массу m_1 водорода, находящегося в шаре, и массу m_2 воздуха, вытесненного шаром:

$$m_1=\frac{pV}{p_0V_0}\mu_1 \quad \text{и} \quad m_2=\frac{V}{V_0}\mu,$$

где $\mu_1=0{,}002$ кг/моль — молярная масса водорода, а $V_0=0{,}0224$ м³/моль — объем моля идеального газа при нормальных условиях. Согласно закону Архимеда при парении шара в воздухе масса шара с водородом $M+m_1$ равна массе вытесненного воздуха m_2. Отсюда легко получить:

$$p=\frac{p_0}{\mu_1}\left(\mu-\frac{V_0}{V}M\right)\approx 0{,}15\ \text{МПа}.$$

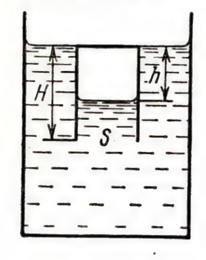


Рис. 316

496. Пусть уровень воды в стакане находится на расстоянии h от дна стакана (рис. 316). Давление воздуха в стакане будет $p_0+\rho gh$. Так как p_0 соответствует приблизительно давлению десятиметрового столба воды, а h меньше $H=10$ см $=0{,}1$ м, то ρgh составляет менее 1% от атмосферного давления, и величиной ρgh можно пренебречь по сравнению с p_0, т. е. считать, что давление воздуха в стакане неизменно. Тогда по закону Гей-Люссака $V_1/T_1=V_2/T_2$, где $V_1=HS$ и $V_2=hS$ — начальный и конечный объемы воздуха в стакане. Отсюда $h=H\,(T_2/T_1)$ и объем вошедшей в стакан воды

$$V=(H-h)\,S=\frac{HS\,(T_1-T_2)}{T_1}=49\ \text{см}^3.$$

Если учитывать изменение давления воды в стакане в зависимости от величины h и применить при этом объединенный газовый закон $\frac{p_0HS}{T_1}=\frac{(p_0+\rho gh)\,hS}{T_2}$, то для h получится сложная формула:

$$h=\frac{p_0}{2\rho g}\left(\sqrt{1+\frac{4HT_2\rho g}{p_0T_1}}-1\right).$$

Вычисление по этой формуле приводит к $V=50$ см³. Заметим еще, что если корень в этом выражении разложить по формуле бинома Ньютона и ограничиться двумя членами $1+\frac{2HT_2\rho g}{p_0T_1}$, то мы получим для h выражение, найденное ранее при помощи закона Гей-Люссака.

497. По закону Архимеда стакан плавает погруженным до краев при условии, что его вес P вместе с весом налитой в него воды ρgV_1 равен весу вытесненной им воды ρgV, где $V=HS$ — объем стакана, $V_1={}^2/_3HS$ — объем

налитой в него воды и S — площадь его поперечного сечения. Таким образом,

$$P+\frac{2}{3}HS\rho g=HS\rho g;\ \text{ отсюда }\ P=\frac{1}{3}HS\rho g.$$

Погруженный вверх дном на глубину x стакан будет находиться в равновесии, если вес вытесненной им воды ρgV_2, где V_2 — объем сжатого в нем воздуха, равен весу стакана P. Учитывая выражение для P, найдем: $V_2 = {}^1/_3HS$. На глубине x давление воздуха в стакане $p=p_0+\left(x-\frac{2}{3}H\right)\rho g$. Из объединенного газового закона

$$\frac{p_0HS}{T_1}=\frac{\left[p_0+\left(x-\frac{2}{3}H\right)\rho g\right]\frac{1}{3}HS}{T_2}$$

получим:

$$x=\frac{p_0(3T_2-T_1)}{T_1\rho g}+\frac{2}{3}H=15{,}4 \text{ м.}$$

§ 15. Элементы молекулярной физики

498. Масса молекулы водорода $m_1=3{,}3\cdot10^{-27}$ кг, масса молекулы кислорода $m_2=5{,}3\cdot10^{-26}$ кг.

499. $m=\frac{p_0\rho T}{n_0pT_0}\approx3{,}33\cdot10^{-26}$ кг, где $T_0=273$ К.

500. $n_0=N_A/V_{0\mu}=2{,}7\cdot10^{19}$ см$^{-3}$ (число Лошмидта).

501. $n=\frac{N_AT_0}{kV_{0\mu}T}=1{,}83\cdot10^{24}$ м$^{-3}$, где $V_{0\mu}=0{,}0224$ м^3/моль — объем, занимаемый одним молем идеального газа при нормальных условиях, $T_0=273$ К.

502. В объеме $V_0=22{,}41$ м^3 содержится при нормальных условиях $N = 6{,}02\cdot10^{26}$ молекул. Так как при одних и тех же условиях число n_0 молекул в сосуде пропорционально его объему, то $n_0/v=N/V_0$. Отсюда $n_0=vN/V_0$. Пусть $n=10^8$ сек$^{-1}$ — число молекул, вылетающих из отверстия в единицу времени, тогда искомое время $t=\frac{n_0}{n}=\frac{vN}{V_0n}=2{,}7\cdot10^{11}$ с ≈8500 лет.

503. $p_2=p_1-\frac{3np_0T}{4\pi n_0a^3T_0}$, где $T_0=273$ К и $p_0=10^5$ Н/м^2 — значения, соответствующие нормальным условиям.

504. Возьмем киломоль азота, который при нормальных условиях ($t_0 = 0°$С и $p_0=10^5$ Н/м^2) занимает объем $V_0=22{,}41$ м^3 и при давлении p_1 и той же температуре согласно закону Бойля — Мариотта занимает объем $V_1 = V_0p_0/p_1$. В киломоле содержится $N=6{,}02\cdot10^{26}$ молекул. Объем каждой из них $v=\pi d^3/6$ и их суммарный объем $V=\pi d^3N/6$. Таким образом, на объем самих молекул приходится при давлении p_0 часть всего объема, равная

$$\frac{V}{V_0}=\frac{\pi d^3N}{6V_0}=3{,}8\cdot10^{-4}, \text{ или } 0{,}038\%,$$

при давлении p_1 — часть

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi d^3Np_1}{6V_0p_0}=0{,}19, \text{ или } 19\%.$$

505. Каждая молекула до удара о стенку имеет количество движения mv, направленное к стенке. После упругого удара направление скорости молекулы меняется на обратное. Поэтому количество движения молекулы после удара становится $-mv$. Изменение количества движения каждой молекулы $mv-(-mv)=2mv$. В течение промежутка времени τ о стенку ударятся все те молекулы, которые, находясь в параллелепипеде с основанием, равным площади стенки S, и длиной $l=v\tau$, двигались по направлению к стенке (рис. 317). Объем этого параллелепипеда $V=S v\tau$, и в нем находится $n=n_0 S v\tau$ движущихся к стенке молекул. За промежуток времени τ произойдет изменение количества движения n молекул, равное $2mv\cdot n_0 S v\tau$. По второму закону Ньютона $2mv\cdot n_0 S v\tau=F\tau$, где F — сила, действующая на молекулы со стороны стенки. Согласно третьему закону Ньютона такая же сила действует на стенку.

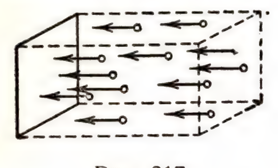


Рис. 317

Таким образом, $F=2n_0 mv^2 S$ и давление $p=F/S=2n_0 mv^2$.

506. В решении задачи 505 найдено, что давление на стенку равно $p=2n_0 mv^2$, где n_0 — число молекул в единице объема, движущихся по направлению к этой стенке. По направлению к каждой грани кубика движется $n_0=\frac{1}{6}kN_A$ молекул (здесь N_A — число Авогадро). Отсюда

$$p=\frac{1}{3}kN_A mv^2=1{,}5\ \text{Н/м}^2=1{,}5\ \text{Па}.$$

507. Число молекул в моле равно числу Авогадро N_A. Согласно уравнению состояния число молей $k=pV/RT$. Отсюда

$$n_0=\frac{kN_A}{V}=\frac{pN_A}{RT}=2\cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

508. $T=\frac{pVN_A}{nR}=301$ К, т. е. $t=28°$С. Здесь $N_A=6\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро, $R=8{,}3$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная (см. решение задачи 507).

509. $p=\frac{np_0 T}{n_0 k V_1 T_0}=20$ кПа, где $p_0=1$ атм $\approx 101{,}3$ кПа — нормальное атмосферное давление, $T_0=273$ К, $T=t+273$ К.

510. Согласно решению задачи 507 $n_0=\frac{pN_A}{RT}=3\cdot 10^{10}\ \text{м}^{-3}=3\cdot 10^4\ \text{см}^{-3}$.

511. Масса газа $m=m_0 n$ и его молярная масса $\mu=m_0 N_A$, где m_0 — масса одной молекулы, n — число молекул в данном объеме и N_A — число молекул в моле (число Авогадро). Подставив значения m и μ в уравнение состояния $pV=\frac{m}{\mu}RT$, находим: $p=\frac{n}{N_A}\cdot\frac{RT}{V}$, т. е. при прочих равных условиях давление пропорционально числу частиц n. В нашем случае, если бы молекулы не распадались, то согласно закону Шарля при температуре T_2 было бы давление $p_2'=p_1 T_2/T_1$. Вследствие распада каждой молекулы водорода на два атома полное число частиц увеличивается вдвое. Поэтому при температуре T_2 давление будет

$$p_2=2p_2'=\frac{2p_1T_2}{T_1}=40\ \text{кПа}.$$

§ 16. Внутренняя энергия, теплоемкость и работа расширения газов

512. На поршень действуют три силы: сила тяжести, сила атмосферного давления извне и сила давления кислорода изнутри. Первые две силы все время остаются постоянными. Так как поршень в любой момент времени находится в равновесии, то во время нагревания кислорода его давление p остается также постоянным. Таким образом, здесь может быть найдена удельная теплоемкость кислорода при постоянном давлении: $c_p = \frac{q}{m\,\Delta T} = 916$ Дж/(кг · К).

Работа расширения при постоянном давлении $A = p(V_2 - V_1)$, где V_1 и V_2 — начальный и конечный объемы газа. Уравнения состояния газа: до нагревания $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$, после нагревания $pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$. Вычитая из второго уравнения первое, найдем: $p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1)$, где $T_2 - T_1 = \Delta T$ — разность конечной и начальной температур. Отсюда $A = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = 2590$ Дж.

Подводимая к газу теплота идет на увеличение его внутренней энергии ΔU и на совершение работы A, т. е. $q = \Delta U + A$. Отсюда $\Delta U = q - A = 6570$ Дж.

513. $V = \frac{mp_0}{(p_1 - p_2)\rho_0} \approx 29{,}2$ л.

514. Уравнение состояния газа до выпускания газа из баллона $p_1V = \frac{m_1}{\mu}RT$, после выпускания $p_2V = \frac{m_2}{\mu}RT$. Здесь m_1 и m_2 — массы газа в баллоне, а p_1 и p_2 — его давление до и после выпускания соответственно. Разность этих выражений, учитывая, что $\Delta P = (m_1 - m_2)g$ и $\Delta p = p_1 - p_2$, можно записать в виде:

$$V\,\Delta p = \frac{\Delta P}{\mu g}RT, \text{ откуда } \frac{\mu}{RT} = \frac{\Delta P}{gV\,\Delta p}.$$

С другой стороны, плотность газа ρ_0 при давлении p_0 можно найти из уравнения состояния; получаем:

$$\rho_0 = p_0\frac{\mu}{RT} = \frac{p_0\,\Delta P}{gV\,\Delta p} \approx 3{,}7 \text{ кг/м}^3.$$

515. $\Delta p = \frac{p_0(P_2 - P_1)}{gV\rho_0} = 68$ кПа.

516. Если газ нагревается при постоянном объеме, то газ не совершает работу. Поэтому вся подводимая к газу теплота q идет на увеличение его внутренней энергии ΔU. Учитывая результаты, полученные при решении задачи 512, имеем: $q = \Delta U = 6570$ Дж.

В этом случае может быть найдена удельная теплоемкость кислорода при постоянном объеме: $c_V = \frac{q}{m\,\Delta t} = \frac{\Delta U}{m\,\Delta t} = 657$ Дж/(кг · К).

517. Из уравнения состояния находим массу кислорода:

$$m = \frac{\mu pV}{RT_1} = \frac{4\pi a^3\mu p}{3RT_1}; \qquad (1)$$

здесь $V = {}^4/_3\pi a^3$ — объем шара, $T_1 = 300$ К — начальная температура кислорода, $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная. Напишем уравнения теплового баланса для пустого шара и для шара с кислородом:

$$C_0 (T - T_1) = \lambda m_1, \quad (mc + C_0)(T - T_1) = \lambda m_2; \qquad (2)$$

здесь C_0 — теплоемкость пустого шара. Исключив из уравнений (2) величину C_0 и приняв во внимание соотношение (1), найдем:

$$c = \frac{3\lambda (m_2 - m_1) RT_1}{4\pi a^3 p (T - T_1) \mu} \approx 670 \text{ Дж/(кг · К)}.$$

518. $c = \dfrac{qRT_1}{(t_2 - t_1)\mu p V} \approx 660$ Дж/(кг · К); здесь $\mu = 0{,}032$ кг/моль — молярная масса кислорода, $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная.

519. Теплота q, сообщаемая газу, идет на увеличение его внутренней энергии ΔU и на совершение газом работы A, т. е. $q = \Delta U + A$. В первом случае при постоянном давлении p работа расширения газа $A = p(V_2 - V_1)$, где V_2 и V_1 — конечный и начальный объемы газа. Уравнения состояния газа до нагревания и после нагревания:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \quad pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, найдем: $p(V_2 - V_1) = \dfrac{m}{\mu} R\,\Delta T$, где $\Delta T = T_2 - T_1$ — разность конечной и начальной температур газа. Таким образом, в первом случае $q_p = \Delta U + \dfrac{m}{\mu} R\,\Delta T$. Во втором случае (при постоянном объеме) $A = 0$ и $q_V = \Delta U$. Следовательно,

$$q_p - q_V = \frac{m}{\mu} R\,\Delta T.$$

Удельная теплоемкость в первом и во втором случаях:

$$c_p = \frac{q_p}{m\,\Delta T}, \quad c_V = \frac{q_V}{m\,\Delta T}.$$

Разделив разность теплот $q_p - q_V$ на $m\,\Delta T$, получим:

$$c_p - c_V = R/\mu.$$

Таким образом, для газов имеется заметная разница в удельных теплоемкостях при постоянном давлении и при постоянном объеме. Для твердых и жидких тел, ввиду значительно меньшего коэффициента их объемного расширения, в большинстве случаев этой разницей можно пренебречь.

520. Внутренняя энергия идеального газа представляет собой кинетическую энергию его молекул, которая зависит только от температуры газа, но не зависит от расстояния между молекулами и, следовательно, от объема газа. При изотермическом процессе не меняется температура, поэтому внутренняя энергия остается постоянной. Следовательно, теплота, сообщаемая газу, должна быть равна работе, совершаемой газом, т. е. $q = A = 20$ Дж.

521. Так как газ находится в цилиндре, изолированном от потока внешнего тепла, то газ совершает работу только за счет уменьшения ΔU своей внутренней энергии. Поэтому $\Delta U = A = 4470$ Дж. С другой стороны, как показано в решении задачи 519, к состоянию газа с той же конечной температурой

можно прийти, если уменьшить его внутреннюю энергию на ту же величину ΔU, отнимая у него количество теплоты $q_V = mc_V(t_1 - t_2)$ при постоянном объеме. Таким образом, $\Delta U = mc_V(t_1 - t_2)$. Отсюда $t_2 = t_1 - \frac{\Delta U}{mc_V} = -10\,^\circ\text{C}$.

522. В решении задачи 519 найдено, что при изменении температуры газа на одну и ту же величину ΔT при постоянном объеме и при постоянном давлении разность полученных теплот $q_p - q_V = \frac{m}{\mu} R\,\Delta T$. Отсюда

$$q_V = q_p - \frac{m}{\mu} R\,\Delta T = 2 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

523. Теплота $q = cm\,\Delta T$ при нагревании воды идет на увеличение ΔU ее внутренней энергии и на совершение при тепловом расширении воды работы $A = p_0\,\Delta V = p_0 \alpha V_0\,\Delta T$ против сил атмосферного давления. Здесь $p_0 \approx 0{,}1$ МПа — атмосферное давление, $V_0 \approx 10^{-3}$ м^3 — первоначальный объем воды и $\alpha \approx \approx 2 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$ — коэффициент теплового расширения воды (при температуре около 20 °С). При этих данных $A \approx 2 \cdot 10^{-2}$ Дж, в то время как $q = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж, т. е. при обычных условиях $q \gg A$. Поэтому можно считать, что $q = \Delta U$.

В одном моле содержится N_A молекул ($N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$). Вода с массой m содержит $n = \frac{m}{\mu} N_A$ молекул. Таким образом, на одну молекулу приходится увеличение внутренней энергии $\Delta U_0 = \Delta U / n = 1{,}26 \cdot 10^{-22}$ Дж.

524. $q = 2\mu c_V T_1 = 1{,}15 \cdot 10^7$ Дж.

525. $q = mc_p\,\Delta T = mc_p T_1 = 1{,}49 \cdot 10^3$ Дж.

526. Уравнения состояния газа до нагревания и после нагревания:

$$p_1 V = \frac{m}{\mu} RT_1, \quad p_2 V = \frac{m}{\mu} RT_2,$$

где p_1 и p_2 — начальное и конечное давление, T_1 и T_2 — начальная и конечная температура, m — масса газа. Вычитая из второго уравнения первое, найдем:

$$V\,\Delta p = V(p_2 - p_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1); \quad \text{отсюда} \quad T_2 - T_1 = \frac{\mu V\,\Delta p}{mR}.$$

Количество теплоты, сообщенной газу при постоянном объеме:

$$q = mc_V(T_2 - T_1) = \frac{\mu c_V V\,\Delta p}{R} = 1{,}65 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

527. $A = \frac{mp_0\,\Delta T}{\rho_0 T_0} = 84{,}5$ кДж, где $p_0 = 0{,}1$ МПа и $T_0 = 273$ К — нормальные давление и температура.

528. Давление газа в цилиндре постоянно и равно $p = p_0 + \frac{P}{S}$. Работа, совершаемая газом при расширении при постоянном давлении, $A = p(V_2 - V_1)$, где V_2 — конечный объем газа. По закону Гей-Люссака

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}; \quad \text{отсюда} \quad V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} \quad \text{и} \quad V_2 - V_1 = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1} V_1.$$

Таким образом,

$$A = \left(p_0 + \frac{P}{S}\right) \frac{\Delta T}{T_1} V_1 = 20 \text{ Дж}.$$

529. График изменения состояния в координатах p, V приведен на рис. 318. Процесс (*1 — 2*) — нагревание при постоянном объеме; температура увеличивается, теплота поглощается газом, работы газ не совершает. Процесс (*2 — 3*) — изобарное расширение; температура увеличивается (точка *3* лежит на изотерме, соответствующей большей температуре, чем изотерма, на которой лежит точка *2*), теплота поглощается, газ совершает работу. Процесс (*3 — 4*) — изотермическое расширение; температура остается постоянной, теплота поглощается, газ совершает работу. Процесс (*4 — 1*) — изобарное сжатие; температура уменьшается (изотерма, на которой лежит точка *4*, соответствует более высокой температуре, чем изотерма, на которой лежит точка *1*), теплота газом выделяется (передается окружающим телам), работа сжатия совершается над газом внешними телами (работа — отрицательная).

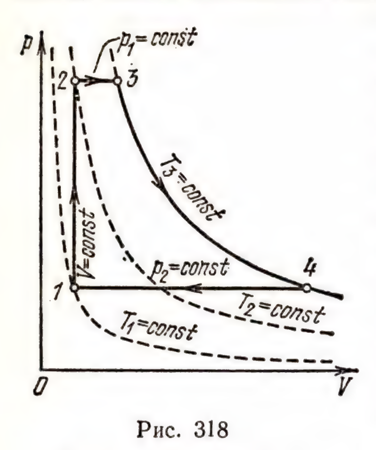


Рис. 318

Графики изменения состояния в координатах p, T и V, T приведены на рис. 319 и 320.

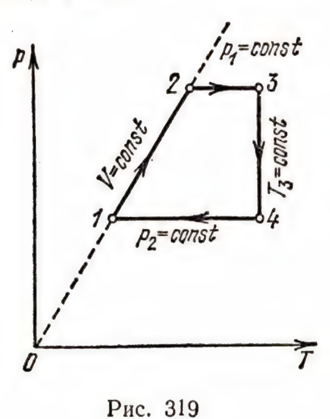


Рис. 319

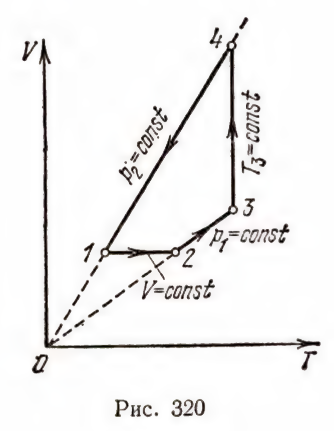


Рис. 320

530. При переходе между состояниями *1* и *2* газ работы не совершает, так как его объем не изменяется (поршень неподвижен). При переходе между состояниями *2* и *3* работа газа $A = p_2(V_3 - V_2)$. Давление p_2 при этом постоянно, а объем меняется от V_2 до V_3. Величины p_2, V_2 и V_3 определяются из уравнений процессов: изохорного (*1 — 2*) $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ и $V_1 = V_2$ и изобарного (*2 — 3*) $\frac{V_2}{V_3} = \frac{T_2}{T_3}$. Отсюда найдем:

$$A = p_1 V_1 \frac{T_3 - T_2}{T_1} = 100 \text{ Дж}.$$

531. $A = p_0 (V - V_1) = p_0 \left(V - \frac{m}{\rho}\right) \approx 167$ Дж, где $p_0 = 100$ кПа — давление насыщенного водяного пара при температуре $t = 100\,^\circ$C, равное нормальному атмосферному давлению, а V_1 — объем сконденсировавшейся воды.

532. Внутренняя энергия идеального газа представляет собой кинетическую энергию его молекул. Она пропорциональна его абсолютной температуре и количеству молекул. Таким образом, внутренняя энергия газа в первом цилиндре $U_1 = kn_1T_1$, газа во втором цилиндре $U_2 = kn_2T_2$ и газа в цилиндрах после смешивания $U = k(n_1 + n_2)\vartheta$. Здесь k — коэффициент пропорциональности, зависящий от природы газа, n_1 — число киломолей газа в первом цилиндре и n_2 — число киломолей во втором цилиндре. Согласно закону сохранения энергии $U_1 + U_2 = U$ и, следовательно, $n_1T_1 + n_2T_2 = (n_1 + n_2)\vartheta$. Из уравнений состояния для газов до смешивания найдем: $n_1 = \frac{p_1V_1}{RT_1}$, $n_2 = \frac{p_2V_2}{RT_2}$. Подставив значения n_1 и n_2 в предыдущее равенство, получим:

$$\frac{p_1V_1}{R} + \frac{p_2V_2}{R} = \left(\frac{p_1V_1}{RT_1} + \frac{p_2V_2}{RT_2}\right)\vartheta.$$

Таким образом,

$$\vartheta = \frac{T_1T_2(p_1V_1 + p_2V_2)}{p_1V_1T_2 + p_2V_2T_1} = 366 \text{ К, или } 93\,^\circ\text{C}.$$

Из уравнения состояния для смеси $p(V_1 + V_2) = (n_1 + n_2)R\vartheta$, используя найденные ранее значения для n_1, n_2 и ϑ, получим: $p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 525$ кПа (ср. решение задачи 442).

§ 17. Свойства паров

533. Изотермы показаны на рис. 321. Рассмотрим ход изотермы $T_1 = \text{const}$. При подъеме поршня давление на жидкость убывает. Объем же жидкости от давления почти не зависит (жидкости практически несжимаемы). Поэтому пока под поршнем находится только жидкость, участок ab изотермы практически совпадает с изохорой. Когда давление в цилиндре становится равным давлению насыщенных паров при температуре T_1 (давление p_b), в цилиндре кроме жидкости появляется насыщенный пар. Давление насыщенного пара не зависит от его объема. Поэтому при дальнейшем увеличении объема изотерма совпадает с изобарой (участок bc) до тех пор, пока вся жидкость в цилиндре не превратится в пар (при объеме V_c). При дальнейшем увеличении объема пар становится ненасыщенным, и зависимость его давления от объема подчиняется закону Бойля — Мариотта.

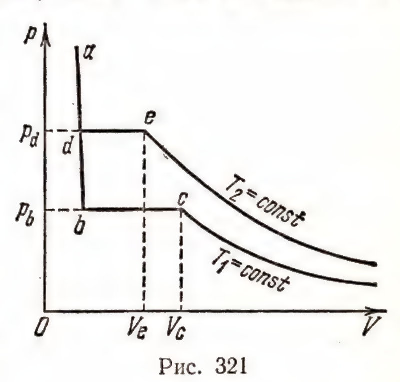


Рис. 321

При температуре T_2 ход изотермы такой же, но так как давление и плотность насыщенного пара при этой температуре больше, то полное испарение жидкости произойдет при объеме V_e, меньшем, чем V_c.

534. Давление, оказываемое паром на стенки сосуда, обусловлено ударами молекул о стенки. Как показано в решении задач 505 и 506, оно пропорционально кинетической энергии молекул и числу молекул в единице объема. Средняя кинетическая энергия молекул газа (или пара) пропорциональна абсолютной температуре (см. введение к § 16), в то время как число молекул насыщенного пара в единице объема возрастает при повышении температуры.

Линия *abd* на рис. 67 на участке *ab* совпадает с зависимостью давления насыщенных паров от температуры, на участке же *bd* представляет собой отрезок прямой, проходящей через начало координат. Такой ход объясняется тем, что при температуре T_b вся жидкость, бывшая в сосуде вместе с насыщенным паром, превратилась в пар. Далее же происходит, согласно закону Шарля, изохорное увеличение давления.

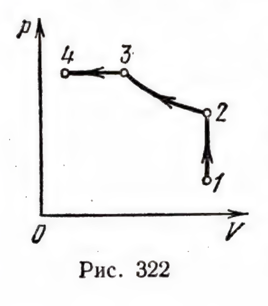


Рис. 322

Линия *abce* представляет собой такой же процесс, но при большей общей массе жидкости и пара в сосуде.

Температура $T_к$ — критическая температура. Говорить о парах при температуре выше критической нет смысла. Поэтому все линии обрываются при этой температуре.

535. График приведен на рис. 322. Участок *1—2* — изохорное увеличение давления при нагревании. Участок *2—3* — изотермическое сжатие ненасыщенного пара, происходящее согласно закону Бойля — Мариотта до насыщения пара (до начала его сжижения). Участок *3—4* — изотермическое сжатие насыщенного пара (происходит сжижение, а давление остается постоянным).

536. Число молекул вещества при заданной его массе не зависит от состояния, если не происходит химических реакций. Число молей вещества с массой m равно m/μ, где μ — молярная масса вещества. Число молекул в одном моле равно N_A. Следовательно, при массе m число молекул $n=\frac{m}{\mu}N_A$.

При $m=1$ кг число молекул паров ртути $n_1=\frac{m}{\mu_1}N_A=3\cdot10^{24}$, число молекул водяных паров $n_2=\frac{m}{\mu_2}N_A=3{,}3\cdot10^{25}$.

537. При температуре $t=4\,°C$ плотность воды $\rho_1=10^3$ кг/м³. Плотность пара можно найти при помощи уравнения состояния: $\rho_2=\mu p/RT$. Отсюда

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\rho_1 RT}{\mu p}=1{,}6\cdot10^5.$$

Число молекул в моле $N_A=6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$. В единице объема содержится ρ_1/μ молей и, следовательно, $(\rho_1/\mu)N_A$ молекул. На каждую молекулу воды приходится объем

$$V_1=\frac{\mu}{\rho_1 N_A}=3\cdot10^{-29}\ \text{м}^3.$$

На каждую молекулу пара приходится объем

$$V_2 = \frac{\mu}{\rho_2 N_A} = \frac{RT}{pN_A} = 4{,}8 \cdot 10^{-24} \text{ м}^3.$$

538. Согласно уравнению состояния $pV = \frac{m}{\mu} RT$ плотности газов и паров при постоянной температуре пропорциональны их давлениям. Поэтому

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2} \approx 0{,}45.$$

539. Масса паров, необходимая для насыщения объема котла при температуре $t = 180\,°\text{C}$, составляет $m = V\rho = 25{,}25$ кг. Так как $m > m_1$, то вся вода превратилась в ненасыщенный пар. Следовательно, $m_2 = m_1 = 20$ кг. Из уравнения состояния находим давление:

$$p = \frac{m_2 RT}{\mu V} = 0{,}84 \text{ МПа}.$$

540. В сосуде до увеличения его объема содержался пар с массой $m_1 = \rho V = 8 \cdot 10^{-3}$ кг (объемом, занимаемым водой, можно пренебречь). Масса воды и пара была $m + m_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ кг. Для насыщения объема kV необходима масса пара $m_2 = \rho kV = 4 \cdot 10^{-2}$ кг. Так как $m + m_1 < m_2$, то после увеличения объема пар будет ненасыщенным. Его плотность $\rho_1 = (m + m_1)/kV$. Давление при данной температуре пропорционально плотности. Поэтому

$$p_1 = \frac{p}{\rho}\,\rho_1 = \frac{p\,(m + m_1)}{\rho kV} = 0{,}55 \text{ кПа}.$$

541. Давление оставалось постоянным, пока под колоколом был насыщенный водяной пар, плотность которого $\rho = \mu p/RT$. За время τ был откачан объем $V = v\tau$, в котором содержались пары с массой $m = V\rho = \frac{\mu p v \tau}{RT} = 0{,}279$ кг.

542. Насыщенный пар при давлении p и массе m согласно уравнению состояния должен занимать объем $V = mRT/\mu p$. Следовательно,

$$V_2 = V - V_1 = \frac{mRT}{\mu p} - V_1 = -0{,}29 \text{ м}^3$$

(знак минус показывает, что объем должен быть уменьшен).

543. $p_1 = \frac{4FT}{\pi d^2\,[T + (q/mc)]} \approx 1$ МПа.

544. Давление смеси гелия и водяных паров в трубке $p = p_0 - \rho g x$. По закону парциальных давлений Дальтона это давление складывается из давления водяных паров p_1 и давления гелия p_2. Отсюда $p_2 = p_0 - p_1 - \rho g x$. Из уравнений состояния найдем массу гелия m_1 и массу водяных паров m_2:

$$m_1 = \frac{\mu_1 p_2 V}{RT} = \frac{\mu_1 (p_0 - p_1 - \rho g x)\, V}{RT} = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ кг}, \quad m_2 = \frac{\mu_2 p_1 V}{RT} = 4{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ кг}.$$

545. Если бы в цилиндре были только пары воды массой m_0 и все они сконденсировались бы, то объем образовавшейся воды (около 0,3 л $\approx 3 \cdot 10^{-4}$ м^3) был бы мал по сравнению с объемом $V_2 = V_1/n = 0{,}33$ м^3, оставшимся под поршнем после сжатия. Поэтому можно считать, что весь объем цилиндра

после сжатия занят смесью азота и паров воды, причем парциальное давление паров p_1 во время сжатия не изменилось. Из уравнения состояния находим массу m_1 насыщенных паров до сжатия и их массу m_2 после сжатия:

$$m_1 = \frac{p_1 V_1 \mu_1}{RT}, \quad m_2 = \frac{p_1 V_2 \mu_1}{RT} = \frac{p_1 V_1 \mu_1}{nRT}.$$

Отсюда масса сконденсировавшихся паров

$$m = m_1 - m_2 = \frac{p_1 V_1 \mu_1 (n-1)}{nRT} = 0{,}020 \text{ кг}.$$

Масса азота в цилиндре

$$m_3 = m_0 - m_1 = \frac{m_0 RT - p_1 V_1 \mu_1}{RT}.$$

Из уравнения состояния находим парциальное давление азота до сжатия:

$$p_2 = \frac{m_3 RT}{\mu_2 V_1} = \frac{m_0 RT - p_1 \mu_1 V_1}{\mu_2 V_1}.$$

Давление смеси до сжатия складывается из парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{p_1 V_1 (\mu_2 - \mu_1) + m_0 RT}{\mu_2 V_2} = 27{,}2 \text{ кПа}.$$

546. Влажный пар с массой m_1 отдает количества теплоты: 1) при охлаждении входящей в его состав воды до температуры конденсации $q_1 = c_1 m_1 n (t_0 - t_2)$; 2) при охлаждении сухого (за вычетом капелек воды) пара до той же температуры $q_2 = c_2 m_1 (1-n)(t_0 - t_2)$; 3) при конденсации пара $q_3 = \lambda m_1 (1-n)$; 4) при охлаждении образовавшейся из пара воды (включая и бывшие в нем капельки) от температуры конденсации до температуры смеси $q_4 = m_1 c_1 (t_2 - \vartheta)$. Холодная вода с массой m_2 получает количество теплоты $q_5 = c_1 m_2 (\vartheta - t_1)$. Согласно уравнению теплового баланса $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = q_5$. Отсюда масса холодной воды, приходящаяся на единицу массы пара,

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{[c_1 n + c_2 (1-n)](t_0 - t_2) + \lambda (1-n) + c_1 (t_2 - \vartheta)}{c_1 (\vartheta - t_1)} = 24.$$

547. $m = \dfrac{m_1 c (t_1 - t_2)}{\lambda} = 0{,}37$ кг; здесь $t_2 = 100\ ^\circ\text{C}$ — температура кипения.

548. Объемом, который занимает в сосуде лед, можно пренебречь. Из уравнения состояния найдем, что при температуре t_1 масса паров $m_1 = V p_1 \mu / RT_1$ и при температуре t_2 их масса $m_2 = V p_2 \mu / RT_2$. Масса испарившегося льда

$$m_3 = m_2 - m_1 = \frac{V\mu}{R}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right).$$

Масса оставшегося льда

$$m_4 = m - m_2 = \frac{mRT_2 - V p_2 \mu}{RT_2}.$$

Количество теплоты, необходимой: 1) для испарения льда $q_1 = m_3 (r + \lambda)$; 2) для нагревания пара $q_2 = m_2 c_2 (t_2 - t_1)$; 3) для нагревания оставшегося льда $q_3 = m_4 c_1 (t_2 - t_1)$. Полное количество теплоты

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = \\ = \frac{\mu V (r+\lambda)}{R}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right) + \left[\frac{\mu V p_2 (c_2 - c_1)}{RT_2} + mc_1\right](t_2 - t_1) = 3920 \text{ Дж}.$$

549. Давление насыщенных паров при постоянной температуре не зависит от объема. При температуре $t = 100\,°C$ оно равно нормальному атмосферному давлению $p_0 = 100$ кПа. При сжатии при постоянном давлении работа $A = p_0(V_1 - V_2) = 1$ кДж.

550. При перемещении поршня объем цилиндра изменился на величину $V_2 - V_1 = Sl$. При равномерном убывании давления можно взять среднее значение давления $p = (p_1 + p_2)/2$ и затем величину работы вычислить как при постоянном давлении:

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\,Sl = 14{,}4 \text{ кДж}.$$

График зависимости давления от объема (рис. 323) при равномерном убывании давления от p_1 до p_2 изображается отрезком прямой ab. Площадь трапеции abV_2V_1 с основаниями $aV_1 = p_1$ и $bV_2 = p_2$ и высотой $V_2 - V_1 = Sl$ численно равна работе A.

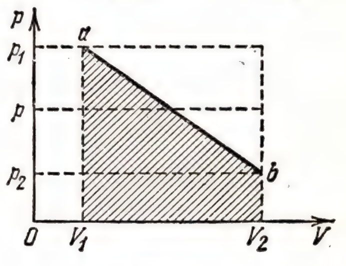


Рис. 323

551. $h = (p - p_1)/\rho g \approx 12{,}5$ м.

552. $\rho = \mu p/RT = 0{,}091$ кг/м³.

553. Плотность насыщенных паров при температуре $t_2 = 20\,°C$ равна $\rho = \mu p_2/RT = 0{,}0173$ кг/м³. Эта величина больше, чем ρ_1. Поэтому при охлаждении до температуры t_2 насыщение не будет достигнуто, конденсация не начнется, и содержание водяных паров в единице объема воздуха останется прежним, т. е. $\rho_2 = \rho_1 = 0{,}005$ кг/м³.

554. При температуре $t_2 = 10\,°C$ плотность насыщенных паров $\rho = \mu p_2/RT_2 = 0{,}0094$ кг/м³. Эта величина меньше, чем ρ_1. Поэтому при охлаждении до температуры t_2 часть паров сконденсируется, и абсолютная влажность будет определяться плотностью насыщенных паров: $\rho_2 = \rho = 0{,}0094$ кг/м³.

555. При температуре t_1 абсолютная влажность (до сжатия) $\rho_1 = f_1\rho$. После сжатия масса влаги на единицу объема сосуда (не только в виде паров, но и в виде сконденсировавшейся жидкости, если возникли условия для конденсации) $\rho_2 = nf_1\rho = 1{,}69 \cdot 10^{-2}$ кг/м³. При температуре $t_2 = 100\,°C$ давление насыщенных паров равно нормальному атмосферному давлению $p_0 = 100$ кПа и их плотность $\rho_3 = \mu p_0/RT_2 = 0{,}58$ кг/м³. Так как $\rho_3 > \rho_2$, то в сосуде будет ненасыщенный пар с относительной влажностью

$$f_2 = \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{nf_1\rho RT_2}{\mu p_0} = 2{,}9 \cdot 10^{-2} = 2{,}9\%.$$

556. $\rho_1 = \dfrac{(\mu_2 p - \rho RT)\,\mu_1}{RT\,(\mu_2 - \mu_1)} \approx 0{,}0131$ кг/м³; $f = \dfrac{\rho_1}{\rho_0} \approx 0{,}485 = 48{,}5\%$.

557. Необходимо испарить массу воды $m = (f_2 - f_1)\,\rho V = 0{,}208$ кг.

558. $\rho = \dfrac{mf_2}{(f_2 - f_1)\,V} = 6 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

559. Плотность сухого воздуха $\rho_1 = \mu_1 p_0/RT$. При относительной влажности f плотность водяных паров $\rho' = f\rho_0 = \mu_2 p_2/RT$, где p_2 — парциальное давление паров. Отсюда $p_2 = f\rho_0 RT/\mu_2$. Так как давление влажного воздуха p_0

складывается из парциальных давлений паров p_2 и воздуха p_1, то

$$p_1 = p_0 - p_2 = p_0 - \frac{f\rho_0 RT}{\mu_2}.$$

Плотность воздуха (без паров) при этом парциальном давлении

$$\rho'' = \frac{\mu_1 p_1}{RT} = \frac{\mu_1 p_0}{RT} - \frac{\mu_1 f\rho_0}{\mu_2}.$$

Плотность влажного воздуха

$$\rho_2 = \rho' + \rho'' = \frac{\mu_1 p_0}{RT} - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) f\rho_0.$$

Отношение плотностей влажного и сухого воздуха

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \frac{(\mu_1 - \mu_2)\, f\rho_0 RT}{\mu_1 \mu_2 p_0} \approx 0{,}987.$$

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

§ 18. Закон Кулона. Поверхностная плотность электрических зарядов

560. По закону Кулона $q = r\sqrt{F} = 600\sqrt{10^4} = 6 \cdot 10^4$ ед. заряда СГСЭ, или

$$q = r\sqrt{4\pi\varepsilon_0\varepsilon F} = 6\sqrt{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 0{,}1} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

561. 1 ед. заряда СГСЭ $= \frac{1}{3 \cdot 10^9}$ Кл. Следовательно,

$$N = \frac{1}{3 \cdot 10^9} : e = 2{,}08 \cdot 10^9 \text{ электронов}.$$

562. $l = x(2 + \sqrt{2}) \approx 171$ см.

563. $r = \sqrt{\frac{|q_1 q_2|}{T - mg}} = 1{,}8$ см.

564. Положительные заряды q могут быть расположены как по обе стороны от отрицательного заряда Q, так и по одну сторону от него. В первом случае отношение сил

$$F_1' : F = \frac{17}{16} \cdot \frac{qQ}{r^2} : \frac{8qQ}{9r^2} \approx 1{,}2.$$

Во втором

$$F_2' : F = \frac{3}{4} \cdot \frac{qQ}{r^2} : \left(\frac{10}{9} \cdot \frac{qQ}{r^2}\right) = 0{,}675.$$

Здесь r — расстояние от заряда Q до ближайшего положительного заряда q.

565. Будем обозначать силы буквой F с двумя индексами, из которых первый показывает, на какой заряд действует сила, а второй — со стороны какого заряда она действует (например, F_{01} — сила, действующая на заряд q_0 со стороны заряда q_1). Возьмем в качестве координатной оси OX прямую, проходящую через заряды q_1 и q_2. За начало отсчета O примем точку, где находится заряд q_1, а за положительное направление — направление от заряда q_1 к заряду q_2 (рис. 324). Закон Кулона (в нашей записи) не дает возможности определить направление силы. Например, обе силы F_{12} и F_{21}, найденные из закона Кулона с учетом знаков зарядов q_1 и q_2, имеют положительный знак, в то время как, согласно третьему закону Ньютона, направления их противоположны. Поэтому мы по закону Кулона будем определять лишь

абсолютную величину силы, а знак силы считать положительным, если сила направлена в положительном направлении оси OX, и отрицательным в противном случае.

На каждый из трех зарядов действуют со стороны двух других по две силы. Для равновесия необходимо, чтобы эти две силы были противоположными по направлению. Легко видеть, что это условие выполняется лишь

Рис. 324

в том случае, когда заряд q_0 находится на оси OX между зарядами q_1 и q_2 и имеет противоположный по сравнению с q_1 и q_2 знак. Пусть расстояние между зарядами q_1 и q_0 равно x $(0 < x < r)$. Тогда (см. рис. 324):

1) на q_0 действуют силы $F_{01} = -\left|\dfrac{q_0 q_1}{x^2}\right|$ и $F_{02} = \left|\dfrac{q_0 q_2}{(r-x)^2}\right|$;

2) на q_1 действуют силы $F_{10} = \left|\dfrac{q_1 q_0}{x^2}\right|$ и $F_{12} = -\left|\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\right|$;

3) на q_2 действуют силы $F_{20} = -\left|\dfrac{q_2 q_0}{(r-x)^2}\right|$ и $F_{21} = \left|\dfrac{q_2 q_1}{r^2}\right|$.

При равновесии всех трех зарядов

$$F_{01} + F_{02} = 0, \qquad (1)$$

$$F_{12} + F_{10} = 0, \qquad (2)$$

$$F_{21} + F_{20} = 0. \qquad (3)$$

Условие (1) приводит к квадратному уравнению относительно x:

$$x^2 + \frac{2r\,|q_1|}{|q_2| - |q_1|}\,x - \frac{r^2\,|q_1|}{|q_2| - |q_1|} = 0.$$

Для корней этого уравнения

$$x_{1,\,2} = \frac{-|q_1| \pm \sqrt{|q_1| \cdot |q_2|}}{|q_2| - |q_1|}\,r$$

выполняются условия: $0 < x_1 < r$ в любом случае, $x_2 < 0$ при $|q_2| > |q_1|$ и $x_2 > r$ при $|q_2| < |q_1|$. Второй корень должен быть отброшен, как не удовлетворяющий условиям равновесия. Таким образом,

$$x = x_1 = \frac{\sqrt{|q_1| \cdot |q_2|} - |q_1|}{|q_2| - |q_1|}\,r = 1 \text{ м}.$$

Условие (2) дает: $\dfrac{|q_0 q_1|}{x^2} = \dfrac{|q_1 q_2|}{r^2}$. Отсюда

$$|q_0| = \frac{|q_2|\,x^2}{r^2} = \frac{|q_2|\left(\sqrt{|q_1| \cdot |q_2|} - |q_1|\right)^2}{(|q_2| - |q_1|)^2} = 4 \text{ ед. заряда СГСЭ}.$$

566. Равнодействующая сил F_1 и F_2 (рис. 325) $F_0 = \dfrac{2q^2}{a^2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$, отсюда $a = 0{,}83$ см.

567. На рис. 326 показаны силы, действующие на заряд q_1 со стороны зарядов q_2 и q_3, а также со стороны q_0. Ввиду равенства зарядов $q_1 = q_2 = q_3 = q$ получаем: $q_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} q = 5{,}2$ ед. заряда СГСЭ. На заряд q_0 действуют три равные по величине силы, равнодействующая которых равна нулю.

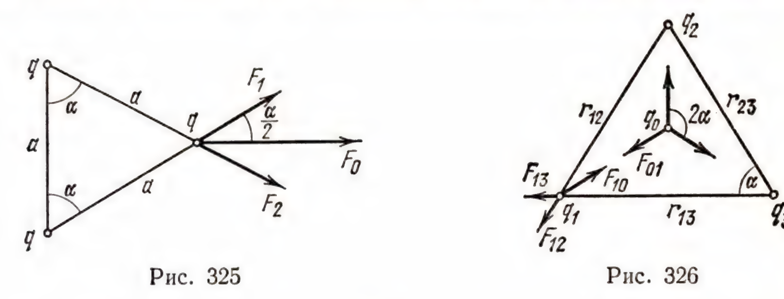


Рис. 325

Рис. 326

568. Каждый заряд взаимодействует с тремя другими зарядами q, два из которых находятся на расстоянии a от рассматриваемого заряда, а один — на расстоянии $R = a/\cos\alpha = a\sqrt{2}$ (рис. 327). Поэтому на любой заряд действуют три силы: $F_1 = F_3 = q^2/a^2$ и $F_2 = q^2/(\sqrt{2}a)^2$, векторная сумма которых имеет величину

$$F = 2F_1 \cos\alpha + F_2 = \frac{\sqrt{2}\, q^2}{a^2} + \frac{q^2}{2a^2} = 1{,}91 \text{ дин}$$

и направлена по диагонали квадрата от его центра.

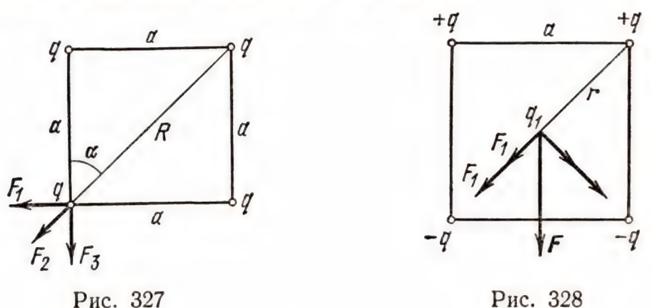


Рис. 327

Рис. 328

569. На заряд q_1 действуют четыре силы, направленные попарно по двум диагоналям квадрата, как показано на рис. 328, и равные по величине $F_1 = q_1 q/r^2$, где $r = a/\sqrt{2}$ — половина диагонали квадрата. Равнодействующая этих сил

$$F = 4F_1 \cos\alpha = 4\sqrt{2} \text{ дин} = 5{,}65 \cdot 10^{-5} \text{ Н};$$

здесь $\alpha = 45°$ — угол между диагональю и направлением равнодействующей.

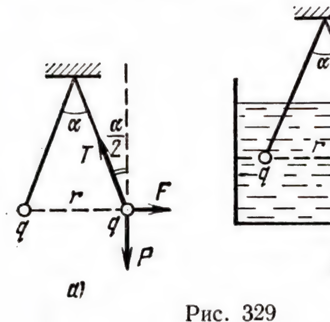
570. После соприкосновения шарика B с шариком A шарик B будет подниматься вверх до тех пор, пока не наступит равновесие силы тяжести и силы Кулона: $(0{,}5q)^2/h^2 = mg$. Отсюда $h = 3$ см.

571. $\frac{q}{m}=\frac{\omega^2R^3}{q_0}=40$ ед. заряда СГСЭ/г $=1{,}33\cdot10^{-5}$ Кл/кг.

572. $q=m\sqrt{\gamma}=2{,}58\cdot10^{-3}$ ед. заряда СГСЭ. В системе единиц СИ $q=2m\sqrt{\pi\varepsilon_0\gamma}=8{,}6\cdot10^{-13}$ Кл, где $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

573. Сила взаимодействия зарядов в пустоте $F=\frac{q_1q_2}{r^2}=16$ дин $=1{,}6\cdot10^{-4}$ Н, в керосине $F_1=\frac{q_1q_2}{\varepsilon r^2}=\frac{F}{\varepsilon}=8$ дин $=8\cdot10^{-5}$ Н. Заряды отталкиваются.

Следует отметить, что силы, приложенные к различным по величине зарядам, равны по величине и противоположны по направлению. На экзаменах нередко ошибаются, утверждая, что к большему заряду приложена бóльшая сила. Это противоречит не только закону Кулона, но и третьему закону Ньютона.



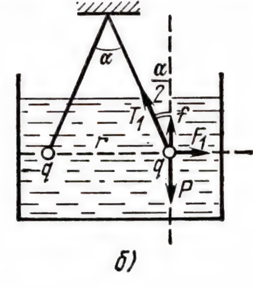


Рис. 329

574. $\varepsilon=F_1r_1^2/F_2r_2^2=2$.

575. $r_1=r_2/\sqrt{\varepsilon}=17{,}3$ см.

576. На рис. 329, *а* обозначены силы, действующие на шарики до погружения их в керосин; сила тяжести $P=mg$, сила натяжения нити T, сила Кулона $F=q^2/r^2$ (здесь m — масса шарика, q — его заряд и r — расстояние между шариками). При равновесии сил имеем (см. введение к § 6):

$$T\cos\frac{\alpha}{2}-P=0 \quad \text{и} \quad F-T\sin\frac{\alpha}{2}=0. \tag{1}$$

При погружении шариков в керосин сила Кулона $F_1=q^2/\varepsilon r^2$. Архимедова сила $f=mg\rho_1/\rho$ (направлена вверх, рис. 329, *б*). Условие равновесия сил:

$$T_1\cos\frac{\alpha}{2}+f-P=0 \quad \text{и} \quad F_1-T_1\sin\frac{\alpha}{2}=0. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) получаем:

$$\rho=\frac{\varepsilon\rho_1}{\varepsilon-1}=1{,}6 \text{ г/см}^3.$$

577. $\varepsilon=\frac{\rho}{\rho-\rho_1}$ (см. задачу 576).

578. О записи закона Кулона в различных системах единиц см. введение к § 18. Электрическую постоянную $\varepsilon_0=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon r^2F}$ определим, подставляя в эту формулу значения силы $F=1$ дин, расстояния $r=1$ см и зарядов $q_1=q_2=1$ ед. заряда СГСЭ, выраженные в единицах системы СИ, при $\varepsilon=1$ (вакуум). Учитывая, что 1 дин $=10^{-5}$ Н, 1 см $=10^{-2}$ м, 1 ед. заряда СГСЭ $=\frac{1}{3\cdot10^9}$ Кл, получим: $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2).

Проведя ряд преобразований, можно наименование ε_0 выразить в принятом в СИ виде:

$$1\ \text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)=1\ \text{Кл}^2/(\text{Дж}\cdot\text{м})=1\ \text{Кл}^2/(\text{Кл}\cdot\text{В}\cdot\text{м})=1\ \text{Кл}/(\text{В}\cdot\text{м})=1\ \text{Ф/м}.$$

Здесь учтено, что 1 Н · м = 1 Дж = 1 Кл · В и 1 Кл/В = 1 Ф.

Таким образом, окончательно

$$\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}.$$

579. Пусть величины зарядов q_1, q_2 и q_3. Тогда по закону Кулона

$$F_{12}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2},\qquad F_{13}=\frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}^2}\qquad \text{и}\qquad F_{23}=\frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}^2}.$$

Исключая из этих уравнений q_1 и q_2, найдем:

$$q_3=\frac{r_{13}r_{23}}{r_{12}}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 F_{13}F_{23}}{F_{12}}}.$$

580. Сила взаимодействия точечных зарядов величиной 1 Кл в пустоте в системе единиц СИ $F=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=3{,}6\cdot 10^4$ Н. Эта сила довольно велика: она приблизительно равна силе, с которой притягивается к Земле тело массой 3500 кг.

581. На каждый шарик действуют силы: натяжения нити T, тяжести P и кулоновского отталкивания $F=q^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$, где $r=2l\sin\alpha$ (рис. 330). При

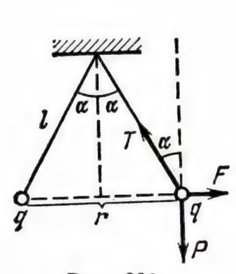


Рис. 330

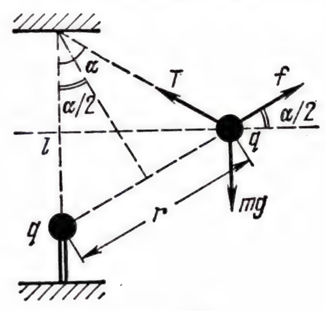


Рис. 331

равновесии шарика суммы проекций сил на вертикальное и горизонтальное направления равны нулю (ср. решение задачи 576):

$$T\cos\alpha-P=0,\quad F-T\sin\alpha=0.$$

Исключая T из этих уравнений и учитывая выражения для F и r, получим:

$$P=\frac{q^2\cos\alpha}{16\pi\varepsilon_0 l^2\sin^3\alpha}=6{,}2\cdot 10^{-2}\ \text{Н}.$$

582. На отклоненный шарик действуют силы: тяжести mg, кулоновского отталкивания f и натяжения нити T (рис. 331). При равновесии суммы проекций сил на горизонтальное и вертикальное направления равны нулю, т. е.

$$f\cos\frac{\alpha}{2}-T\sin\alpha=0\quad \text{и}\quad f\sin\frac{\alpha}{2}+T\cos\alpha-mg=0.$$

Исключая T из этих уравнений, находим:

$$f=\frac{mg\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos(\alpha/2)+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\sin(\alpha/2)}.$$

При помощи известной формулы $\operatorname{ctg}(\alpha/2)=\sin\alpha/(1-\cos\alpha)$ получаем:

$$f=\frac{mg\,(1-\cos\alpha)}{\sin(\alpha/2)}.$$

Как видно из рисунка, расстояние между шариками $r=2l\sin(\alpha/2)$. Следовательно, $f=\frac{q^2}{r^2}=\frac{q^2}{4l^2\sin^2(\alpha/2)}$. Отсюда

$$q=2l\sqrt{mg\,(1-\cos\alpha)\sin(\alpha/2)}=l\sqrt{mg}=$$
$$=1{,}4\cdot 10^3 \text{ ед. заряда СГСЭ.}$$



Рис. 332

583. Заряд шарика q полностью перейдет на внешнюю поверхность большого шара и распределится по ней равномерно. Поэтому поверхностная плотность заряда шара

$$\sigma=\frac{q}{S}=\frac{q}{4\pi R^2}=$$
$$=1{,}01\cdot 10^{-2} \text{ ед. заряда СГСЭ/см}^2=$$
$$=3{,}35\cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2.$$

584. При внесении шарика с зарядом q внутрь полого проводящего шара на внешней поверхности шара появляются индуцированные заряды того же знака, что и q, а на внутренней — противоположного знака (рис. 332). Поверхностная плотность

$$\sigma=\frac{q}{S}=\frac{q}{4\pi R^2}=1{,}01\cdot 10^{-2} \text{ ед. заряда СГСЭ/см}^2.$$

При смещении шарика электрическое поле внутри полости будет меняться, но это не скажется на распределении индуцированных зарядов по внешней поверхности шара и их плотность будет прежней.

§ 19. Электрическое поле

Напряженность электрического поля

585. Напряженность электрического поля точечного заряда $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$; отсюда $r=\sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E}}=2{,}1$ м.

586. Заряд q, находящийся в центре, индуцирует на внутренней поверхности полости суммарный заряд $-q$, а на внешней поверхности шара — заряд $+q$ (см. решение задачи 584). Индуцированные заряды ввиду симметрии распределены равномерно. Снаружи шара электрическое поле будет таким же, как поле точечного заряда, величина которого равна сумме всех зарядов: находящегося в центре и индуцированных, т. е. как поле точечного заряда q. Следовательно,

$$E_2=q/R^2=2{,}5\cdot 10^{-2} \text{ ед. напряженности СГСЭ}=750 \text{ В/м.}$$

Заряды, распределенные равномерно по сфере, внутри этой сферы электрического поля не создают. Поэтому внутри сферы поле будет создаваться лишь

зарядом, помещенным в центре. Следовательно,

$$E_1 = q/r^2 = 0{,}1 \text{ ед. напряженности СГСЭ} = 3000 \text{ В/м}.$$

587. Напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$, создаваемая в вершине равностороннего треугольника, является суммой векторов $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ — напряженностей, создаваемых в этой точке положительным и отрицательным зарядами. По абсолютной величине эти напряженности равны $E_1 = E_2 = q/4\pi\varepsilon_0 a^2$ и направлены под углом $\alpha = 120°$ друг к другу. Как видно из рис. 333, геометрическая сумма этих напряженностей равна по величине

$$E = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cos\frac{\alpha}{2} = 40{,}5 \text{ В/м}$$

и направлена вдоль линии, на которой расположены заряды, в сторону отрицательного заряда.

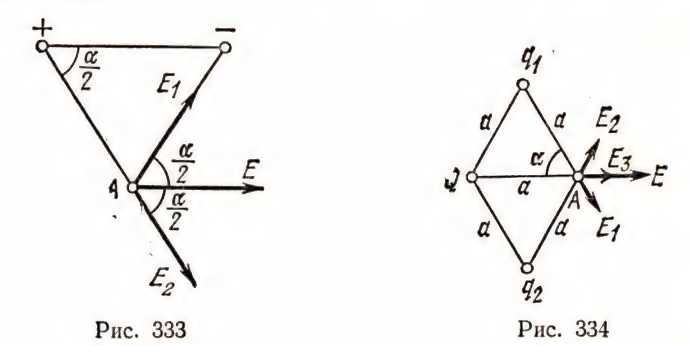


Рис. 333 Рис. 334

588. На рис. 334 показано направление векторов напряженностей электрического поля в точке A, создаваемых зарядами q_1, q_2 и Q ($q_1 = q_2 = q$). Общая напряженность $\boldsymbol{E}$ в точке A равна геометрической сумме всех напряженностей, т. е. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3$. Абсолютные величины напряженностей $E_3 = Q/a^2$ и $E_1 = E_2 = q/a^2$, а направления напряженностей $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ составляют с направлением напряженности $\boldsymbol{E}_3$ одинаковые углы $\alpha = 60°$. Искомая напряженность направлена вдоль короткой диагонали ромба в сторону от заряда Q и равна по величине

$$E = \frac{Q}{a^2} + \frac{2q}{a^2}\cos\alpha = \frac{q+Q}{a^2}.$$

589. Напряженности E_1, E_2 и E_3, создаваемые зарядами q_1, q_2 и Q в заданной точке, имеют значения, найденные в решении задачи 588, однако вектор $\boldsymbol{E}_3$ направлен в противоположную сторону, т. е. к заряду Q. Таким образом, направления напряженностей $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ и $\boldsymbol{E}_3$ составляют между собой углы по 120°. При $|Q| < q$ ($|Q|$ — абсолютная величина заряда Q) искомая напряженность равна по величине $E = \dfrac{q - |Q|}{a^2}$ и направлена от заряда Q вдоль короткой диагонали ромба. При $|Q| = q$ напряженность $E = 0$. При $|Q| > q$ величина напряженности $E = \dfrac{|Q| - q}{a^2}$ и она направлена вдоль короткой диагонали ромба к заряду Q.

590. Напряженности поля в ценгре ромба, создаваемые соответственно зарядами q_1, q_2, q_3 и q_4, равны:

$$E_1=4q_1/d_1^2;\quad E_2=4q_2/d_1^2;\quad E_3=4q_3/d_2^2 \quad \text{и} \quad E_4=4q_4/d_2^2.$$

Величина напряженности в центре ромба

$$E=\sqrt{(E_2-E_1)^2+(E_4-E_3)^2}=\frac{4\sqrt{(q_2-q_1)^2 d_2^4+(q_4-q_3)^2 d_1^4}}{d_1^2 d_2^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}=0{,}177 \text{ ед. напряженности СГСЭ.}$$

Угол α между направлением напряженности в центре ромба и короткой диагональю определяется выражением

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{E_2-E_1}{E_4-E_3}=\frac{(q_2-q_1)\,d_2^2}{(q_4-q_3)\,d_1^2}=1, \quad \text{т. е.} \quad \alpha=45^\circ.$$

591. На шарик действуют сила тяжести $P=mg$, сила $F=qE$ со стороны электрического поля и сила T натяжения нити (рис. 335). При равновесии шарика суммы проекций сил на вертикальное и горизонтальное направления должны быть равны нулю, т. е. $T\cos\alpha-mg=0$ и $-T\sin\alpha+qE=0$. Отсюда находим:

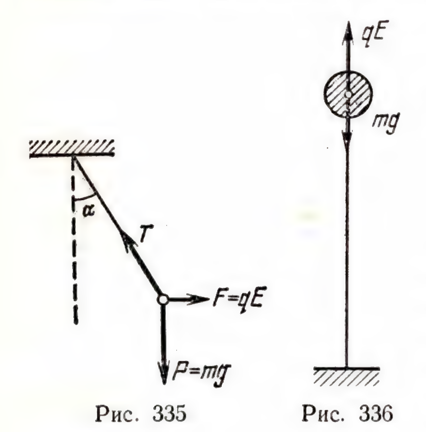


Рис. 335 Рис. 336

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{qE}{mg}\approx 1, \quad \text{т. е.} \quad \alpha\approx 45^\circ.$$

592. Со стороны электрического поля на шарик действует сила $f=qE$, направленная вертикально вверх. Так как вес шарика $P=mg$ по условию задачи меньше, чем f, при равновесии шарик будет находиться у верхнего конца вертикально натянутой нити (рис. 336). Равнодействующая сил f и P, если бы шарик был свободен, вызывала бы ускорение $a=\frac{qE}{m}-g$, величина которого, так же как и величина g, не зависит от положения шарика. Поэтому поведение шарика будет описываться теми же формулами, что и поведение шарика под действием силы тяжести без электрического поля (при прочих равных условиях), если только в этих формулах g заменить на a. В частности, период колебаний шарика на нити, который представляет собой математический маятник, будет

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{a}}=2\pi\sqrt{\frac{ml}{qE-mg}}.$$

При $T=T_0$ должно выполняться условие $a=g$. Следовательно, $E=2mg/q=$ $=19{,}6$ ед. напряженности СГСЭ.

593. При наличии однородного электрического поля с напряженностью E период колебаний маятника (см. задачу 592) $T=2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg\mp qE}}$. В отсутст-

вие электрического поля $T = T_0 = 2\pi\sqrt{l/g} = 1{,}20$ с. Для отрицательного заряда q период $T = T_1 = 1{,}10$ с, а для положительного $T = T_2 = 1{,}35$ с. Таким образом, изменение периода в первом случае $T_1 - T_0 = -0{,}10$ с, во втором случае $T_2 - T_0 = 0{,}15$ с.

594. На шарик действуют сила тяжести mg, сила со стороны электрического поля qE и сила натяжения нити T (рис. 337). Возможны два случая: а) поле направлено вниз и б) поле направлено вверх. Из условий равновесия имеем:

$$T\cos\beta = mg \pm qE\cos\alpha$$

и

$$T\sin\beta = qE\sin\alpha.$$

Знак плюс здесь относится к случаю (а), знак минус — к случаю (б); β — угол между направлением нити и вертикалью. Исключая β из этих уравнений, найдем:

$$T = \sqrt{(mg)^2 \pm 2qmgE\cos\alpha + (qE)^2}.$$

В случае (а) $T = 2{,}87 \cdot 10^3$ дин, в случае (б) $T = 1{,}20 \cdot 10^3$ дин.



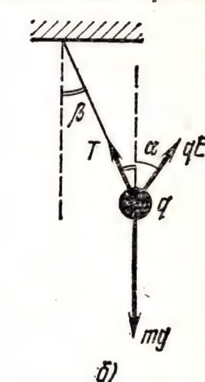


Рис. 337

595. Электрон движется равномерно замедленно. Пройденный путь s и время, за которое проходится этот путь, определяется соотношениями:

$$s = \frac{v_0^2}{2\,(e/m)\,E} = 0{,}0237 \text{ м}, \quad t = \frac{v_0}{(e/m)\,E} = 4{,}7 \cdot 10^{-8} \text{ с}.$$

596. На электрон при его движении между пластинами конденсатора со стороны электрического поля действует сила $f = eE$. Эта сила направлена перпендикулярно к пластинам в сторону, противоположную направлению напряженности, так как заряд электрона отрицательный (рис. 338). Силой тяжести, действующей на электрон, можно пренебречь по сравнению с силой f. Таким образом, в направлении вдоль пластин электрон движется равномерно со скоростью v, имевшейся у него до того, как он влетел в конденсатор, и пролетает расстояние l за время $t = l/v$. В направлении же, перпендикулярном к пластинам, электрон движется под действием силы f и, следовательно, имеет ускорение $a = \frac{f}{m} = \frac{e}{m}E$. За время t он смещается в этом направлении на расстояние $h = \frac{at^2}{2} = \frac{e}{m} \cdot \frac{El^2}{2v^2}$. Отсюда начальная скорость электрона в катодном луче

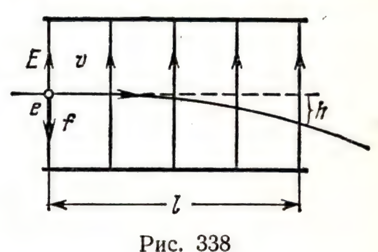


Рис. 338

$$v = l\sqrt{\frac{e}{m} \cdot \frac{E}{2h}} = 3{,}98 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

Кинетическая энергия электрона

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{eEl^2}{4h}=7{,}2\cdot10^{-16}\text{ Дж}.$$

Потенциал. Работа электрических сил

597. Поле вне шара совпадает с полем точечного заряда, равного заряду q шара и помещенного в его центре. Поэтому потенциал в точке, находящейся на расстоянии $R+L$ от центра шара, $\varphi=q/(R+L)$. Отсюда $q=(R+L)\varphi$. Потенциал на поверхности шара

$$\varphi_1=\frac{q}{R}=\frac{(R+L)\varphi}{R}=2020\text{ В}=2{,}02\text{ кВ}.$$

598. Пусть заряд каждой капельки q, а радиус ее r. Тогда ее потенциал $\varphi_1=q/r$. Заряд большой капли равен Nq, а если ее радиус R, то ее потенциал

$$\varphi=\frac{Nq}{R}=\frac{N\varphi_1 r}{R}.$$

Объемы маленькой и большой капли $v=\frac{4}{3}\pi r^3$ и $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ связаны между собой соотношением $V=Nv$. Следовательно,

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt[3]{N}}\quad\text{и}\quad\varphi=\frac{N\varphi_1}{\sqrt[3]{N}}=N^{2/3}\cdot\varphi_1.$$

599. В результате электростатической индукции на внешней и внутренней поверхностях шара появятся равные заряды противоположного знака (см. решение задачи 584 и рис. 332). Вне шара электрические поля, создаваемые этими зарядами, в любой точке равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому суммарное поле индуцированных зарядов равно нулю. Таким образом, остаются лишь поля, создаваемые вне шара зарядом q_1 на его поверхности и зарядом шарика q. Потенциал первого поля в точке, удаленной от центра шара на расстояние r, равен $\varphi_1=\frac{q_1}{r}=\frac{q_1}{10R}$ и потенциал второго поля в этой же точке $\varphi_2=\frac{q}{r}=\frac{q}{10R}$. Полный потенциал

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\frac{q_1+q}{10R}.$$

При $q=+20$ ед. заряда СГСЭ $\varphi=3\cdot10^{-2}$ ед. потенциала СГСЭ $=9$ В.

При $q=-20$ ед. заряда СГСЭ $\varphi=-10^{-2}$ ед. потенциала СГСЭ $=-3$ В.

600. Наибольшую напряженность электрическое поле имеет у поверхности шара: $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}$. Потенциал шара $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}$. Отсюда $\varphi=ER=9\cdot10^4$ В.

601. Из закона Кулона определяем заряды шариков: $q_1=q_2=q=r\sqrt{F}$. Потенциал, создаваемый зарядом q, находящимся на шарике радиусом $R=D/2$, на поверхности этого шарика равен $\varphi_1=\frac{q}{R}=\frac{2r\sqrt{F}}{D}$. В том месте, где находится этот шарик, заряд другого шарика создает потенциал $\varphi_2=q/r=$

$=\sqrt{F}$. Таким образом, потенциалы шариков будут

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\frac{2r\sqrt{F}}{D}\left(1+\frac{D}{2r}\right)=16{,}1 \text{ ед. потенциала СГСЭ}=4{,}84 \text{ кВ}.$$

602. Потенциал в центре квадрата равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых всеми зарядами в этой точке:

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=\frac{q_1}{a}+\frac{q_2}{a}+\frac{q_3}{a}+\frac{q_4}{a}=$$
$$=-0{,}2 \text{ ед. потенциала СГСЭ}=-60 \text{ В}.$$

Напряженность поля в центре квадрата является геометрической суммой напряженностей, создаваемых каждым зарядом в этой точке:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4.$$

Абсолютные величины этих напряженностей:

$$E_1=\frac{q_1}{a^2}, \quad E_2=\frac{q_2}{a^2},$$

$$E_3=\frac{q_3}{a^2} \quad \text{и} \quad E_4=\frac{q_4}{a^2}.$$

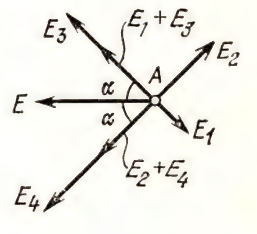


Рис. 339

Удобно сначала сложить попарно векторы, направленные по одной диагонали в противоположные стороны, как показано на рис 339: $\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_4$. При данных величинах зарядов сумма $\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3$ по абсолютной величине равна сумме $\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_4$. Поэтому сумма всех напряженностей $\boldsymbol{E}$ направлена по биссектрисе угла между диагоналями и составляет с этими диагоналями углы $\alpha=45°$. Величина ее $E=2{,}83\cdot10^{-2}$ ед. напряженности СГСЭ $=849$ В/м.

603. Напряженности электрического поля в точках B и C:

$$E_B=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}=6\cdot10^5 \text{ В/м}; \quad E_C=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}=3{,}75\cdot10^4 \text{ В/м}.$$

Потенциалы в этих точках:

$$\varphi_B=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}=3\cdot10^4 \text{ В}; \quad \varphi_C=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}=7{,}5\cdot10^3 \text{ В}.$$

Работа электрических сил при перенесении заряда из точки B в гочку C

$$A=q_1(\varphi_B-\varphi_C)=\frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=2{,}25\cdot10^{-5} \text{ Дж}.$$

604. Напряженности электрического поля в точках a и b равны $E_a=Q/r_a^2$ и $E_b=Q/r_b^2$, где r_a и r_b — расстояния от точек a и b до точки c. Потенциалы в точках a и b равны

$$\varphi_a=Q/r_a=\sqrt{QE_a} \quad \text{и} \quad \varphi_b=Q/r_b=\sqrt{QE_b}.$$

Отсюда

$$A=q(\varphi_a-\varphi_b)=q\sqrt{Q}\,(\sqrt{E_a}-\sqrt{E_b}).$$

605. При прохождении электроном разности потенциалов $U = 1$ В $= \frac{1}{300}$ ед. потенциала СГСЭ электрическое поле совершает над электроном работу $A = eU = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ эрг. Эта работа равна кинетической энергии, приобретенной электроном. Следовательно, 1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ эрг. Поскольку $eU = mv^2/2$, то

$$v = \sqrt{2eU/m} = 5{,}9 \cdot 10^7 \text{ см/с} = 590 \text{ км/с}.$$

606. Работа электрического поля равна изменению кинетической энергии электрона: $eU = mv^2/2$. Отсюда

$$v = \sqrt{2Ue/m} = 5{,}93 \cdot 10^6 \text{ м/с} = 5930 \text{ км/с}.$$

607. Потенциал поверхности шарика $\varphi_0 = q_1/R$. Отсюда его заряд $q_1 = \varphi_0 R$. Потенциал на расстоянии $R + L$ от центра шарика $\varphi = \frac{q_1}{R+L} = \frac{\varphi_0 R}{R+L}$. При переносе заряда q из точки с потенциалом φ в бесконечность работа электрических сил

$$A = q\varphi = \frac{q\varphi_0 R}{R+L} = 2{,}2 \text{ эрг} = 2{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Такую же работу нужно совершить против электрических сил при перенесении заряда q из бесконечности в точку, отстоящую от поверхности шарика на расстояние L.

608. $\varphi = A\,(R + L)/qR = 900$ В.

609. $A = q_2\,(\varphi_2 - \varphi_1) = q_1 q_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 25$ эрг.

610. $A = q\,(q_2 - q_1)\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{l^2 + d^2}}\right) = 3\,600$ эрг.

611. Найдем потенциал, создаваемый зарядом q, находящимся на кольце, в точке A на оси кольца, расположенной на расстоянии x от его центра

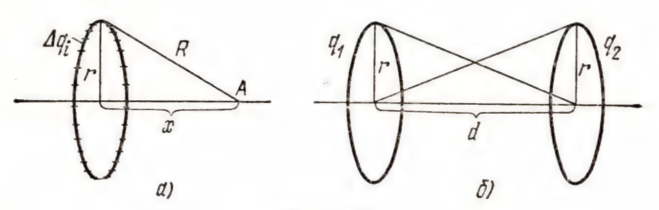


Рис. 340

(рис. 340, *а*) и, следовательно, на расстояниях $R = \sqrt{r^2 + x^2}$ от точек, лежащих на окружности. Разобьем кольцо на отрезки, малые по сравнению с величиной R. Тогда заряд Δq_i, находящийся на каждом отрезке (i — номер отрезка), можно рассматривать как точечный. Он создает в точке A потенциал $\Phi_i = \Delta q_i/R$. Потенциал, создаваемый в точке A всеми отрезками кольца, будет (с учетом того, что все отрезки отстоят от этой точки на одно и то же расстояние R)

$$\varphi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots = \frac{\Delta q_1}{R} + \frac{\Delta q_2}{R} + \frac{\Delta q_3}{R} + \ldots = \frac{(\Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3 + \ldots)}{R}.$$

В скобках стоит сумма зарядов всех отрезков, т. е. заряд всего кольца q. Поэтому

$$\varphi=\frac{q}{R}=\frac{q}{\sqrt{r^2+x^2}}.$$

Потенциал φ_1 поля в центре первого кольца складывается из потенциала, создаваемого зарядом, находящимся на первом кольце, для которого $q=q_1$, $x=0$, и потенциала, создаваемого зарядом, находящимся на втором кольце, для которого $q=q_2$, $x=d$ (рис. 340, *б*). Таким образом, $\varphi_1=\frac{q_1}{r}+\frac{q_2}{\sqrt{r^2+d^2}}$.

Аналогично находим потенциал в центре второго кольца: $\varphi_2=\frac{q_2}{r}+\frac{q_1}{\sqrt{r^2+d^2}}$.

Окончательно для работы получаем:

$$A=Q(\varphi_1-\varphi_2)=Q(q_1-q_2)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}}\right).$$

612. Если заряды q и Q одного знака, то удалить шарик от кольца можно, сообщив ему бесконечно малую скорость. Если же знаки зарядов разные, то сумма кинетической и потенциальной энергии шарика в центре кольца должна быть равна нулю, так как она равна нулю в бесконечности; $\frac{mv^2}{2}+q\varphi=0$, где $\varphi=Q/r$ — потенциал центра кольца (см. решение предыдущей задачи). Отсюда

$$v=\sqrt{\frac{2\,|qQ|}{mr}}.$$

613. $v=\sqrt{2qe/rm}=800$ км/с.

614. Внутри конденсатора имеется однородное электрическое поле с напряженностью $E=\mathcal{E}/d$, направленное вертикально. После удара шарик приобретает заряд того же знака, что и нижняя пластина. Поэтому на него будет действовать со стороны электрического поля сила $f=qE=q\mathcal{E}/d$, направленная вверх. Согласно закону сохранения энергии, изменение энергии равно работе внешних сил (в данном случае — электрических). Учитывая, что удар упругий и что в начальный и конечный моменты шарик имеет лишь потенциальную энергию в поле сил тяжести, получим:

$$A=fH=\frac{q\mathcal{E}H}{d}=mgH-mgh;\ \text{отсюда}\ H=\frac{mghd}{mgd-q\mathcal{E}}.$$

615. Согласно закону сохранения энергии $mgh-\left(\frac{mv^2}{2}+mgH\right)=qU$, где qU — работа электрических сил, $U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 H}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h}$ — разность потенциалов точек начального и конечного положений шарика. Отсюда для определения h получаем квадратное уравнение:

$$h^2-\left(\frac{v^2}{2g}+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mgH}+H\right)h+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg}=0.$$

Его решение:

$$h=\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2g}+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mgH}+H\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{v^2}{2g}+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mgH}+H\right)^2-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg}}$$

(знак плюс перед корнем соответствовал бы случаю максимальной высоты, достигнутой шариком, если бы он получил ту же начальную скорость, направленную вверх).

616. $h=\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2g}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mgH}+H\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{v^2}{2g}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mgH}+H\right)^2+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg}}$.

617. Работа, совершенная над электроном электрическим полем, идет на увеличение кинетической энергии электрона. Следовательно, $e(\varphi_a-\varphi_b)=$ $=\frac{mv_a^2}{2}-\frac{mv_b^2}{2}$. Отсюда $\varphi_a-\varphi_b=\frac{v_a^2-v_b^2}{2(e/m)}=-22{,}7$ В.

Разность потенциалов отрицательна. Так как электрон имеет отрицательный заряд, то скорость электрона увеличивается при его движении в сторону возрастания потенциала.

618. За время пролета электрона $t=l/v$ (см. решение задачи 596) он смещается в направлении действия силы на расстояние

$$h=\frac{at^2}{2}=\left(\frac{e}{m}\right)\frac{Ul^2}{2v^2d}=5{,}5\cdot 10^{-3}\text{ м}.$$

619. На пылинку действует сила тяжести $P=mg$ и сила $f=q_1E_1$ со стороны электрического поля, где q_1 — начальный заряд пылинки и $E_1=U_1/d$ — напряженность электрического поля в конденсаторе. Чтобы пылинка могла находиться в равновесии, верхняя пластина конденсатора должна быть заряжена отрицательно. При равновесии $P=f$, или $mg=q_1U_1/d$. Отсюда $q_1=mgd/U_1$. Так как уменьшение заряда пылинки на величину $q_0=1000e$ равносильно увеличению положительного заряда на величину q_0, то новый заряд пылинки $q_2=q_1+q_0$. Условие равновесия в этом случае $mg=q_2U_2/d$, где U_2 — новая разность потенциалов между пластинами. Учитывая выражения для q_2, q_1 и q_0, найдем отсюда:

$$U_2=\frac{mgd}{q_2}=\frac{mgU_1d}{mgd+1000eU_1}=5020\text{ В}.$$

Таким образом, разность потенциалов нужно изменить на величину $U_2-U_1=$ $=-980$ В (знак минус показывает, что ее нужно уменьшить, так как заряд пылинки увеличился).

620. Верхняя пластина конденсатора должна быть заряжена положительно. Новый заряд пылинки $q_2=q_1-q_0$, где q_0 — заряд тысячи электронов. Поэтому (см. задачу 619)

$$U_2=\frac{mgd}{q_2}=\frac{mgU_1d}{mgd-1000eU_1}=7460\text{ В}.$$

Напряжение между пластинами надо увеличить на $U_2-U_1=1460$ В.

621. При равновесии $\frac{4}{3}\pi r^3\rho g=\frac{eU}{d}$, отсюда $r=\sqrt[3]{\frac{3eU}{4\pi g\rho d}}=7{,}6\cdot 10^{-5}$ см.

622. Напряженность электрического поля в конденсаторе $E=\mathcal{E}/d$. Разность потенциалов между точками, где расположены заряды, находящиеся на концах палочки, $U_{ab}=\varphi_a-\varphi_b=El=\mathcal{E}l/d$. Здесь φ_a — потенциал в точке, где расположен заряд $-q$, а φ_b — потенциал в точке, где расположен заряд $+q$, при этом $\varphi_a>\varphi_b$. При повороте палочки электрические силы совершают работу по перенесению заряда $-q$ из точки a в точку b и заряда $+q$ из точки b

в точку a; эта работа равна

$$A = -q(\varphi_a - \varphi_b) + q(\varphi_b - \varphi_a) = -2q(\varphi_a - \varphi_b) = -2ql\mathscr{E}/d = -6 \cdot 10^{-10} \text{ Дж.}$$

Знак минус перед полученным значением работы означает, что работу должны совершить внешние силы.

623. $M = qUl/d = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ дин · см.

624. $U = \frac{d}{q}\left(F + \frac{q^2}{l^2}\right) = 1{,}4 \cdot 10^3$ ед. потенциала СГСЭ $= 420$ кВ.

625. Пусть до замыкания второй шарик имел заряд Q. Сумма зарядов шариков после замыкания $q_1 + q_2 = Q$. Потенциалы же их после замыкания одинаковы: $\varphi = q_1/r_1 = q_2/r_2$. Следовательно, $q_2 = q_1 \frac{r_2}{r_1}$. После замыкания шарик *2* действует на шарик *1* с силой $P = \frac{q_1 q_2}{h^2} = \frac{q_1^2 r_2}{h^2 r_1}$. Отсюда $q_1 = h\sqrt{P\frac{r_1}{r_2}}$. Начальный потенциал второго шарика

$$\varphi = \frac{Q}{r_2} = \frac{q_1 + q_2}{r_2} = \frac{q_1[1 + (r_2/r_1)]}{r_2} = h\sqrt{P\frac{r_1}{r_2}}\,\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} =$$

$$= 42 \text{ ед. потенциала СГСЭ} = 1{,}26 \cdot 10^4 \text{ В.}$$

Электроемкость

626. Емкость проводящего шара в керосине $C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 R$, в глицерине $C_2 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 R$. Их отношение $\frac{C_2}{C_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 28{,}1$.

627. Заряды на пластинах $q = CU = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл.

628. $v = \sqrt{2\left(\frac{e}{m}\right)\frac{\sigma S}{C}} = 1{,}03 \cdot 10^7$ м/с.

629. Конденсатор из трех пластин, соединенных, как показано на рис. 77, можно рассматривать как два плоских конденсатора с емкостью $C = \varepsilon_0 S/d$ каждый, соединенных параллельно. Поэтому общая емкость (без диэлектрика) $C_0 = 2\varepsilon_0 S/d = 35{,}4$ пФ. При погружении конденсатора в глицерин его емкость будет $C = \varepsilon C_0 = 2000$ пФ.

630. $C = \frac{C_1}{n-1} = \frac{\varepsilon S}{4\pi(n-1)d} = 27{,}8$ см $= 30{,}9$ пФ.

631. $P = qE = 4Qq/R^2 = 392$ дин $= 0{,}4$ гс.

632. Напряженность электрического поля внутри плоского конденсатора связана с зарядом Q на его пластинах соотношением $E = 4\pi Q/S$. На шарик внутри конденсатора действуют сила тяжести P, сила натяжения нити T и сила $F = qE$ со стороны электрического поля (рис. 335). Из условий равновесия шарика (см. решение задачи 591) находим: $qE = P \operatorname{tg}\alpha$, или $4\pi Qq/S = P \operatorname{tg}\alpha$. Отсюда

$$Q = \frac{SP \operatorname{tg}\alpha}{4\pi q} = 9800 \text{ ед. заряда СГСЭ.}$$

633. Первоначальный заряд на пластинах q_1, заряд на пластинах после погружения конденсатора в керосин q_2,

$$\Delta q = q_2 - q_1 = (\varepsilon - 1)C_0 U = \frac{(\varepsilon - 1)S\mathscr{E}}{4\pi d} = 0{,}75 \text{ ед. заряда СГСЭ} = 2{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл.}$$

634. Заряд на пластинах не изменяется. $U_1 = d_1 U/d\varepsilon = 100$ В.

635. При движении пластины емкость конденсатора в данный момент времени будет определяться лишь той частью площади пластин, по которой они перекрывают друг друга. В момент времени t_1 эта часть площади равна $S_1 = S_0 - vlt_1$, в момент времени t_2 она равна $S_2 = S_0 - vlt_2$, где $l = 10$ см — длина стороны пластины. В эти моменты времени конденсатор будет иметь емкости $C_1 = S_1/4\pi d$ и $C_2 = S_2/4\pi d$, и заряды на его пластинах будут

$$q_1 = C_1 U = \frac{S_1 U}{4\pi d} \quad \text{и} \quad q_2 = C_2 U = \frac{S_2 U}{4\pi d}.$$

Величина заряда, протекшего по проводам за время $\Delta t = t_2 - t_1$, будет

$$\Delta q = q_1 - q_2 = \frac{U(S_1 - S_2)}{4\pi d} = \frac{vlU(t_2 - t_1)}{4\pi d}.$$

Ток при этом

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{vlU}{4\pi d} = 95{,}5 \text{ ед. тока СГСЭ} = 3{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ А}.$$

636. Общий заряд параллельно соединенных конденсаторов $q = (C_1 + C_2) U = 6 \cdot 10^{-5}$ Кл.

637. $U_1 = \frac{2}{3} U_0 = 4$ В.

638. $U = (C_1 U_1 + C_2 U_2)/(C_1 + C_2) = 40$ В.

639. $C_2 = C_1 (U_1 - U)/(U - U_2) = 10$ мкФ.

640. Заряды конденсаторов до их соединения $q_1 = C_1 U_1$ и $q_2 = C_2 U_2$. После соединения разноименно заряженных обкладок конденсаторов общий заряд $q_0 = |q_2 - q_1| = (C_1 + C_2) U_0$ и заряд первого конденсатора $q_3 = C_1 U_0$, где U_0 — разность потенциалов между обкладками конденсаторов после соединения. Отсюда находим:

$$q_3 = \frac{C_1 |C_2 U_2 - C_1 U_1|}{C_1 + C_2} = 3{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

641. При соединении обкладок с разноименными зарядами общий заряд $q = CU$ равен разности зарядов $q_1 = C_1 U_1$ и $q_2 = C_2 U_2$ отдельных конденсаторов. Здесь $C = C_1 + C_2$ — общая емкость после соединения. Таким образом, $(C_1 + C_2) U = C_1 U_1 - C_2 U_2$, если $q_1 > q_2$, и $(C_1 + C_2) U = C_2 U_2 - C_1 U_1$, если $q_1 < q_2$. Решая эти уравнения, получим: в первом случае $C_1 = \frac{U_2 + U}{U_1 - U} C_2 = 11$ мкФ, во втором случае $C_1 = \frac{U_2 - U}{U_1 + U} C_2 = 3$ мкФ.

642. До соединения заряд первого конденсатора $q_1 = |C_1 U_1|$, заряд второго конденсатора $q_2 = |C_2 U_2|$. После соединения разноименных обкладок общий заряд

$$q_2 - q_1 = |C_2 U_2| - |C_1 U_1| = \pm |(C_1 + C_2) U|.$$

Двойной знак мы здесь поставили потому, что заранее не известно, какой из зарядов, q_2 или q_1, больше. Отсюда

$$|U_2| = \frac{|C_1 U_1| \pm |(C_1 + C_2) U|}{C_2}.$$

Решение со знаком минус соответствует случаю, когда после соединения пластин знаки зарядов на пластинах первого конденсатора не меняются,

а решение со знаком плюс — случаю, когда знаки на пластинах первого конденсатора после соединения становятся обратными. Так как в нашем случае $|C_1U_1| < |(C_1+C_2)U|$, а величина $|U_2|$ должна быть всегда положительной, то существует лишь одно решение со знаком плюс. В результате получается: $|U_2| = 350$ В.

643. $Q_1 = \frac{R_1 Q}{R_1+R_2}$ и $Q_2 = \frac{R_2 Q}{R_1+R_2}$.

644. Соединение шаров тонкой проволокой эквивалентно параллельному соединению конденсаторов. После соединения

$$q_1 = \frac{C_1(q_{10}+q_{20})}{C_1+C_2} = \frac{R_1(q_{10}+q_{20})}{R_1+R_2} = 5{,}7 \text{ ед. заряда СГСЭ},$$

$$q_2 = \frac{C_2(q_{10}+q_{20})}{C_1+C_2} = \frac{R_2(q_{10}+q_{20})}{R_1+R_2} = 14{,}3 \text{ ед. заряда СГСЭ}.$$

645. Первоначальные заряды шаров $q_1 = r_1\varphi_1$ и $q_2 = r_2\varphi_2$. Заряды на шарах после соединения $q_1' = r_1\varphi$ и $q_2' = r_2\varphi$. Общий потенциал шаров после соединения определим из условия сохранения заряда: $\varphi = \frac{r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2}{r_1+r_2}$. Заряды шаров:

$$q_1' = \frac{r_1(r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2)}{r_1+r_2}, \quad q_2' = \frac{r_2(r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2)}{r_1+r_2}.$$

Поверхностные плотности зарядов на шарах:

$$\sigma_1 = \frac{q_1'}{4\pi r_1^2} = \frac{r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2}{4\pi r_1(r_1+r_2)} = 4{,}42 \cdot 10^{-4} \text{ ед. заряда СГСЭ/см}^2 = 1{,}475 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{q_2'}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2}{4\pi r_2(r_1+r_2)} = 8{,}85 \cdot 10^{-4} \text{ ед. заряда СГСЭ/см}^2 = 2{,}95 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2.$$

646. $\varepsilon = (U_1 - U)/U = 7$.

647. Общая емкость конденсаторов без диэлектрика $C_1 = 3C_0 = 3S/4\pi d = 750$ см. При заполнении двух конденсаторов диэлектриками общая емкость

$$C_2 = \varepsilon_1 C_0 + \varepsilon_2 C_0 + C_0 = \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2+1)S}{4\pi d} = 2500 \text{ см}.$$

648. В случае плоского конденсатора с расстоянием между пластинами d и емкостью C_0 разность потенциалов между пластинами (без диэлектрика) $U_0 = E_0 d$ и заряд на пластинах $q = C_0U_0 = C_0E_0d$. Конденсатор, половина которого заполнена диэлектриком (рис. 341), можно рассматривать как два соединенных параллельно конденсатора, причем один не содержит диэлектрика и имеет емкость $C_1 = C_0/2$, а в другом все пространство между пластинами заполнено диэлектриком, и поэтому его емкость $C_2 = \varepsilon C_0/2$ (рис. 341). Полная емкость конденсатора после заполнения его половины диэлектриком, таким

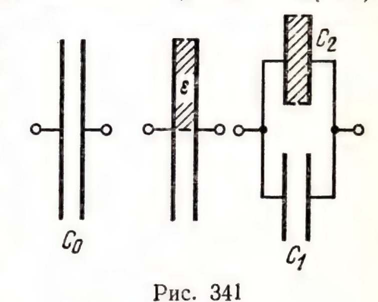


Рис. 341

образом, будет $C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon+1}{2} C_0$. При отключенном источнике тока заряд на пластинах сохраняется. Поэтому разность потенциалов между пластинами

теперь будет $U=q/C$, и напряженность электрического поля внутри конденсатора

$$E=\frac{U}{d}=\frac{q}{Cd}=\frac{2E_0}{\varepsilon+1}.$$

649. Пусть U_1 — напряжение между обкладками первого конденсатора, а U_2 — между обкладками второго конденсатора. Тогда $U=U_1+U_2$, а заряды на пластинах конденсатора одинаковы и равны $q=C_1U_1=C_2U_2$. Отсюда

$$U_1=\frac{C_2}{C_1+C_2}U=165 \text{ В} \quad \text{и} \quad U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}U=55 \text{ В}.$$

При последовательном соединении конденсаторов на конденсаторе меньшей емкости напряжение больше, чем на конденсаторе большей емкости.

650. Согласно решению задачи 649 напряжение между пластинами первого конденсатора $U_1=\frac{C_2}{C_1+C_2}U=600$ В, между пластинами второго конденсатора $U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}U=300$ В. Работать при указанных в условии задачи напряжениях пробоя нельзя, ибо произойдет пробой первого, а затем и второго конденсатора.

651. Согласно решению задачи 649 при изменении емкости переменного конденсатора от C_2 до C_{02} напряжение между его обкладками меняется

$$\text{от } U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}U=100 \text{ В} \quad \text{до } U_{02}=\frac{C_1}{C_1+C_{02}}U=182 \text{ В}.$$

652. $C_{2,3}=\frac{C-C_1}{2}\pm\sqrt{\frac{(C-C_1)^2}{4}-\frac{(C-C_1)C_0C_1}{C_1-C_0}}$; $C_2=6$ мкФ и $C_3=3$ мкФ.

653. При параллельном соединении конденсаторов $C-C_1=C_2+C_3$, а при последовательном $\frac{1}{C_0}-\frac{1}{C_1}=\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}$. Из этих уравнений находим: $C_2C_3=\frac{C_0C_1}{C_1-C_0}(C-C_1)$. Согласно теореме Виета C_2 и C_3 должны быть корнями квадратного уравнения:

$$x^2+(C_1-C)x+\frac{C_0C_1(C-C_1)}{C_1-C_0}=0.$$

Решая его, найдем: $x_{1,2}=C_2=C_3=2$ мкФ.

Заряды всех конденсаторов при последовательном соединении равны между собой: $q=C_1U_1=C_2U_2=C_3U_3$. Отсюда

$$U_2=C_1U_1/C_2=30 \text{ В}, \quad U_3=C_1U_1/C_3=30 \text{ В}.$$

654. При последовательном соединении конденсаторов заряд каждого конденсатора также равен q. Поэтому

$$U_1=\frac{q}{C_1}=30 \text{ В}, \quad U_2=\frac{q}{C_2}=15 \text{ В} \quad \text{и} \quad U_3=\frac{q}{C_3}=6 \text{ В}.$$

Э. д. с. аккумулятора равна полному напряжению на батарее конденсаторов, т. е. $\mathscr{E}=U=U_1+U_2+U_3=51$ В.

Так как при последовательном соединении $\frac{1}{C_0}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}$, то

$$C_0=\frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3}=59\text{ см}=65\text{ пФ}.$$

655. $U_1=\frac{C_2C_3}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3}U=20$ В, $U_2=\frac{C_1C_3}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3}U=8$ В, $U_3=\frac{C_1C_2}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3}U=4$ В.

656. При последовательном соединении конденсаторов заряды конденсаторов равны. До погружения конденсатора в диэлектрик заряды каждого конденсатора $q=CU=C\mathscr{E}/2$. После погружения одного из конденсаторов в диэлектрик заряды конденсаторов будут $q_1=CU_1=\varepsilon CU_2$. Кроме того, $U_1+U_2=\mathscr{E}$. Следовательно, $q_1=\frac{\varepsilon C\mathscr{E}}{1+\varepsilon}$. Изменение заряда на конденсаторах

$$q_1-q=\frac{C(\varepsilon-1)\mathscr{E}}{2(1+\varepsilon)}=1{,}85\cdot10^{-10}\text{ Кл}.$$

657. Первоначальная напряженность электрического поля в конденсаторах $E_1=U/2d$, где d — расстояние между пластинами конденсатора. После заполнения второго конденсатора диэлектриком напряженность электрического поля в нем $E_2=\frac{U}{(\varepsilon+1)d}$ и $\frac{E_2}{E_1}=\frac{2}{\varepsilon+1}=0{,}2$.

658. После отсоединения конденсатора от источника э. д. с. и заполнения его диэлектриком заряд его не меняется, $q=CU/2=\varepsilon CU_2$. Напряженность электрического поля в конденсаторе, заполненном диэлектриком, теперь $E_2=\frac{U_2}{d}=\frac{U}{2\varepsilon d}$ и $\frac{E_2}{E_1}=\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{9}$.

659. Изменение емкости батареи $\Delta C=\frac{(\varepsilon-1)C}{2(\varepsilon+1)}=1{,}7$ пФ.

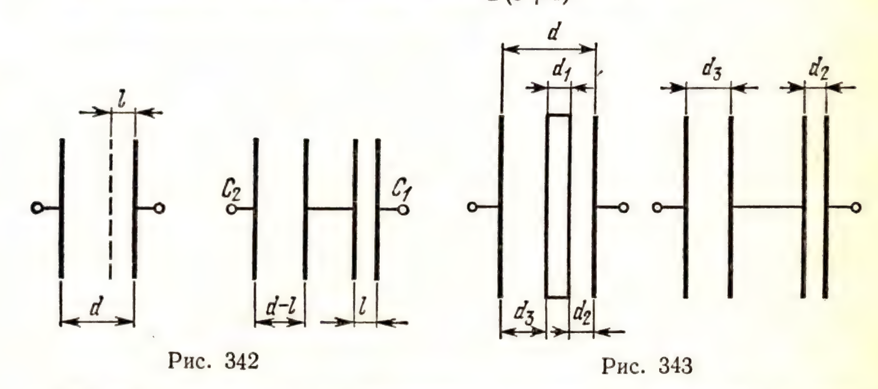


Рис. 342

Рис. 343

660. Как легко видеть, после введения пластинки образовалось два последовательно включенных конденсатора с емкостями $C_1=\frac{S}{4\pi l}$ и $C_2=\frac{S}{4\pi(d-l)}$ (рис. 342). Их общую емкость определим из соотношения

$$\frac{1}{C_0}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{4\pi l}{S}+\frac{4\pi(d-l)}{S}=\frac{4\pi d}{S}=\frac{1}{C},$$

где C — первоначальная емкость конденсатора. Таким образом, после введения пластинки при любом ее положении $C_0 = C$.

661. Введение проводящей пластинки между обкладками конденсатора приводит к образованию двух последовательно включенных конденсаторов с расстояниями между обкладками d_2 и d_3 и емкостями $C_1 = S/4\pi d_2$ и $C_2 = S/4\pi d_3$, где $d_2 + d_3 = d - d_1$ (рис. 343). Их общую емкость находим из соотношения

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{4\pi(d_2 + d_3)}{S} = \frac{4\pi(d - d_1)}{S}.$$

Отсюда $C_0 = \frac{S}{4\pi(d - d_1)}$. При $d_1 = d/3$ имеем: $C_0 = \frac{3}{2}C$, где $C = S/4\pi d$ — первоначальная емкость.

662. Емкость плоского воздушного конденсатора $C = S/4\pi d$. Емкость конденсатора после внесения между его обкладками проводящей пластинки толщиной d_1 согласно решению задачи 661 $C_1 = S/4\pi(d - d_1)$. Заряд q конденсатора, отключенного от источника тока, не меняется. Поэтому $q = CU = C_1U_1$. Отсюда разность потенциалов U_1 на конденсаторе после внесения металлической пластинки

$$U_1 = \frac{C}{C_1}U = \frac{d - d_1}{d}U = 40 \text{ В}.$$

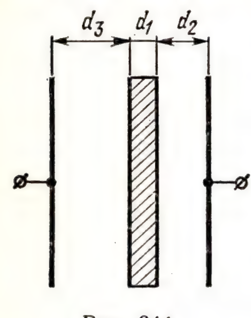


Рис. 344

663. Если в плоский конденсатор внести тонкую проводящую пластинку, параллельную его обкладкам, то на ее поверхностях появятся заряды противоположного знака равной величины. При этом электрическое поле в конденсаторе не изменится и емкость конденсатора останется прежней (ср. решение задачи 660). Поэтому емкость конденсатора с диэлектрической пластинкой можно найти, предположив, что на поверхностях этой пластинки нанесены тонкие проводящие слои. В этом случае образуются три последовательно соединенных конденсатора с емкостями (в системе единиц СИ) $C_1 = \varepsilon\varepsilon_0 S/d_1$, $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$ и $C_3 = \varepsilon_0 S/d_3$, где d_2 и d_3 — расстояния между поверхностями диэлектрической пластинки и обкладками, причем $d_2 + d_3 = d - d_1$ (рис. 344). Общая емкость конденсатора C_0 определяется из формулы

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon} + d_2 + d_3\right); \text{ отсюда } C_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon d + d_1(1 - \varepsilon)}.$$

664. $C_0 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 S}{4\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3)\,a} = 100$ см (см. решение задачи 663).

665. Представим конденсатор с диэлектрической пластинкой в виде двух параллельно включенных конденсаторов, из которых первый не содержит диэлектрика и имеет емкость $C_1 = C/2$ ($C = S/4\pi d$ — первоначальная емкость конденсатора), а во втором площадь пластин равна площади диэлектрической пластины (рис. 345, *а*). Затем второй конденсатор представим в виде двух последовательно включенных конденсаторов, один из которых не содержит диэлектрика и имеет емкость $C_2 = C$, а другой полностью заполнен диэлектриком и имеет емкость $C_3 = \varepsilon C$ (рис. 345, *б*). Общая емкость двух последних конден-

саторов $C_4=\frac{C_2C_3}{C_2+C_3}=\frac{\varepsilon C}{1+\varepsilon}$. Общая емкость всех трех конденсаторов $C_0=$ $=C_1+C_4=\frac{(1+3\varepsilon)C}{2(1+\varepsilon)}$. Отношение емкостей $\frac{C_0}{C}=\frac{1+3\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}=\frac{7}{6}$.

Здесь мы считаем, что размеры пластин намного больше расстояния между ними, и поэтому пренебрегаем краевыми эффектами, т. е. отличием электрического поля на краях обкладок и диэлектрической пластинки от однородного. В противном случае емкость первоначального конденсатора не равна емкости трех конденсаторов, изображенных на рис. 345, *б*.

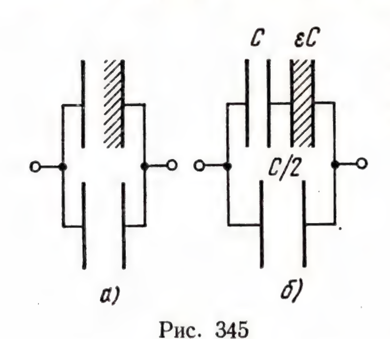


Рис. 345

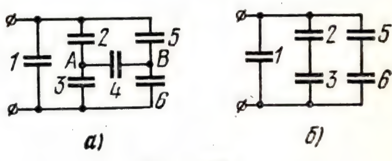


Рис. 346

666. Общая емкость батареи конденсаторов $C_0=\frac{C_1C_3}{C_1+C_3}+\frac{C_2C_4}{C_2+C_4}=4{,}5$ мкФ.

667. Данная схема включения эквивалентна схеме, изображенной на рис. 346, *а*. Ввиду равенства емкостей всех конденсаторов разность потенциалов между точками A и B равна нулю, конденсатор C_4 всегда не заряжен и схема упрощается (рис. 346, *б*). Общая емкость системы

$$C_0=C_1+\frac{C_2C_3}{C_2+C_3}+\frac{C_5C_6}{C_5+C_6}=2C.$$

668. $U_{ab}=(C_1\mathscr{E}_1-C_2\mathscr{E}_2)/(C_1+C_2)=-1{,}3$ В.

669. $Q=\frac{\mathscr{E}C_1^2C_2(\varepsilon-1)}{(C_1+C_2)(C_1+\varepsilon C_2)}=20$ ед. заряда СГСЭ.

670. Вначале разность потенциалов между пластинами каждого конденсатора $U_1=\mathscr{E}/2$, где $\mathscr{E}$ — э. д. с. источника. После заполнения конденсатора диэлектриком $\mathscr{E}=\frac{q}{C}+\frac{q}{\varepsilon C}=\frac{q(\varepsilon+1)}{\varepsilon C}$, где q — величина заряда на каждой пластине, $q/\varepsilon C$ — разность потенциалов между пластинами конденсатора, заполненного диэлектриком, и $\frac{q}{C}=\mathscr{E}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}=U_2$ — разность потенциалов между пластинами конденсатора, не заполненного диэлектриком. Так как напряженность электрического поля в конденсаторе пропорциональна разности потенциалов между его пластинами, то отношение напряженностей до и после заполнения

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{U_1}{U_2}=\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}=\frac{5}{8}=0{,}625.$$

671. $\Delta F=FIt/Q_0$.

672. После включения источника заряды каждого конденсатора, включенного последовательно в цепь AMB, равны $q'=C'\mathscr{E}$, где $C'=C_1C_3/(C_1+C_3)$ — емкость этой цепи, а заряды каждого конденсатора, включенного последова-

тельно в цепь ANB, равны $q''=C''\mathscr{E}$, где $C''=C_2C_4/(C_2+C_4)$. Разность потенциалов между точками A и M равна $U'=q'/C_1=C_3\mathscr{E}/(C_1+C_3)$; разность потенциалов между точками A и N равна $U''=q''/C_2=C_4\mathscr{E}/(C_2+C_4)$. После отключения источника схему можно рассматривать как две параллельные цепи из последовательно включенных конденсаторов (MAN из C_1 и C_2 и MBN из C_3 и C_4), заряженных до разности потенциалов

$$U=U''-U'=\left(\frac{C_4}{C_2+C_4}-\frac{C_3}{C_1+C_3}\right)\mathscr{E}.$$

При замыкании ключа разность потенциалов между точками M и N становится равной нулю. Цепь MAN разряжается и по проводнику A протекает заряд $q=CU$, где $C=C_1C_2/(C_1+C_2)$ — емкость этой цепи. Таким образом,

$$q=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\left(\frac{C_4}{C_2+C_4}-\frac{C_3}{C_1+C_3}\right)\mathscr{E}=\frac{1}{8}C_0\mathscr{E}=10^{-3}\text{ Кл}.$$

673. $C_x=C_2=5$ мкФ и $C_y=C_1=2$ мкФ.

674. Относительно земли пластина A имеет потенциал $\varphi_A=-\mathscr{E}$, а пластина B — потенциал $\varphi_B=\mathscr{E}$. Разность потенциалов между ними $\varphi_B-\varphi_A=2\mathscr{E}$ и напряженность электрического поля

$$E=\frac{\varphi_B-\varphi_A}{d}=\frac{2\mathscr{E}}{d}=4\cdot10^4\text{ В/м}.$$

675. $\sigma=\dfrac{v^2}{8\,(e/m)\,\pi d}=2{,}5\cdot10^{-2}$ ед. заряда СГСЭ/см².

676. По закону сохранения энергии количество выделенной при разрядке конденсатора теплоты равно электрической энергии $W=q^2/2C=0{,}25$ Дж, запасенной в конденсаторе. Разность потенциалов до разрядки $U=q/C=500$ В.

677. Энергия батареи конденсаторов $W=nCU^2/2$. Отсюда разность потенциалов $U=\sqrt{2W/nC}=500$ В.

678. Емкость шара $C=4\pi\varepsilon_0R$ (в системе СИ). Вся электрическая энергия заряженного шара $W=C\varphi^2/2=2\pi\varepsilon_0R\varphi^2=2{,}5\cdot10^{-5}$ Дж перейдет в теплоту.

679. Из формулы $W=q\varphi/2$ определим заряд: $q=2W/\varphi=4\cdot10^{-4}$ Кл.

680. До соединения конденсаторов их заряды $q_1=C_1U_1$ и $q_2=C_2U_2$, а общая их энергия

$$W_1=\frac{C_1U_1^2}{2}+\frac{C_2U_2^2}{2}.$$

После соединения конденсаторов их полный заряд $q=q_1+q_2=(C_1+C_2)\,U$, где U — разность потенциалов между верхними пластинами и землей. Отсюда $U=\dfrac{C_1U_1+C_2U_2}{C_1+C_2}$. Общая энергия конденсаторов после соединения верхних обкладок

$$W_2=\frac{(C_1+C_2)\,U^2}{2}=\frac{(C_1U_1+C_2U_2)^2}{2\,(C_1+C_2)}.$$

При соединении конденсаторов выделяется количество теплоты, равное разности их начальной и конечной энергии:

$$Q=W_1-W_2=\frac{C_1U_1^2}{2}+\frac{C_2U_2^2}{2}-\frac{(C_1U_1+C_2U_2)^2}{2\,(C_1+C_2)}=\frac{C_1C_2\,(U_1-U_2)^2}{2\,(C_1+C_2)}=4{,}5\cdot10^{-2}\text{ Дж}.$$

При $U_1 = U_2$ нет перехода зарядов, поэтому теплота не выделяется. Если потенциалы U_1 и U_2 имеют одинаковые знаки, то теплоты выделяется меньше, чем в случае разных знаков потенциалов.

681. Выделяемое количество теплоты равно разности энергий конденсаторов до их соединения и после соединения (см. решение задачи 680):

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{C_1C_2(U_1 - U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

§ 20. Постоянный электрический ток

Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников

682. Ток в проводнике $I = q/t$. Плотность тока $j = I/S$. Отсюда $j = q/tS = 2 \cdot 10^6$ А/м².

683. Цена деления шкалы прибора как миллиамперметра $\alpha = I/n = 0{,}1$ мА на деление.

684. Сопротивление пробора $R = U/I = 2$ кОм.

685. Внутреннее сопротивление вольтметра найдем из условия, что при отклонении стрелки на всю шкалу напряжение на зажимах прибора равно U_1, а ток, текущий через прибор, равен I_1. Получаем: $R = U_1/I_1 = 2$ кОм.

Когда же вольтметр показывает напряжение U, то через него течет ток, величина которого $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{I_1U}{U_1} = 2{,}5$ мА.

686. $I = I_1(R + R_1)/R = 27{,}5$ мА.

687. $U = qR/t = 4$ В.

688. Падения напряжения на участках цепи: на плитке $U_1 = IR_1 = 200$ В, на реостате $U_2 = IR_2 = 120$ В и на амперметре $U_3 = IR_3 = 0{,}4$ В.

689. $\rho = \pi RD^2/4l = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

690. $R = \rho m/\rho_0 S^2 = 197$ Ом.

691. $I = \pi Ud^2/4\rho l = 0{,}236$ А.

692. $\rho = \dfrac{US}{Il} = \dfrac{U\pi d^2}{4Il} = 5$ Ом · мм²/м.

693. $U_1 = IR_1 = \dfrac{S_2S_3U}{S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3} = 6$ В, $U_2 = IR_2 = \dfrac{S_1S_3U}{S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3} = 3$ В, $U_3 = IR_3 = \dfrac{S_1S_2U}{S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3} = 2$ В.

694. При температуре $t = 10$°С сопротивление проволоки $R = R_0(1 + \alpha t)$, при температуре t_1 оно равно $R_1 = R_0(1 + \alpha t_1)$, где R_0 — сопротивление проволоки при 0 °С. Искомая температура

$$t_1 = \frac{R_1(1 + \alpha t) - R}{\alpha R} = 48{,}3 \text{ °С.}$$

695. $t_1 = \dfrac{U(1 + \alpha t) - IR}{IR\alpha} \approx 1910$ °С.

Последовательное и параллельное соединение проводников. Добавочные сопротивления и шунты

696. $R = (U - U_1)/I_1 = 25$ Ом.

697. Падение напряжения на добавочном сопротивлении $U_2 = U - 2U_1$. По закону Ома $U_2 = IR$. Отсюда $R = (U - 2U_1)/I = 2{,}5$ Ом.

698. Через вольтметры протекает один и тот же ток I. Так как вольтметр показывает падение напряжения на собственном внутреннем сопротивлении, то $I=U_1/R_1$. Сопротивление второго вольтметра $R_2=\frac{U_2}{I}=\frac{U_2}{U_1}R_1=2$ кОм.

699. $I=\frac{I_0(R_0+r)}{R_0(1+\alpha t)+r}=23{,}6$ мА.

700. При температуре t общее сопротивление последовательно включенных проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 будет

$$R=R_1+R_2=R_{01}(1+\alpha_1 t)+R_{02}(1+\alpha_2 t)=R_{01}+R_{02}+(\alpha_1 R_{01}+\alpha_2 R_{02})t,$$

где R_{01} — сопротивление угольного стержня, а R_{02} — сопротивление проволоки при температуре 0 °C. Общее сопротивление не зависит от температуры, если $\alpha_1 R_{01}+\alpha_2 R_{02}=0$. В этом случае при любой температуре $R=R_{01}+R_{02}$. Из последних двух уравнений найдем:

$$R_{01}=\frac{\alpha_2 R}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{R}{6}=333\ \text{Ом},\quad R_{02}=\frac{-\alpha_1 R}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{5R}{6}=1667\ \text{Ом}.$$

701. Схемы электропроводки, позволяющие включать и выключать лампочку в любом конце коридора, показаны на рис. 347. У концов коридора устанавливаются два переключателя $П_1$ и $П_2$, каждый из которых имеет два положения.

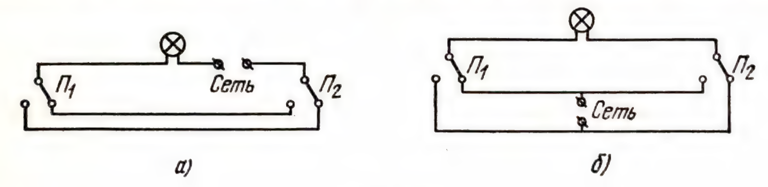


Рис. 347

В зависимости от расположения выводов от сети может оказаться выгоднее с точки зрения экономии проводов вариант *а* или *б*.

702. $I_1=U/R=0{,}6$ А (при параллельном соединении), $I_2=U/2R=0{,}3$ А.

703. Пусть при данном положении подвижного контакта реостата *а* сопротивление участка *Оа* реостата равно r_x (рис. 89). Тогда общее сопротивление этого участка и вольтметра (они соединены параллельно) $R_x=r_xR_1/(r_x+R_1)$, а сопротивление остальной части реостата *аб* равно $R-r_x$.

Таким образом, полное сопротивление между точками *О* и *б* будет

$$R_0=R-r_x+R_x=R-r_x+\frac{r_xR_1}{r_x+R_1}=\frac{r_x(R-r_x)-RR_1}{r_x+R_1}.$$

Ток в цепи $I=U/R_0$. Падение напряжения на участке *Оа*

$$U_x=IR_x=\frac{R_x}{R_0}U=\frac{r_xR_1U}{r_x(R-r_x)+RR_1}.$$

Так как по условию $R\ll R_1$ и, кроме того, $r_x\leqslant R$, то первым членом в знаменателе можно пренебречь по сравнению со вторым (первый член представляет собой произведение двух малых величин r_x и $R-r_x$, в то время как второй — произведение малой величины R на большую R_1). Следовательно,

$$U_x\approx r_xU/R,$$

т. е. напряжение U_x пропорционально сопротивлению r_x. В свою очередь сопротивление r_x пропорционально длине участка Oa реостата (в случае реостата со скользящим контактом).

На рис. 348 прямая OA показывает зависимость U_x от r_x. На этом же рисунке пунктирная линия показывает зависимость U_x от r_x, когда $R=R_1$, т. е. когда в выражении для U_x ничем нельзя пренебречь. Эта зависимость не является линейной, однако и в этом случае U_x изменяется в пределах от нуля до U.

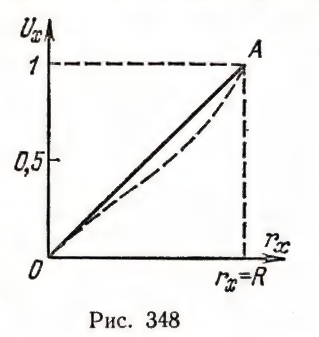


Рис. 348

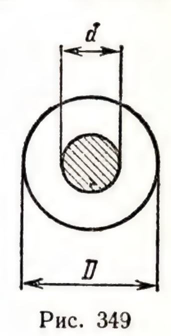


Рис. 349

704. Сечение железной части провода (рис. 349) $S_1 = \pi d^2/4$, сечение медной $S_2 = \pi(D^2 - d^2)/4$. Сопротивление центральной (железной) части провода $R_1 = \rho_1 l/S_1$, сопротивление медной оболочки $R_2 = \rho_2 l/S_2$. Общее сопротивление R биметаллического провода находится по формуле параллельного соединения проводников:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4l\rho_1\rho_2}{\pi[\rho_1 D^2 + (\rho_2 - \rho_1) d^2]} = 0{,}10 \text{ Ом}.$$

Сопротивления железного и медного проводов диаметром D равны соответственно

$$R_3 = \frac{4l\rho_1}{\pi D^2} = 0{,}61 \text{ Ом и } R_4 = \frac{4l\rho_2}{\pi D^2} = 0{,}087 \text{ Ом}.$$

705. $$R = \frac{(r_1 + r_6)(r_2 + r_3 + r_4 + r_5) + (r_2 + r_4 + r_5) r_3}{r_2 + r_3 + r_4 + r_5} = 7 \text{ Ом}.$$

706. При последовательном соединении двух проводников с сопротивлениями r_1 и r_2 их общее сопротивление $R = r_1 + r_2$, при их параллельном соединении общее сопротивление $R_0 = r_1 r_2/(r_1 + r_2)$. Отсюда $R_0 R = r_1 r_2$. Согласно известному свойству приведенного квадратного уравнения (теорема Виета) сумма корней этого уравнения равна второму его коэффициенту с обратным знаком, а произведение корней — свободному члену, т. е. r_1 и r_2 должны быть корнями квадратного уравнения $r^2 + pr + q = 0$ с $p = -R$ и $q = R_0 R$. Отсюда

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(R \pm \sqrt{R^2 - 4R_0 R}\right).$$

Подставив значения R_0 и R, найдем: $r_1 = 3$ Ом и $r_2 = 2$ Ом (или $r_1 = 2$ Ом и $r_2 = 3$ Ом).

707. Точки присоединения подводящих проводов делят длину окружности кольца в отношении 1 : 2, т. е. отстоят друг от друга по дуге на 120°.

708. $R = UR_1/(IR_1 - U) = 1$ кОм.

709. Ток в общей цепи $I = I_1 + I_2$, где I_1 — ток, текущий через лампочку, а I_2 — ток, текущий через вольтметр. Так как $U = I_1 R_1 = I_2 R_2$, то $I_2 = U/R_2$ и

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{U}{I - I_2} = \frac{R_2 U}{IR_2 - U} = 100 \text{ Ом}.$$

Поскольку $I_2 = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ А, то, пренебрегая величиной I_2 по сравнению с $I = 0{,}5$ А, получим по приближенной формуле $R_1 \approx U/I$ то же значение сопротивления: $R_1 = 100$ Ом.

710. Показания вольтметра $U = I_1R_1 = I_2R_2$, где I_1 — ток, текущий через сопротивление R_1, и I_2 — ток, текущий через вольтметр. Общий ток $I = I_1 + I_2$. Отсюда

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{U}{I - I_2} = \frac{UR_2}{IR_2 - U} = 20{,}16 \text{ Ом}.$$

Если пренебречь током I_2 по сравнению с I, то искомое сопротивление $R_1' = U/I = 20{,}00$ Ом. Ошибка в определении R_1' будет

$$\Delta R_1 = R_1 - R_1' = \frac{U}{I - I_2} - \frac{U}{I} = \frac{I_2U}{I(I - I_2)} = \frac{I_2U}{I_1I}.$$

Учитывая, что $U/I = R_1'$ и $I_2/I_1 = R_1/R_2$, найдем относительную ошибку:

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{R_1'}{R_2} = 0{,}008, \text{ или } 0{,}8\%.$$

711. Вольтметры с внутренними сопротивлениями R и $10R$ показывают соответственно $U_1 = \mathscr{E}/3$ и $U_2 = 10\mathscr{E}/21$, поэтому разница в показаниях вольтметров $U_2 - U_1 = \mathscr{E}/7$.

712. Падение напряжения на первой и на второй лампочках:

$$U_1 = \frac{UR(2r + R)}{4r^2 + 6rR + R^2} = 10{,}34 \text{ В}, \quad U_2 = \frac{UR^2}{4r^2 + 6rR + R^2} = 9{,}54 \text{ В}.$$

713. $U_1 = \dfrac{R_1R_2\mathscr{E}}{R_3(R_1 + R_2) + R_1R_2} = 80$ В.

714. $U_1 = \dfrac{r_1(2r_2 + R)\mathscr{E}}{4r_1r_2 + (r_1 + r_2)R} = 96$ В и $U_2 = \dfrac{r_2(2r_1 + R)\mathscr{E}}{4r_1r_2 + (r_1 + r_2)R} = 84$ В.

715. Эквивалентные схемы изображены на рис. 350.

$$r_2 = \frac{4R_2 - R_1}{2} = 20 \text{ Ом}, \quad r_3 = \frac{(R_1 - R_2)(4R_2 - R_1)}{2R_2 - R_1} = 20 \text{ Ом и } r_1 = 2r_2 = 40 \text{ Ом}.$$

716. Весь проводник имеет сопротивление $R = nr$, где r — сопротивление каждой из n равных частей проводника. При параллельном соединении n

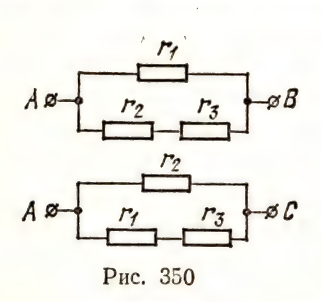


Рис. 350

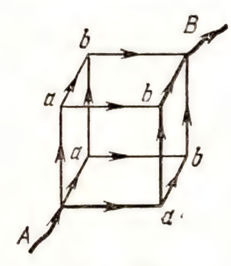


Рис. 351

одинаковых проводников общее сопротивление $R_0 = r/n$. Исключая r, получим: $R/R_0 = n^2$; n может быть лишь целым положительным числом, бо́льшим единицы. Поэтому решения возможны только в случаях, когда $R/R_0 = 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ В нашем случае $n = \sqrt{36/1} = 6$.

717. На участках Aa и bB (рис. 351), ввиду равенства сопротивлений ребер куба и их одинакового включения, ток I равномерно разветвляется по трем ветвям и поэтому в каждой из них равен $I/3$. На участках ab ток равен $I/6$, так как в каждой точке a ток вновь разветвляется по двум ребрам с равными сопротивлениями и все эти ребра включены одинаково.

Падение напряжения $U_{AB}=IR$ между точками A и B складывается из падения напряжения $U_{Aa}=(I/3)\,r$ на участке Aa, падения напряжения $U_{ab}=(I/6)\,r$ на участке ab и падения напряжения $U_{bB}=(I/3)\,r$ на участке Bb, т. е.

$$IR=\frac{Ir}{3}+\frac{Ir}{6}+\frac{Ir}{3}=\frac{5Ir}{6};\ \text{отсюда}\ R=\frac{5}{6}r.$$

718. Если к точкам C и D подключен источник тока, то падения напряжения на участках DA и DB равны, поскольку проволока однородна. Следовательно, разность потенциалов между точками A и B равна нулю. Ток на этом участке отсутствует. Поэтому наличие или отсутствие контакта в точке пересечения проводников AB и CD безразлично. Сопротивление x, таким образом, представляет собой три параллельно включенных проводника: CD с сопротивлением $2R\rho$; CAD и CBD с сопротивлением $\pi R\rho$ каждый. Из соотношения $\frac{1}{x}=\frac{1}{2R\rho}+\frac{1}{\pi R\rho}+\frac{1}{\pi R\rho}$ находим: $x=\frac{2\pi R\rho}{\pi+4}$.

719. $\Delta I=\frac{3Ul}{\rho L\,(2L+l)}=0{,}136$ А.

720. $n=5$.

721. Заданное сопротивление $R=2{,}5$ Ом достигается, когда проводники включены по схеме смешанного соединения, изображенной на рис. 352.

722. $k_0=4kk'/(2k+k')=0{,}4$ См.

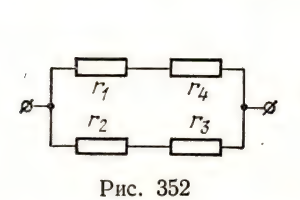


Рис. 352

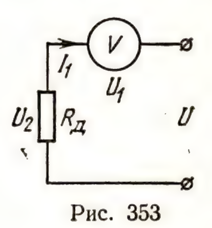


Рис. 353

723. Для измерения вольтметром более высоких напряжений, чем те, на которые рассчитана шкала, необходимо включение последовательно с этим вольтметром дополнительного сопротивления $R_д$ (рис. 353). На дополнительном сопротивлении при измерении максимального значения U должно падать напряжение $U_2=U-U_1$, поэтому дополнительное сопротивление $R_д=(U-U_1)/I_1=12$ кОм.

724. Для измерения прибором напряжения, не превышающего U, необходимо присоединить такое дополнительное сопротивление, чтобы $U=I\,(R+R_д)$, где I — максимальный ток через прибор. Отсюда $R_д=\frac{U}{I}-R=29\,995$ Ом.

725. $R_2=\frac{R_1U_1\,(U-U_2)}{U_2\,(U-U_1)}=46{,}7$ кОм.

726. Городская осветительная сеть представляет собой источник, обладающий внутренним сопротивлением, намного меньшим сопротивления вольтметра R. Поэтому напряжение $U=125$ В, которое показывал вольтметр при непосредственном включении в сеть, равно э. д. с. источника. Это значит, что оно не меняется и при включении вольтметра через сопротивление. Поэтому $U=I_1R_1+I_1R$, где $I_1=U_1/R$ — ток, текущий через вольтметр. Отсюда находим неизвестное сопротивление: $R_1=\frac{U-U_1}{U_1}R=261$ Ом.

727. Ток, текущий через вольтметр и дополнительное сопротивление, $I=U_1/R_1$. Напряжение на зажимах источника

$$U_2=I(R_1+R_2)=\frac{R_1+R_2}{R_1}U_1=340 \text{ В}.$$

728. $U_1=IRr_1/(r_1+2r_2+R)$.

729. Для измерения тока параллельно прибору включается шунт с сопротивлением

$$R_ш=\frac{i_0NR_а}{I-i_0N}=50{,}5 \text{ Ом},$$

а для измерения напряжений последовательно с ним включается дополнительное сопротивление

$$R_д=\frac{U-i_0NR_а}{i_0N}=199 \text{ Ом},$$

где $i_0N=I_а$ — ток, который течет через прибор при максимальном отклонении стрелки, а $i_0NR_а=U_а$ — напряжение на его клеммах в этом случае (см. решения задач 723 и 730).

730. Включение шунта с сопротивлением $R_ш$ показано на рис. 354. Ток I должен делиться так, чтобы через миллиамперметр протекал ток $I_а$. Через шунт при этом течет ток $I_ш$, т. е. $I=I_а+I_ш$. Падения напряжения на шунте и на миллиамперметре равны, т. е. $I_аR_а=I_шR_ш$. Отсюда найдем: $R_ш=\frac{I_аR_а}{I-I_а}\approx 0{,}05$ Ом.

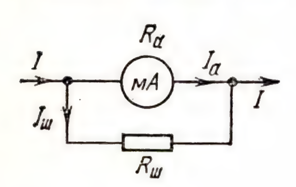


Рис. 354

Чувствительность прибора уменьшается, а цена деления прибора увеличивается в $n=I/I_а=200$ раз.

731. $I_а=\frac{\mathscr{E}R_шI}{\mathscr{E}(R_ш+r)-Ir^2}=3$ А.

732. Так как шунты присоединяются к гальванометру параллельно, то условие равенства напряжений на гальванометре и на шунтах дает:

$$0{,}1IR=0{,}9Ir_1;\quad 0{,}01IR=0{,}99Ir_2 \text{ и } 0{,}001IR=0{,}999Ir_3.$$

Отсюда

$$r_1=\frac{R}{9}=3 \text{ Ом},\quad r_2=\frac{R}{99}=0{,}273 \text{ Ом и } r_3=\frac{R}{999}=0{,}0271 \text{ Ом}.$$

733. Наибольший ток, протекающий через прибор, $I_а=N\alpha$, где N — число делений шкалы. Для измерения токов, значительно превышающих ток $I_а$, необходимо параллельно прибору включить шунт, сопротивление которого $R_ш$ значительно меньше сопротивления миллиамперметра $R_а$. Согласно решению

задачи 730 сопротивление шунта

$$R_ш = \frac{I_а R_а}{I - I_а} = \frac{N\alpha R_а}{I - N\alpha} = 5{,}125 \text{ Ом}.$$

734. Ток, текущий через шунт, $I_ш = I - I_а$. Падения напряжения на шунте и амперметре одинаковы, т. е. $I_ш R_ш = I_а R_а$. Отсюда $I_а = \frac{IR_ш}{R_а + R_ш} = 2{,}7$ А.

735. $I = I_а\left(1 + \frac{\pi d^2 R_0}{4\rho l}\right) = 12{,}9$ А.

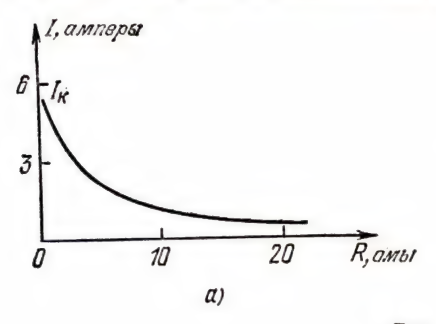
Закон Ома для полной цепи

736. Падение напряжения на сопротивлении внешней цепи $U = IR$. По закону Ома для полной цепи $I = \mathscr{E}/(R + r)$. Отсюда

$$R = \frac{U}{I} = 6 \text{ Ом и } r = \frac{\mathscr{E} - U}{I} = 4 \text{ Ом}.$$

737. По закону Ома для полной цепи $I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}$ и $I_1 = \frac{\mathscr{E}}{(R/3) + r}$. Исключив из этих уравнений R, найдем: $I_1 = \frac{3I\mathscr{E}}{\mathscr{E} + 2Ir} = 1{,}125$ А.

738. Ток в цепи $I = \mathscr{E}/(R + r)$. Напряжение на зажимах источника $U = IR = \mathscr{E}R/(R + r)$. График зависимости тока I от сопротивления R приведен на рис. 355, *а*. При $R = 0$ через источник течет ток короткого замыкания $I_к = 6$ А.



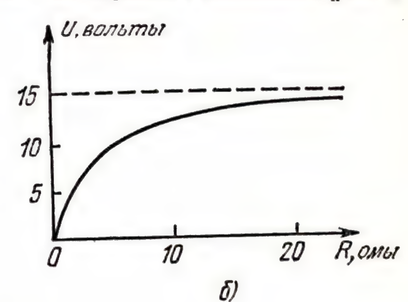


Рис. 355

С увеличением сопротивления R ток уменьшается (по гиперболическому закону), стремясь к нулю. Зависимость напряжения от R показана на рис. 355, *б*. С увеличением R напряжение стремится к $\mathscr{E}$.

739. Ток в цепи накала $I = \mathscr{E}/(R_1 + R_2 + r) = 65$ мА.

740. Сопротивление нити накала $R_2 = U/I$. Ток накала при наличии дополнительного сопротивления R_1 в цепи

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2 + r}; \quad \text{отсюда } R_1 = \frac{\mathscr{E} - U - Ir}{I} = 7{,}4 \text{ Ом}.$$

741. $R_2 = \frac{Ur}{\mathscr{E} - U} - \frac{4\rho l}{\pi d^2} = 3{,}82$ Ом.

742. $R = Ur/(\mathscr{E} - U) = 2{,}95$ кОм.

743. Разность потенциалов на зажимах батареи равна падению напряжения на внешней цепи $U=IR$, где $I=\mathscr{E}/(R+r)$. Отсюда $r=R(\mathscr{E}-U)/U=4$ Ом.

744. Величина тока в цепи $I=\dfrac{\mathscr{E}}{R_1+R_2+r}$. Падение напряжения на лампочке $U_2=IR_2$, на подводящих проводах $U_1=IR_1$. Из этих уравнений находим:

$$R_1=\frac{\mathscr{E}R_2-U_2(R_2+r)}{U_2}=2{,}1 \text{ Ом},\quad U_1=\frac{\mathscr{E}R_2-U_2(R_2+r)}{R_2}=0{,}21 \text{ В}.$$

745. Схема включения ламп показана на рис. 356. Через каждую лампу течет ток $I_0=U_0/R$. Общий ток в линии $I=nI_0=nU_0/R$. Падение напряжения на сопротивлении линии $U_1=IR_1=nU_0R_1/R$. Напряжение на зажимах машины

$$U=U_0+U_1=U_0\left(1+\frac{nR_1}{R}\right)=293 \text{ В}.$$

Э. д. с. машины

$$\mathscr{E}=U+Ir=U_0\left[1+\frac{n(R_1+r)}{R}\right]=308 \text{ В}.$$

746. $\mathscr{E}=(R+r)\,Ed/R=5$ В.

747. $q=C\mathscr{E}R/(R+r)=10^{-5}$ Кл.

748. Отношение показаний вольтметра в первом и во втором случаях

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{\frac{1}{2}R\left(\frac{10}{11}R+R\right)}{\frac{10}{11}R\left(\frac{1}{2}R+R\right)}=\frac{7}{10}.$$

749. $U_1=\mathscr{E}Ur/(\mathscr{E}r-UR_2)=4{,}4$ В.

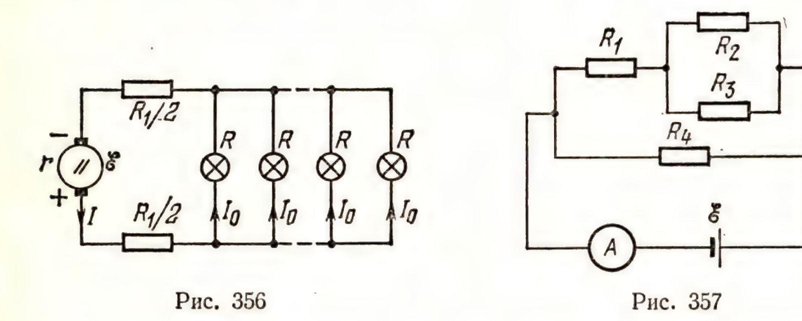


Рис. 356 Рис. 357

750. Изобразим схему иначе (рис. 357). Заменим сопротивления R_1, R_2 и R_3 сопротивлением $R=R_1+\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}$. Тогда общее сопротивление

$$R_0=\frac{RR_4}{R+R_4}=\frac{(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)\,R_4}{R_2R_3+(R_1+R_4)\,(R_2+R_3)}=\frac{56}{36} \text{ Ом}.$$

Следовательно, амперметр покажет ток $I=\mathscr{E}/R_0=1{,}8$ А.

751. $I=34\mathscr{E}/73R=0{,}1$ А.

752. Падения напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2, а также на сопротивлениях $2R_1$ и $2R_2$ пропорциональны сопротивлениям. Поэтому падение

напряжения на сопротивлении R равно нулю, и ток через него не проходит. Через сопротивление R_2 течет ток $I=\mathscr{E}/(R_1+R_2)$.

753. Общее сопротивление цепи $R=R_{ж}+R_{об}+r_0$, где $R_{ж}$ и $R_{об}$ — сопротивления жилы и оболочки до места замыкания:

$$R_{ж}=\rho_1\frac{l}{S_1}=\rho_1\frac{4l}{\pi d^2},\quad R_{об}=\rho_2\frac{l}{S_2}=\rho_2\frac{4l}{\pi(D_1^2-D_2^2)}.$$

Ток в цепи $I=\mathscr{E}/R$, отсюда

$$l=\frac{\pi(\mathscr{E}-Ir_0)}{4I\left[\frac{\rho_1}{d^2}+\frac{\rho_2}{(D_1^2-D_2^2)}\right]}=2{,}18\ \text{км}.$$

754. Конденсатор заряжен до напряжения $U=\mathscr{E}$. Это же падение напряжения будет в первый момент после замыкания ключа на сопротивлении R. Поэтому текущий по нему в этот момент ток $I=\mathscr{E}/R$.

755. После включения э. д. с. конденсаторы зарядятся и, когда ток прекратится, все пластины их, соединенные с сопротивлением R, будут иметь одинаковый потенциал. Емкости $C+C_1$ и $C+C_2$ включены последовательно к источнику. Общее падение напряжения на них $U_1+U_2=\mathscr{E}$, а заряд на их пластинах $q=(C+C_1)U_1=(C+C_2)U_2$. Отсюда

$$U_1=\frac{(C+C_2)\mathscr{E}}{2C+C_1+C_2},\quad U_2=\frac{(C+C_1)\mathscr{E}}{2C+C_1+C_2}.$$

756. Пластины конденсатора C_1 замкнуты через сопротивления R_1 и R_2. Поэтому заряд этого конденсатора $q_1=0$ (после прекращения зарядки конденсаторов C_2 и C_3). Так как после зарядки конденсаторов токи в схеме не протекают, то напряжения на конденсаторах C_2 и C_3 равны $\mathscr{E}$. Следовательно, $q_2=C_2\mathscr{E}$ и $q_3=C_3\mathscr{E}$.

757. Падение напряжения на сопротивлении R_3 равно $U=q/C=IR_3$. Отсюда ток, текущий через это сопротивление, $I=q/CR_3$. Полное сопротивление цепи

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3+r_0.$$

Э. д. с. элемента

$$\mathscr{E}=IR=\frac{q}{CR_3}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3+r_0\right)=1{,}2\ \text{В}.$$

758. $\mathscr{E}=\frac{q}{C}\left(1+\frac{2R}{r}\right)=110$ В.

759. Сопротивление конденсатора постоянному току бесконечно велико. Поэтому после зарядки конденсатора по сопротивлению R_3 ток протекать не будет. Не будет и падения напряжения на этом сопротивлении. Следовательно, точка A и верхняя пластина конденсатора будут иметь одинаковый потенциал. Потенциал же точки B будет равен потенциалу нижней пластины конденсатора. Таким образом, напряжение между обкладками конденсатора будет равно напряжению U на сопротивлении R_2. Ток в цепи $I=\mathscr{E}/(R_1+R_2)$ и $U=IR_2=$ $=\mathscr{E}R_2/(R_1+R_2)$. Отсюда заряд конденсатора $q=CU=\frac{C\mathscr{E}R_2}{R_1+R_2}$.

760. $U=\frac{\mathscr{E}R_2R_3R_4}{R_1R_2R_3+R_1R_3R_4+R_1R_2R_4+R_2R_3R_4}$ (см. решение задачи 759).

761. Напряжения на зажимах батареи в первом и во втором случаях соответственно равны $U_1=I_1R$ и $U_2=I_2R/2$. Токи в общей цепи в этих случаях $I_1=\dfrac{\mathscr{E}}{R+r}$ и $I_2=\dfrac{\mathscr{E}}{(R/2)+r}$. Отсюда $R=\dfrac{r\,(2U_2-U_1)}{U_2-U_1}=2$ Ом.

762. Падение напряжения на сопротивлении R_2 (и на вольтметре) $U=IR_0$, ток в общей цепи (рис. 358) $I=\mathscr{E}/(R_1+R_0+r)$, где $R_0=R_2R/(R_2+R)$ — общее сопротивление параллельно включенных вольтметра и сопротивления R_2. Решая совместно эти уравнения, получим:

$$R=\frac{U\,(R_1+r)\,R_2}{\mathscr{E}R_2-U\,(R_1+R_2+r)}=2050 \text{ Ом}.$$

Тот же результат можно получить, решив систему уравнений:

$$I=I_0+I_2;\quad U=I_0R;\quad U=I_2R_2;\quad \mathscr{E}=U+IR_1+Ir.$$

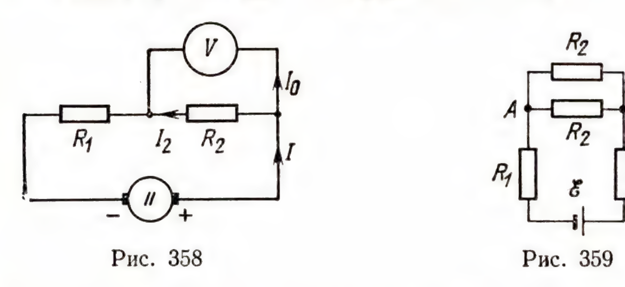


Рис. 358 Рис. 359

763. Эквивалентная схема показана на рис. 359, где сопротивления R_1 соответствуют проволокам, соединяющим элемент с кольцом, а сопротивления R_2 — двум половинам кольца. Общее сопротивление внешней цепи $R=2R_1+$ $+(R_2/2)$, где $R_1=\rho\dfrac{a}{S}$ и $R_2=\rho\dfrac{\pi a}{S}$. Ток в общей цепи $I=\mathscr{E}/(R+r)$. Напряжение между точками A и B

$$U=\frac{IR_2}{2}=\frac{\mathscr{E}R_2}{4R_1+R_2+2r}=\frac{\mathscr{E}\pi}{4+\pi+(2rS/\rho a)}=0{,}64 \text{ В}.$$

764. $\dfrac{I_1}{I_1'}=\dfrac{(R_1+r)\,R_2}{R_1R_2+r\,(R_1+R_2)}=\dfrac{11}{16}=0{,}69.$

765. $U=\dfrac{U_0\,[R_1R_3+(R_2+r)\,(2R_1+R_3)]}{R_1R_3+(R_2+r)\,(R_1+R_3)}=16$ В.

766. Сопротивление каждой пары $r/2$. Полное сопротивление внешней цепи до удаления одного из сопротивлений равно $R=3r/2$. По закону Ома для полной цепи $2I=\mathscr{E}/(R+r_1)$. Отсюда э. д. с. источника $\mathscr{E}=2I\,(R+r_1)=$ $=I\,(3r+2r_1)$. После удаления одного из сопротивлений полное сопротивление внешней цепи $R_1=(2r/2)+r=2r$. Ток в общей цепи $I_1=\mathscr{E}/(R_1+r_1)$. Через сопротивление, оставшееся без пары, будет идти ток

$$I_1=\frac{I\,(3r+2r_1)}{2r+r_1}=4 \text{ А},$$

а через остальные сопротивления будут идти токи $I_2=I_1/2=2$ А.

767. $I_1=\dfrac{\mathscr{E}R_2}{(R_3+r)\,(R_1+R_2)+R_1R_2}=1{,}98$ А; $I_2=\dfrac{\mathscr{E}R_1}{(R_3+r)(R_1+R_2)+R_1R_2}=$ $=2{,}97$ А.

768. Схема подключения лампочек изображена на рис. 360. Вторая лампочка и провода, идущие к ней, начиная от места присоединения первой лампочки, образуют последовательную цепочку с общим сопротивлением $R_2 = R_1 + R$. Эта цепочка соединена параллельно с первой лампочкой и вместе с ней образует сопротивление

$$R_3 = \frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} = \frac{(R_1 + R) R_1}{2R_1 + R}.$$

Полное сопротивление внешней цепи

$$R_0 = R + R_3 = \frac{R (R + 2R_1) + R_1 (R + R_1)}{R + 2R_1}.$$

Рис. 360

Ток, текущий через батарею,

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r + R_0} = \frac{\mathscr{E} (R + 2R_1)}{(R + r)(R + 2R_1) + R_1 (R + R_1)} = 0{,}87 \text{ А}.$$

769. Пусть э. д. с. источника $\mathscr{E}$ и его сопротивление r. Тогда $I_1 = \mathscr{E}/(R_1 + r)$ и $I_2 = \mathscr{E}/(R_2 + r)$. Из этих уравнений найдем:

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1} = 3 \text{ Ом и } \mathscr{E} = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_2 - I_1} = 40 \text{ В}.$$

770. $r = \dfrac{R_1 R_2 (U_2 - U_1)}{U_1 R_2 - U_2 R_1} = 1$ Ом.

771. При подключении к батарее амперметра через него течет ток $I_1 = \mathscr{E}/(R_1 + r)$, где $\mathscr{E}$ — э. д. с. батареи, а r — ее внутреннее сопротивление. При подключении к батарее вольтметра через него течет ток $I_2 = \mathscr{E}/(R_2 + r)$, и вольтметр показывает напряжение $U = I_2 R_2 = \mathscr{E} R_2/(R_2 + r)$. Отсюда находим:

$$r = \frac{R_2 (U - I_1 R_1)}{I_1 R_2 - U} \quad \text{и} \quad \mathscr{E} = \frac{I_1 U (R_2 - R_1)}{I_1 R_2 - U}.$$

Ток короткого замыкания (при равном нулю внешнем сопротивлении)

$$I_к = \frac{\mathscr{E}}{r} = \frac{I_1 U (R_2 - R_1)}{R_2 (U - I_1 R_1)} = 29{,}6 \text{ А}.$$

772. $r = \dfrac{\mathscr{E} (R_1 + R_2) - I R_1 R_2}{I (R_1 + R_2)} = 2$ Ом; $I_к = \dfrac{\mathscr{E}}{r} = 5$ А.

773. При зарядке аккумулятор включается навстречу источнику. Во время зарядки ток внутри аккумулятора течет от положительного полюса к отрицательному. Напряжение сети $U = I (R + r) + \mathscr{E}$, где I — ток зарядки (см. введение к этому разделу). Отсюда $I = (U - \mathscr{E})/(R + r)$. Напряжение на зажимах аккумулятора

$$U_1 = Ir + \mathscr{E} = \frac{Ur + \mathscr{E} R}{R + r} = 27{,}5 \text{ В}.$$

Последовательное и параллельное соединение источников э. д. с.

774. $\mathscr{E}_2 > \mathscr{E}_1$, поэтому ток I будет идти в направлении, указанном на рис. 118;

$$U = \mathscr{E}_1 + I r_1 = \mathscr{E}_2 - I r_2 = \frac{\mathscr{E}_2 r_1 + \mathscr{E}_1 r_2}{r_1 + r_2} = 1{,}2 \text{ В}.$$

775. Поскольку $\mathscr{E}_2 > \mathscr{E}_1$, направление тока I выберем, как показано на рис. 119. Током через вольтметр пренебрегаем ввиду того, что его сопротивление во много раз больше внутреннего сопротивления элементов. Падение напряжения на внутренних сопротивлениях элементов должно равняться разности э. д. с. элементов, так как они включены навстречу друг другу: $I(r_1+r_2)=\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1$. Отсюда $I=\dfrac{\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1}{r_1+r_2}$. Разность потенциалов между точками *а* и *б* (показание вольтметра)

$$U=\mathscr{E}_1+Ir_1=\frac{\mathscr{E}_1 r_2+\mathscr{E}_2 r_1}{r_1+r_2}=1{,}8 \text{ В}.$$

776. $U=\dfrac{\mathscr{E}_1 r_2-\mathscr{E}_2 r_1}{r_1-r_2}=-0{,}1$ В; $U=0$ при условии $\mathscr{E}_1 r_2=\mathscr{E}_2 r_1$.

777. Схема соединения показана на рис. 361. Ток в цепи $I=\dfrac{2\mathscr{E}}{R+r_1+r_2}$. Напряжения на зажимах источников $U_1=\mathscr{E}-Ir_1$ и $U_2=\mathscr{E}-Ir_2$. Решая первые два уравнения при условии $U_1=0$, получим: $R=r_1-r_2=0{,}02$ Ом. Условие $U_2=0$ неосуществимо, так как совместное решение первого и третьего уравнений приводит к значению $R<0$.

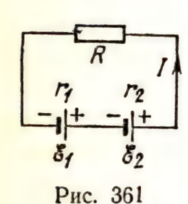


Рис. 361

778. Ток в общей цепи $I=\dfrac{2\mathscr{E}}{R+r_1+r_2}$, где $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ — общее сопротивление внешней цепи. По условию задачи напряжение на зажимах первого элемента $U=\mathscr{E}-Ir_1=0$. Отсюда найдем:

$$r_1=\frac{R_1R_2+r_2(R_1+R_2)}{R_1+R_2}=2{,}4 \text{ Ом}.$$

779. $R=r_1-r_2$ (см. решение задачи 778).

780. Ток в общей цепи $I=\dfrac{2\mathscr{E}}{R+r_1+r_2}$, где $R=\dfrac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$ — сопротивление внешней цепи. Падение напряжения на первом и втором генераторах

$$U_1=\mathscr{E}-Ir_1=\frac{\mathscr{E}\,[R_1R_2R_3+(r_2-r_1)(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)]}{R_1R_2R_3+(r_2+r_1)(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}=3 \text{ В},$$

$$U_2=\mathscr{E}-Ir_2=\frac{\mathscr{E}\,[R_1R_2R_3+(r_1-r_2)(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)]}{R_1R_2R_3+(r_1+r_2)(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}=3{,}72 \text{ В}.$$

781. По закону Ома для полной цепи ток в ней $I=\mathscr{E}/(R+r)$, где $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3$ и $r=r_1+r_2+r_3$. Напряжение на каждом элементе равно разности э. д. с. и падения напряжения на внутреннем сопротивлении элемента:

$$U_1=\mathscr{E}_1-Ir_1=\frac{\mathscr{E}_1(R+r_2+r_3)-(\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3)r_1}{R+r_1+r_2+r_3}=1{,}8 \text{ В};$$

$$U_2=\mathscr{E}_2-Ir_2=\frac{\mathscr{E}_2(R+r_1+r_3)-(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_3)r_2}{R+r_1+r_2+r_3}=0{,}3 \text{ В};$$

$$U_3=\mathscr{E}_3-Ir_3=\frac{\mathscr{E}_3(R+r_1+r_2)-(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)r_3}{R+r_1+r_2+r_3}=-0{,}1 \text{ В}.$$

Напряжение на зажимах батареи равно падению напряжения во внешней цепи: $U=U_1+U_2+U_3=2$ В. Напряжение на зажимах третьего элемента

оказалось отрицательным, так как ток определяется всеми сопротивлениями цепи и суммарной э. д. с., а падение напряжения на внутреннем сопротивлении r_3 больше, чем $\mathscr{E}_3$.

782. $U = IR = \dfrac{4\mathscr{E}R_1R_2}{R_1R_2 + 4r(R_1+R_2)} = 4{,}95$ В.

783. Напряжение на зажимах батареи $U = n\mathscr{E} - Inr$. Следовательно, $n = \dfrac{U}{\mathscr{E} - Ir} = 100$.

784. $I = \dfrac{U - n\mathscr{E}}{R + nr} = 2{,}7$ А.

785. Падение напряжения на внешнем сопротивлении, если токи текут в направлениях, указанных стрелками на рис. 124, $U = IR = \mathscr{E}_1 - I_1r = \mathscr{E}_2 - I_2r$. Учитывая, что $I = I_1 + I_2$, находим:

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{2R + r} = 0{,}1 \text{ А}, \quad I_1 = \frac{(R+r)\mathscr{E}_1 - R\mathscr{E}_2}{r(2R+r)} = -0{,}25 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{(R+r)\mathscr{E}_2 - R\mathscr{E}_1}{r(2R+r)} = 0{,}35 \text{ А}.$$

Заметим, что $I_1 < 0$. Это значит, что направление тока I_1 противоположно стрелке на рис. 124.

786. Обозначив токи и выбрав их направления, как показано на рис. 362, составим уравнения Кирхгофа. Для узла b имеем: $I_1 + I_2 - I = 0$; для контура

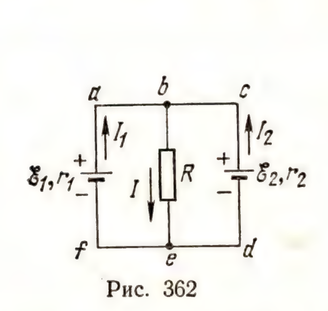


Рис. 362

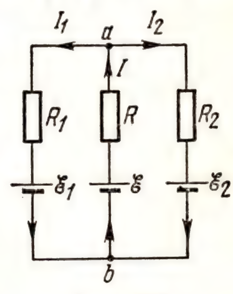


Рис. 363

$abef$ (обход по часовой стрелке) $I_1r_1 + IR = \mathscr{E}_1$ и для контура $bcde$ (обход против часовой стрелки) $I_2r_2 + IR = \mathscr{E}_2$. Из этих уравнений найдем:

$$I = \frac{\mathscr{E}_1r_2 + \mathscr{E}_2r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1r_2} = 0{,}53 \text{ А}.$$

787. Внутреннее сопротивление источников $r_0 = r + {}^1/_2 r = {}^3/_2 r$. Сопротивление параллельно включенных резисторов $R_0 = R_1R_2/(R_1 + R_2)$. Общая э. д. с. источников $\mathscr{E}_0 = 2\mathscr{E}$. Согласно закону Ома для полной цепи

$$U = \mathscr{E}_0 - I(R_0 + r_0) = 2\mathscr{E} - I\left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + \frac{3}{2}r\right) = 2{,}48 \text{ В}.$$

788. Пусть токи I_1, I_2 и I, текущие по сопротивлениям R_1, R_2 и R соответственно, имеют направления, указанные на рис. 363. Тогда $I = I_1 + I_2$. Падение напряжения между точками a и b равно $\mathscr{E}_1 + I_1R_1 = \mathscr{E} - IR =$

$=\mathscr{E}_2+I_2R_2$. Если $I=0$, то $I_1=-I_2$, $\mathscr{E}_1+I_1R_1=\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}=\mathscr{E}_2-I_1R_2$. Исключая отсюда I_1, находим:

$$\mathscr{E}=\frac{\mathscr{E}_1R_2+\mathscr{E}_2R_1}{R_1+R_2}.$$

789. Рассмотрим ту же схему без вольтметра (рис. 364). Из закона Ома для полной цепи находим ток в ней: $I=3\mathscr{E}/3r=\mathscr{E}/r$. Из закона Ома для участка цепи между точками a и b получим: $U_{ab}=-Ir+\mathscr{E}=0$. Подключение любого вольтметра к точкам, разность потенциалов между которыми равна нулю, ничего не может изменить в цепи. Поэтому вольтметр будет показывать напряжение, равное нулю.

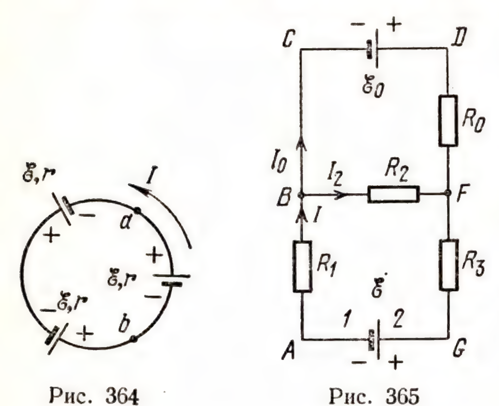


Рис. 364 Рис. 365

790. Применим правила Кирхгофа. Включим источник э. д. с. между зажимами $1-2$ и обозначим величины и направления токов, как показано на рис. 365. Для узла B имеем: $I=I_0+I_2$. При обходе контуров $ABFG$ и $BCDF$ по часовой стрелке получим уравнения

$$I(R_1+R_3)+I_2R_2=-\mathscr{E} \quad \text{и} \quad I_0R_0-I_2R_2=\mathscr{E}_0.$$

Используя условие $I_2=0$, находим:

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathscr{E}_0(R_1+R_3)}{R_0}.$$

Знак минус показывает, что полюсы источника на рис. 365 нужно поменять местами.

791. $r_1=\frac{2}{5}R=2$ Ом, $r_2=\frac{1}{5}R=1$ Ом.

792. При параллельном соединении двух элементов их внутреннее сопротивление $r/2$, а э. д. с. $\mathscr{E}$; при последовательном же соединении внутреннее сопротивление $2r$, а э. д. с. $2\mathscr{E}$. Поэтому при сопротивлении нагрузки R токи в случаях параллельного и последовательного соединений равны соответственно

$$I_1=\frac{\mathscr{E}}{R+(r/2)} \quad \text{и} \quad I_2=\frac{2\mathscr{E}}{R+2r}=\frac{\mathscr{E}}{(R/2)+r}.$$

Отсюда видно, что $I_2>I_1$, если $(R/2)+r<R+(r/2)$, т. е. если $r<R$. По условию задачи в первом случае $R_1=r$, следовательно, токи при параллельном и последовательном соединениях одинаковы. Во втором случае $R_2>r$. Поэтому ток больше при последовательном соединении.

793. $q=C\frac{\mathscr{E}_1(R_2+r_2)+\mathscr{E}_2(R_1+r_1)}{R_1+R_2+r_1+r_2}=7\cdot10^{-6}$ Кл.

794. Выберем направления токов, как показано на рис. 366, и составим уравнения Кирхгофа: $I-I_1-I_2=0$ для узла b, $I_2r_2+IR=\mathscr{E}_2$ для контура $abef$ и $I_1r_1-I_2r_2=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2$ для контура $bcde$ (в обоих случаях обход

по часовой стрелке). Из этих уравнений получим:

$$I=\frac{\mathscr{E}_1 r_2+\mathscr{E}_2 r_1}{R(r_1+r_2)+r_1 r_2}, \quad I_1=\frac{\mathscr{E}_1(R+r_2)-\mathscr{E}_2 R}{R(r_1+r_2)+r_1 r_2}, \quad I_2=\frac{\mathscr{E}_2(R+r_1)-\mathscr{E}_1 R}{R(r_1+r_2)+r_1 r_2}.$$

Ток I равен нулю тогда, когда изменена полярность включения одного из элементов и, кроме того, выполняется условие $\mathscr{E}_1 r_2=\mathscr{E}_2 r_1$. Очевидно, что $I_1=0$ при $\mathscr{E}_1=R\mathscr{E}_2/(R+r_2)$, а $I_2=0$ при $\mathscr{E}_2=R\mathscr{E}_1/(R+r_1)$.

Токи I_1 и I_2 имеют направления, указанные на рис. 366, если

$$\frac{R\mathscr{E}_2}{R+r_2}<\mathscr{E}_1<\frac{(R+r_1)\mathscr{E}_2}{R}.$$

Они меняют свое направление при

$$\mathscr{E}_1<\frac{R\mathscr{E}_2}{R+r_2} \quad \text{или} \quad \mathscr{E}_2<\frac{R\mathscr{E}_1}{R+r_1}.$$

795. $n(R-r)=R-r$. Если $R=r$, то число элементов n произвольно. При $R\neq r$ задача не имеет решения ($n=1$).

796. $\frac{U_1}{U_2}=\frac{nR+r}{R+nr}=2{,}33$; здесь U_1 — падение напряжения при последовательном соединении элементов, U_2 — при параллельном.

797. $\Delta I=\frac{n(n-1)(R-r)\mathscr{E}}{(R+nr)(nR+r)}=4$ А.

798. На рис. 367 изображена схема комбинированного соединения элементов. Общее число элементов $N=nm$. Ток во внешней цепи $I=\frac{n\mathscr{E}}{R+n(r/m)}$,

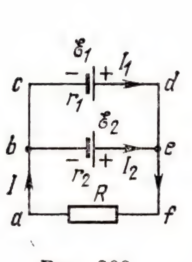


Рис. 366

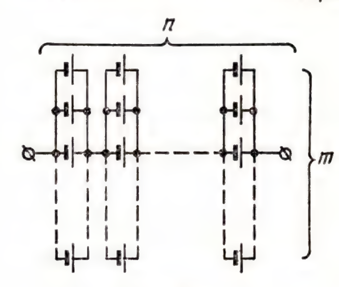


Рис. 367

где r/m — внутреннее сопротивление группы из m параллельно соединенных элементов, а $n(r/m)$ — внутреннее сопротивление n групп, соединенных последовательно.

Максимальная мощность (см. решение задачи 848) отдается во внешней цепи при равенстве внешнего сопротивления внутреннему сопротивлению источника, т. е. когда

$$R=n\frac{r}{m}=n^2\frac{r}{N}.$$

Отсюда

$$n=\sqrt{RN/r}=20, \quad m=N/n=30.$$

При этом в цепи течет ток $I=46$ А.

799. Емкостью аккумулятора называется заряд Q, который проходит по цепи при разрядке через нее заряженного аккумулятора. При разрядном токе I и времени разрядки t емкость равна $Q=It$.

1) При последовательном соединении через все банки батареи аккумуляторов течет один и тот же ток, поэтому они все разрядятся в течение одного и того же времени. Следовательно, емкость батареи будет равна емкости $Q_0=80$ ампер-часов каждого аккумулятора по отдельности.

2) При параллельном соединении n аккумуляторов через каждый из них течет лишь $1/n$ часть общего тока, поэтому при той же величине разрядного тока в общей части цепи батарея будет разряжаться в n раз дольше, чем один аккумулятор, т. е. емкость батареи в n раз больше емкости отдельного аккумулятора: $Q=nQ_0=240$ А · ч.

Заметим, однако, что энергия $W=I\mathscr{E}t=\mathscr{E}Q$, отдаваемая батареей в цепь, и при последовательном и при параллельном соединении n аккумуляторов в n раз больше, чем энергия, отдаваемая одним аккумулятором. При последовательном соединении это происходит потому, что э. д. с. батареи в n раз больше, чем э. д. с. одного аккумулятора, а при параллельном — хотя э. д. с. батареи остается той же, что для каждого аккумулятора, но Q увеличивается в n раз.

800. Каждая группа из пяти аккумуляторов, включенных последовательно, имеет емкость (см. решение задачи 799) $Q=64$ А · ч. Три параллельно включенные группы дают общую емкость батареи $Q_0=3Q=192$ А · ч.

801. $U=\frac{I_1R_1}{R_3}(R_3+R_4)=2$ В.

802. Токи и их направления указаны на рис. 133. Составляем уравнения Кирхгофа: $I_1+I_2-I_3=0$ для узла b, $I_3-I_4-I_5=0$ для узла h, $I_5-I_1-I_6=0$ для узла f, $I_1r_1+I_5r_5=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2$ для контура $abfg$ (обход по часовой стрелке), $I_2(r_2+r_3)+I_4r_4=-\mathscr{E}_2$ для контура $bcdh$ (обход против часовой стрелки) и $I_4r_4-I_6r_6-I_5r_5=0$ для контура $hdef$ (обход по часовой стрелке). Решив эту систему уравнений с учетом того, что $r_1=r_2=r_3=r_4=r_5=r_6=R=10$ Ом, получим:

$$I_1=\frac{8\mathscr{E}_1-7\mathscr{E}_2}{13R}=0{,}19\text{ А};\qquad I_2=-\frac{\mathscr{E}_1+4\mathscr{E}_2}{13R}=-0{,}17\text{ А};$$

$$I_3=\frac{7\mathscr{E}_1-11\mathscr{E}_2}{13R}=0{,}02\text{ А};\qquad I_4=\frac{2\mathscr{E}_1-5\mathscr{E}_2}{13R}=-0{,}05\text{ А};$$

$$I_5=\frac{5\mathscr{E}_1-6\mathscr{E}_3}{13R}=0{,}07\text{ А};\qquad I_6=\frac{\mathscr{E}_2-3\mathscr{E}_1}{13R}=-0{,}12\text{ А}.$$

Отрицательные значения токов I_2, I_4 и I_6 означают, что при данных величинах э. д. с. и сопротивлений эти токи текут в стороны, противоположные указанным на рис. 133.

§ 21. Работа и мощность тока. Тепловое действие тока

803. Запасенная энергия $W=\mathscr{E}It$, емкость аккумулятора $Q=It$. Отсюда $W=\mathscr{E}Q=4{,}8$ гВт · ч $=1{,}73\cdot10^6$ Дж.

804. Заряд, прошедший по проводнику, $q=It=\frac{U}{R}t=24$ Кл. Работа, произведенная при этом, $A=\frac{U^2}{R}t=288$ Дж.

805. Считаем, что энергия, выделяющаяся в проводнике при прохождении тока, полностью идет на нагревание воды. Следовательно, $qU = cm(t_2 - t_1)$, где t_1 и t_2 — начальная и конечная температура воды. Отсюда изменение температуры воды

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{qU}{cm} = 2{,}4\ \text{К}.$$

806. При двух включенных параллельно в сеть плитках ток в общей цепи $I_1 = 2N/U = 7{,}8$ А. Ток $I = 12{,}5$ А, потребляемый камином, больше, чем I_1. Поэтому нельзя ручаться за то, что предохранитель, выдерживающий ток при включении плиток, не перегорит при включении камина.

807. Ток в проводах, идущих от генератора, $I = N/U$, а плотность тока $j = I/S$. Отсюда площадь поперечного сечения проводов $S = N/jU = 6{,}7 \cdot 10^3$ мм^2.

808. $N = I(U - IR_1) = 17{,}4$ кВт.

809. Считая, что вся электрическая энергия затрачивается на испарение воды, получим: $I^2R = rm/t$. Следовательно, $I = \sqrt{rm/tR} = 19{,}4$ А.

810. По закону Джоуля — Ленца $Q = 0{,}24\,\dfrac{U^2}{R}\,t$, где $R = \rho\,\dfrac{l}{S}$ — сопротивление проволоки, а l — ее длина. Отсюда $l = \dfrac{0{,}24U^2St}{\rho Q} = 3{,}24$ м.

811. $l = \pi U^2 d^2 t/4\rho Q = 10{,}1$ м.

812. Полученная теплота идет на нагревание воды и калориметра с нагревателем, поэтому $N\tau = cm(t_2 - t_1) + C_0(t_2 - t_1)$, где t_1 — начальная и t_2 — конечная температуры. Изменение температуры

$$\Delta t = t_2 - t_1 = N\tau/(cm + C_0) = 24\ \text{К}.$$

813. Количество электрической энергии, идущей на нагревание воды, $W = \eta N\tau = cm(t_2 - t_1)$, где $m = 2$ кг — масса воды, $t_2 = 100\,°\text{C}$ — конечная температура воды. Отсюда

$$N = cm(t_2 - t_1)/\eta\tau = 800\ \text{Вт}.$$

814. Время нагревания определяется из уравнения теплового баланса (в системе СИ):

$$\tau = \frac{c_1 m(t_0 - t_1) + \lambda m + cm(t_2 - t_0)}{\eta N} = 348\ \text{с}.$$

815. $l = (U - U_1)\,U_1\pi d^2/4\rho N = 19{,}2$ м (здесь $U_1 = 120$ В).

816. Отношение выделяемых на реостате мощностей $N_1/N = 4/3$.

817. Для подачи воды на высоту h необходима мощность

$$N_1 = \Delta U + \Delta T = \rho Qgh + \frac{\rho Qv^2}{2}.$$

К. п. д. установки

$$\eta = \frac{N_1}{N} = \frac{\rho Q}{N}\left(gh + \frac{Q^2}{2S^2}\right) = 0{,}556 = 55{,}6\%.$$

818. Мощность, требуемая для движения поезда, $N_1 = Fl/t = Fv$. По условию задачи $N_1 = \eta N$. Отсюда $F = \eta N/v = 4{,}8 \cdot 10^4$ Н.

819. Ток I, идущий через обе проволоки, соединенные последовательно, одинаков. При этом в проволоках за время t выделяются количества теплоты

$Q_1 = I^2R_1t$ и $Q_2 = I^2R_2t$, где $R_1 = \rho_1 l/S$ — сопротивление железной и $R_2 = \rho_2 l/S$ — сопротивление медной проволоки, l — длина проволок и S — площадь их поперечного сечения. Отношение количеств теплоты при последовательном соединении

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 7{,}06.$$

При параллельном соединении токи в железной и медной проволоках $I_1 = U/R_1$ и $I_2 = U/R_2$, где U — напряжение сети. Количества теплоты, выделяемые в этом случае за время t, $Q_3 = (U^2/R_1)\,t$ и $Q_4 = (U^2/R_2)\,t$. Их отношение

$$\frac{Q_3}{Q_4} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 0{,}14.$$

820. $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} = 0{,}14.$

821. $t_2 = 9t_1 = 6$ мин, так как $Q = \dfrac{U^2t_1}{R/3} = \dfrac{U^2t_2}{3R}$.

822. $R = U^2/N = 72$ Ом.

823. Для нагревания воды до температуры кипения $t_2 = 100\,°\text{C}$ необходимо количество теплоты $Q = cm\,(t_2 - t_1)$, где $m = 2$ кг — масса воды в чайнике. При включении одного из нагревателей его мощность $N_1 = IU$, где I — ток, текущий через него, и U — напряжение сети. В этом случае часть теплоты, выделяемой нагревателем, идущая на нагревание воды, $Q = \eta N_1 \tau_1$, где τ_1 — время нагревания. Отсюда

$$\tau_1 = \frac{Q}{\eta N_1} = \frac{cm\,(t_2 - t_1)}{\eta N_1} = 3350\ \text{с} \approx 56\ \text{мин}.$$

При параллельном включении, как и при включении одного из нагревателей, на каждом из нагревателей будет напряжение сети U. Следовательно, в каждом из них будет выделяться та же мощность N_1, и общая мощность будет $N_2 = 2N_1$. Отсюда время нагревания воды

$$\tau_2 = \frac{Q}{\eta N_2} = \frac{\tau_1}{2} = 28\ \text{мин}.$$

При включении нагревателей последовательно общий ток через них будет $I_1 = I/2$. Поэтому общая мощность, выделяемая в них, $N_3 = I_1U = IU/2 = N_1/2$. Следовательно, время нагревания воды в этом случае

$$\tau_3 = \frac{Q}{\eta N_3} = 2\tau_1 = 1\ \text{ч}\ 52\ \text{мин}.$$

824. При последовательном соединении секций $t_3 = t_1 + t_2 = 50$ мин, при параллельном соединении секций $t_4 = t_1t_2/\,(t_1 + t_2) = 8$ мин.

825. Из уравнений $N = \dfrac{U_1^2}{R_1} = \dfrac{U_2^2}{R_2}$ находим: $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{U_2^2}{U_1^2} = 3.$

826. Мощность лампочки $N = IU = U^2/R$, где I — ток, текущий через лампочку, R — ее сопротивление. Отсюда для первой лампочки

$$R_1 = U^2/N_1 = 403\ \text{Ом}, \quad I_1 = N_1/U = 0{,}31\ \text{А},$$

для второй лампочки

$$R_2 = U^2/N_2 = 215\ \text{Ом}, \quad I_2 = N_2/U = 0{,}59\ \text{А}.$$

827. $N_2=\frac{U_2^2}{U_1^2}N_1=84$ Вт.

828. Когда лампочка включена, $N=U^2/R$, где $R=R_0(1+\alpha t)$ — сопротивление нити горящей лампочки и $R_0=R/10$ — сопротивление нити лампочки при температуре t_0. Отсюда

$$\alpha=\frac{R-R_0}{R_0t}=4{,}5\cdot10^{-3}\ \text{К}^{-1}\ \text{и}\ R_0=\frac{U^2}{10N}=14{,}4\ \text{Ом}.$$

829. $R=\frac{U^2(1+\alpha t)}{N(1+\alpha t_1)}=42{,}8$ Ом.

830. Сопротивление лампы $R_1=U^2/N$. Сопротивление линии $R_2=\rho\frac{2l}{S}$. Ток, текущий по линии и через лампу, $I_1=\mathscr{E}/(R_1+R_2)$. Падение напряжения на лампе $U_1=R_1\mathscr{E}/(R_1+R_2)$.

При подключении второй лампы общее сопротивление двух ламп равно $R_1/2$. Поэтому ток, текущий по линии, и падение напряжения на лампах равны

$$I_2=\frac{\mathscr{E}}{(R_1/2)+R_2},\qquad U_2=\frac{(R_1/2)\cdot\mathscr{E}}{(R_1/2)+R_2}.$$

Изменение напряжения

$$\Delta U=U_2-U_1=-\frac{\mathscr{E}R_1R_2}{(R_1+R_2)(R_1+2R_2)}=-\frac{2\rho lSN\mathscr{E}U^2}{(2\rho lN+SU^2)(4\rho lN+SU^2)}=-14\,\text{В}.$$

Знак минус показывает, что при включении второй лампы падение напряжения на первой уменьшается.

831. $L=\frac{S(\mathscr{E}\sqrt{R/N}-R)}{2\rho}=11{,}4$ км.

832. $U=200j\rho l=120$ кВ.

833. Напряжение на зажимах источника $U=U_1+U_2$, где U_1 — падение напряжения на нагрузке и U_2 — падение напряжения на проводах линии. Мощность, выделяемая на нагрузке, $N_1=2N=IU_1$. Потери мощности в линии $N_2=0{,}1N_1=0{,}2N=IU_2$. Отсюда

$$U_1=\frac{2N}{I},\quad U_2=\frac{0{,}2N}{I}\ \text{и}\ U=\frac{2{,}2N}{I}=33\ \text{В}.$$

834. $R=U^2/12{,}1N=9{,}3$ Ом.

835. Ток в линии $I=N/U$. Потери мощности в линии $N_1=I^2R=N^2R/U^2$. Мощность электропечи

$$N_2=N-N_1=N-\frac{N^2R}{U^2}=5{,}64\ \text{кВт}.$$

836. $N=\frac{\mathscr{E}^2R_1R_2^2}{[(R_1+R_2)(R+r)+R_1R_2]^2}=267$ Вт.

837. Ток в цепи $I=\mathscr{E}/(R+r)$. Количество теплоты, выделяемой во внешней цепи в единицу времени,

$$Q=0{,}24I^2R=\frac{0{,}24\mathscr{E}^2R}{(R+r)^2}=1{,}9\ \text{кал/с}.$$

838. Полная мощность элемента $N=I^2(R+r)$, где I — ток в цепи. Так как $I=U/R$, то

$$N=\frac{U^2}{R^2}(R+r)=13{,}5\ \text{Вт}.$$

839. Мощность, теряемая внутри батареи, равна $N = I_2^2 r$, где r — внутреннее сопротивление батареи. Если э. д. с. батареи $\mathcal{E}$, то по закону Ома для полной цепи в первом случае $\mathcal{E} = I_1 (R_1 + r)$, а во втором случае $\mathcal{E} = I_2 (R_2 + r)$. Отсюда

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} \quad \text{и} \quad N = \frac{I_2^2 (I_2 R_2 - I_1 R_1)}{I_1 - I_2} = 12 \text{ Вт.}$$

840. $r = \dfrac{N_2 I_1 - N_1 I_2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)} = 0{,}2$ Ом и $\mathcal{E} = \dfrac{N_2 I_1^2 - N_1 I_2^2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)} = 12$ В.

841. К. п. д. — это отношение полезной работы (мощности) ко всей затраченной работе (полной мощности). Полезной мощностью в данном случае является мощность, выделяемая на нагрузке, $N_1 = IU$, где I — ток в цепи. Так как э. д. с. $\mathcal{E}$ по определению представляет собой полную работу, совершаемую источником тока при перемещении по цепи единичного заряда, а в единицу времени через сечение проводника проходит заряд, численно равный I, то полная мощность источника $N_2 = \mathcal{E} I$. Таким образом, к. п. д. установки

$$\eta = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U}{\mathcal{E}} = 0{,}8 = 80\,\%.$$

842. $\eta = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + r (R_1 + R_2)} = 0{,}74 = 74\%$ (см. решение задачи 841).

843. Согласно решению задачи 841 к. п. д. схемы $\eta = U/\mathcal{E}$. Так как $U = IR$ и $\mathcal{E} = I (R + r) = U + Ir$, то

$$\eta = \frac{R}{R + r} = \frac{\mathcal{E} - Ir}{\mathcal{E}} = \frac{U}{\mathcal{E}}.$$

844. К. п. д. электрической схемы $\eta = U/\mathcal{E}$ (см. решение задачи 841), где $U = IR$ — напряжение на зажимах источника. Отсюда $I = n\mathcal{E}/R = 2{,}86$ А.

845. $r = R_1 R_2 / (R_2 - 2R_1) = 7$ Ом.

846. $\eta = \dfrac{ImR}{\mathcal{E}} = 0{,}78 = 78\%$; $r = \dfrac{n\mathcal{E} - ImR}{nI} = 1{,}2$ Ом.

Здесь $m = 2$ — число последовательно включенных одинаковых сопротивлений.

847. Полная мощность, потребляемая мотором, $N_1 = IU = 1{,}8$ кВт. На нагревание его обмоток теряется мощность $N_2 = I^2 R$. Полезная мощность $N_3 = N_1 - N_2 = I (U - IR)$. К. п. д. мотора

$$\eta = \frac{N_3}{N_1} = \frac{U - IR}{U} = 0{,}875 = 87{,}5\%.$$

Здесь не учтены потери мощности, возникающие вследствие нагревания сердечников якоря и статора вихревыми токами и вследствие трения в подшипниках.

848. Ток в цепи $I = \mathcal{E}/(R + r)$. Мощность, выделяемая во внешней цепи,

$$N_1 = I^2 R = \mathcal{E}^2 R / (R + r)^2.$$

Мощность, выделяемая внутри источника,

$$N_2 = \mathcal{E}^2 r / (R + r)^2.$$

Полная мощность

$$N = N_1 + N_2 = I\mathcal{E} = \mathcal{E}^2 / (R + r).$$

На рис. 363 построены графики зависимости N_1, N_2 и N от внешнего сопротивления. Из графика для N_1 видно, что с ростом R мощность, выде-

ляемая на внешнем сопротивлении, сначала возрастает, а затем уменьшается. Чтобы найти, при каком внешнем сопротивлении выделяется наибольшая полезная мощность, рассмотрим зависимость N_1 от тока I:

$$N_1 = N - N_2 = I\mathscr{E} - I^2 r.$$

Прибавив к этому выражению и отняв от него величину $\mathscr{E}^2/4r$, можно N_1 представить в виде

$$N_1 = \frac{\mathscr{E}^2}{4r} - r\left(I - \frac{\mathscr{E}}{2r}\right)^2.$$

Отсюда следует, что максимальная полезная мощность, равная $N_0 = \mathscr{E}^2/4r$, выделяется при токе $I = \mathscr{E}/2r$, т. е. при $R = r$. В этом случае к. п. д. $\eta = N_0/N = 1/2 = 50\%$.

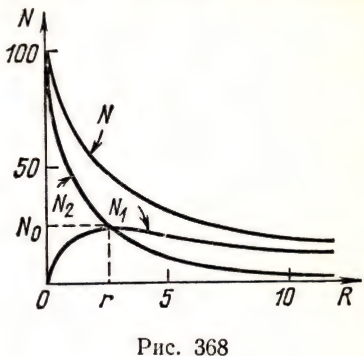


Рис. 368

Мощности N_2 и N с увеличением нагрузки R монотонно уменьшаются. При этом быстрее уменьшается мощность N_2, выделяемая внутри источника. Поэтому с ростом R к. п. д. возрастает.

Из графика для N_1 видно также, что одна и та же полезная мощность может быть получена при двух значениях R, одно из которых больше, а другое меньше, чем r.

849. При э. д. с. источника $\mathscr{E}$ и внешнем сопротивлении R_1 по цепи течет ток $I_1 = \mathscr{E}/(R_1 + r)$ и на внешнем сопротивлении выделяется мощность $N = I_1^2 R_1 = \mathscr{E}^2 R_1/(R_1 + r)^2$. При внешнем сопротивлении R_2 ток в цепи $I_2 = \mathscr{E}/(R_2 + r)$ и мощность, выделяющаяся на внешнем сопротивлении, $N = I_2^2 R_2 = \mathscr{E}^2 R_2/(R_2 + r)^2$. Отсюда получаем для определения R_1 квадратное уравнение:

$$R_1^2 - \frac{R_2^2 + r^2}{R_2} R_1 + r^2 = 0.$$

Решив его, найдем: $R_1 = 0{,}625$ Ом или $R_1 = R_2 = 10$ Ом (см. также решение задачи 848).

850. $\frac{Q_2}{Q_1} = 2\left(\frac{R + r}{R + 2r}\right)^2 = 1{,}62.$

851. $\frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{R + 2r}{2R + r}\right)^2 = 1{,}56.$

852. $n = I^2 r/(\mathscr{E} I - N) = 5.$

853. $\frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{R + 2r}{2R + r}\right)^2 = \frac{9}{16}$; бóльшая мощность — при параллельном соединении.

854. Составляющая силы тяжести в направлении движения $F = P \sin\alpha \approx P \operatorname{tg}\alpha = 0{,}01P$ меньше, чем сила сопротивления $f = 0{,}03P$. Поэтому мотор совершает работу против равнодействующей этих сил. За время t величина этой работы $A = (f - F)vt = \eta IUt$, где I — ток, текущий через мотор. Отсюда

$$I = \frac{0{,}02Pv}{\eta U} = 245 \text{ А}.$$

855. При напряжении на зажимах источника U и силе тока в линии I мощность источника $IU = I^2R + N$. Отсюда ток в линии

$$I = \frac{1}{2R}\left(U \pm \sqrt{U^2 - 4NR}\right).$$

Два значения тока соответствуют двум возможным сопротивлениям нагрузки, при которых на нагрузке выделяется одна и та же мощность (см. решение задачи 848). Знак минус перед корнем соответствует меньшему току, а следовательно, и меньшим потерям мощности в линии.

Падение напряжения в линии:

$$U' = IR = \frac{1}{2}\left(U \pm \sqrt{U^2 - 4NR}\right).$$

Потери мощности в линии:

$$N' = IU' = \frac{1}{2R}\left(U^2 - 2NR \pm U\sqrt{U^2 - 4NR}\right).$$

К. п. д. передачи (отношение мощности, потребляемой установкой, к мощности, отдаваемой источником в линию):

$$\eta = \frac{N}{IU} = \frac{IU - N'}{IU} = \frac{U - U'}{U} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{U^2 - 4NR}}{U}\right).$$

При $U = U_1 = 6200$ В падение напряжения в линии $U' = 50$ В (или 6150 В), $N' = 508$ Вт (или $7{,}6 \cdot 10^6$ Вт) и $\eta = 99{,}8\%$ (или 0,8%). Цифры в скобках соответствуют большему значению тока.

При $U = U_2 = 620$ В под корнем получается отрицательное число. Это значит, что при сопротивлении линии $R = 5$ Ом в этом случае нельзя получить требуемую мощность ни при каком значении сопротивления нагрузки.

856. $R = \frac{U_2 - U_1}{N} = 200$ Ом; $l = \frac{RS}{\rho} = \frac{(U_2 - U_1)\, U_1 S}{N\rho} = 100$ м.

857. $N = 2\mathscr{E}^2/9r = 16$ Вт.

858. Из условия $R_1/R_3 = R_2/R_4$ следует, что ток через сопротивление R_5 не идет. Поэтому полное сопротивление R цепи складывается из сопротивления двух параллельных цепочек R_1, R_2 и R_3, R_4 и внутреннего сопротивления элемента r:

$$R = \frac{(R_1 + R_2)\,(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} + r.$$

Схема потребляет общую мощность

$$N = \frac{\mathscr{E}^2}{R} = \frac{\mathscr{E}^2\,(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2)\,(R_3 + R_4) + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)\, r} = 36 \text{ Вт}.$$

859. $N = 8\mathscr{E}^2/R$.

860. Через лампочку должен течь ток $I = N/U$, где U — номинальное напряжение. Поэтому четырехвольтовые лампочки рассчитаны на ток 0,5 А, а восьмивольтовые — на ток 0,25 А. Следовательно, необходимо смешанное включение: последовательно с десятью четырехвольтовыми лампочками нужно включить две одинаковые группы восьмивольтовых лампочек параллельно друг другу. На дополнительных группах восьмивольтовых лампочек будет падение напряжения $U - nU_1$, а число лампочек в обеих группах должно быть $n_1 = 2\,\frac{U_0 - nU_1}{U_2} = 20$ штук.

861. $r=\sqrt{R_1R_2}=6$ Ом.

862. $N_1=2N/3$ и $N_2=N/3$.

863. Потери мощности в подводящих проводах $N_1=0{,}04N$. Ток в них $I=\sqrt{N_1/R}$. Падение напряжения на нагрузке $U_1=N/I=N\sqrt{R/N_1}$. Падение напряжения на подводящих проводах $U_2=IR=\sqrt{RN_1}$. Напряжение на зажимах источника

$$U=U_1+U_2=(N+N_1)\sqrt{R/N_1}=208 \text{ В}.$$

864. Общая величина заряда на соединенных пластинах $Q=|Q_1-Q_2|$. Емкость образовавшегося после соединения конденсатора равна C_1+C_2. Энергия, запасенная в конденсаторах до соединения, $W_1=\frac{Q_1^2}{2C_1}+\frac{Q_2^2}{2C_2}$. Энергия конденсатора, образовавшегося после соединения, $W_2=\frac{(Q_1-Q_2)^2}{2(C_1+C_2)}$. Количество выделившегося тепла

$$q=W_1+W_2=\frac{(Q_1C_1+Q_2C_2)^2}{2C_1C_2(C_1+C_2)}.$$

865. При разомкнутом ключе конденсаторы C_1 и C_2 имеют заряды q, напряжения на них соответственно $U_1=q/C$ и $U_2=q/2C$, причем $U_1+U_2=\mathscr{E}$. Отсюда $q=2C\mathscr{E}/3$, $U_1=2\mathscr{E}/3$ и $U_2=\mathscr{E}/3$. Аналогично находим заряды $Q=C\mathscr{E}/3$ на конденсаторах C_3 и C_4 и напряжения на них $U_3=2\mathscr{E}/3$ и $U_4=\mathscr{E}/3$. Так как $U_1=U_3$, потенциалы пластин конденсаторов, присоединенных к ключу, одинаковы. При замыкании ключа ничего не меняется. Полная энергия батареи конденсаторов равна сумме энергий, запасенных в каждом из них, т. е.

$$W=\frac{qU_1}{2}+\frac{qU_2}{2}+\frac{QU_3}{2}+\frac{QU_4}{2}=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}.$$

§ 22. Электролиз

866. По второму закону Фарадея $k=C\frac{A}{n}=2{,}39\cdot10^{-7}$ кг/Кл.

867. $t=m/kI=2$ ч.

868. По второму закону Фарадея $m=\frac{1}{F}\frac{A}{n}It=\frac{1}{F}xq$, где $x=A/n$, а $q=$ $=It$. Отсюда

$$F=\frac{xq}{m}=9{,}65\cdot10^4 \text{ Кл/моль}.$$

869. Ионы веществ в растворе электролита несут на себе число элементарных зарядов, равное валентности n. При выделении массы вещества, численно равной его химическому эквиваленту, через раствор проходит заряд, численно равный числу Фарадея F, т. е. $nN_0=N$ элементарных зарядов. Следовательно, величина каждого элементарного заряда

$$e=F/N=1{,}60\cdot10^{-19} \text{ Кл}=4{,}8\cdot10^{-10} \text{ ед. заряда СГСЭ}.$$

870. По второму закону Фарадея $k_1=C\frac{A_1}{n_1}$ и $k_2=C\frac{A_2}{n_2}$. Отсюда электрохимический эквивалент золота

$$k_2=\frac{k_1n_1A_2}{n_2A_1}=6{,}8\cdot10^{-7} \text{ кг/Кл}.$$

871. Ток в ваннах $I = jS$. По первому закону Фарадея массы веществ при электролизе $m_1 = k_1 jSt = 23{,}8$ г; $m_2 = k_2 jSt = 21{,}6$ г; $m_3 = k_3 jSt = 80{,}5$ г.

872. $j = \rho l/kt = 124$ А/м².

873. По первому закону Фарадея $m = kIt$, где I — истинное значение тока в цепи. Отсюда $I = m/kt = 1{,}6$ А, т. е. в показание амперметра надо внести поправку $\Delta I = I - I_0 = +0{,}1$ А.

874. По первому закону Фарадея $m = kIt$, где I — ток в цепи. Уточненное значение падения напряжения на сопротивлении $U = IR = mR/kt = 4{,}97$ В. Разница между показанием вольтметра и уточненным значением падения напряжения $\Delta U = U - U_0 = -1{,}03$ В.

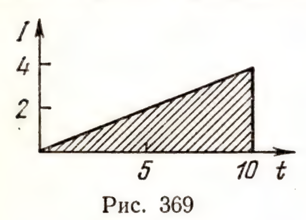


Рис. 369

875. Толщина слоя

$$d = \frac{AIt}{nF\rho NS} = 5{,}8 \cdot 10^{-5}\,\text{м} = 0{,}058 \text{ мм}.$$

876. В первой ванне железо двухвалентно ($n_1 = 2$), а во второй ванне трехвалентно ($n_2 = 3$). Поэтому при прохождении через растворы одинаковых зарядов выделяются различные массы железа на катодах: в первой ванне $m_1 = A_1 q/n_1 F = 27{,}93$ кг, во второй ванне $m_2 = A_2 q/n_2 F = 18{,}62$ кг. Так как валентность атомов хлора $n = 1$, то на аноде каждой ванны выделяется масса хлора $m = Aq/nF = 36{,}357$ кг.

877. $R = \dfrac{NA^2t^2}{m^2F^2n^2} = 0{,}4$ Ом. Атомная масса водорода $A = 0{,}001$ кг/моль и $n = 1$ — его валентность.

878. $U = Wm/q = kW = 10{,}8$ В.

879. К. п. д. установки $\eta = \dfrac{IUt}{W} = \dfrac{Uq}{W}$, где q — заряд, прошедший через ванну. Масса выделившейся меди $m = kq$. Отсюда $m = k\eta W/U = 0{,}445$ кг.

880. Средний ток $I = (I_1 + I_2)/2$. Заряд, протекший через раствор, $q = It = \dfrac{I_1 + I_2}{2} t = 20$ Кл. Нахождение заряда графическим путем показано на рис. 369. На графике зависимости тока от времени заштрихованная площадь численно равна заряду.

Масса меди, выделившейся на катоде,

$$m = kq = \frac{k(I_1 + I_2)\,t}{2} = 6{,}56 \cdot 10^{-6} \text{ кг} = 6{,}56 \text{ мг}.$$

881. $m = k(U - \mathscr{E})\,t/R = 9{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг.

882. $T = pV\mu/kRIt = 312$ К.

883. $W_1 = \dfrac{U_1}{U} W$.

§ 23. Магнитное поле тока и электромагнитная индукция

884. Магнитная индукция $B = 2$ Т $= 2 \cdot 10^4$ Гс. В системе единиц СГСМ $B = \mu H$, поэтому в среде с $\mu = 1$ имеем: $B = H = 2 \cdot 10^4$ Э.

В системе единиц СИ $B = \mu\mu_0 H$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м — магнитная постоянная. Отсюда $H = B/\mu\mu_0 = 1{,}59 \cdot 10^6$ А/м.

885. Магнитная индукция $B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 \dfrac{In}{l} = 62{,}8$ Т.

886. В системе единиц СИ $\mu = B/\mu_0 H = 5000$.

887. На прямой проводник с током, расположенный перпендикулярно к линиям индукции в однородном магнитном поле, действует сила $F = BIl$. Направление силы определяется по правилу левой руки. На рис. 370 кружком со знаком плюс в середине обозначен ток, уходящий перпендикулярно к плоскости рисунка, в которой лежат векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{F}$.

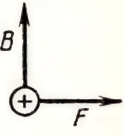


Рис. 370

В системе единиц СГСМ $B = \mu H$, $I = 1$ А $= 0{,}1$ ед. тока в СГСМ и для вакуума $\mu = 1$. Следовательно, $F = \mu HIl = 10$ дин.

В системе единиц СИ $B = \mu\mu_0 H$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м. Так как 1 А/м $= 4\pi \cdot 10^{-3}$ Э, то $H = 100$ Э $= 10^5/4\pi$ А/м. Таким образом, $F = \mu\mu_0 HIl = 10^{-4}$ Н.

888. На проводник действуют две одинаковые силы T натяжения нитей, сила тяжести P и со стороны магнитного поля сила $F = BIl \sin\alpha$, где B — магнитная индукция, α — угол между направлением проводника и направлением вектора магнитной индукции (в нашем случае $\alpha = 90°$ и $\sin\alpha = 1$). Подразумевается, что направления тока и вектора магнитной индукции таковы, что сила F направлена вниз (рис. 140). В противном случае натяжение нитей при пропускании тока не возрастает, а уменьшается, и нити не оборвутся.

Если проводник находится в равновесии, то $2T - P - F = 0$. Отсюда $T = \frac{P+F}{2}$. Для разрыва одной из нитей необходимо выполнение условия

$$T = \frac{P+F}{2} \geqslant p, \quad \text{или} \quad I \geqslant \frac{2p - P}{Bl}.$$

В системе единиц СИ 1 Э $= 10^3/4\pi$ А/м, $B = \mu\mu_0 H = 4{,}9 \cdot 10^{-2}$ Т (можно считать, что $\mu = 1$, так как μ заметно отличается от единицы лишь внутри ферромагнетиков), $P = 5$ гс $= 4{,}9 \cdot 10^{-2}$ Н, $p = 4$ гс $= 3{,}92 \cdot 10^{-2}$ Н, $l = 0{,}2$ м. В результате получим $I \geqslant 3$ А.

В системе единиц СГСМ, когда $B = H$ (при $\mu = 1$), $P = 5$ гс $= 4{,}9 \cdot 10^3$ дин, $p = 4$ гс $= 3{,}92 \cdot 10^3$ дин, $l = 20$ см, найдем: $I \geqslant 0{,}3$ ед. тока СГСМ.

889. Если проводник расположен перпендикулярно к направлению вектора магнитной индукции, то $F = BIl$, где I — ток в проводнике. Отсюда $I = F/Bl = 15$ А (в системе единиц СИ). В системе единиц СГСМ $F = 1{,}5 \cdot 10^4$ дин, $B = 200$ Гс, $l = 50$ см. В этом случае $I = 1{,}5$ ед. тока СГСМ.

890. На проводник действуют сила T натяжения двух нитей, сила тяжести P и со стороны магнитного поля, которое перпендикулярно к проводнику, сила $F = BIl$ (на рис. 371 ток по проводнику A, расположенному перпендикулярно к плоскости рисунка, идет от читателя). При равновесии проводника суммы проекций сил (с учетом их знаков) на вертикальное и горизонтальное направления равны нулю, т. е. $P - T\cos\alpha = 0$ и $F - T\sin\alpha = 0$. Отсюда

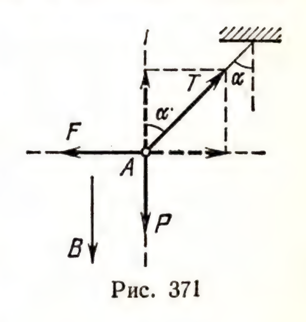


Рис. 371

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{P} = \frac{BIl}{P} = \frac{\mu\mu_0 HIl}{P} \approx 1$$

(здесь мы положили $\mu = 1$). Следовательно, $\alpha \approx 45°$.

891. В системе единиц СИ

$$H=\frac{I}{2\pi r}=4\ \text{А/м},\quad B=\mu\mu_0 H=\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}=5\cdot 10^{-6}\ \text{Т}.$$

В системе единиц СГСМ

$$H=\frac{2I}{r}=0{,}05\ \text{Э},\quad B=\mu H=\frac{2\mu I}{r}=0{,}05\ \text{Гс}.$$

892. Вокруг бесконечно длинного прямолинейного проводника, по которому течет ток I_1, образуется магнитное поле, напряженность которого на расстоянии r от проводника $H=I_1/2\pi r$, а индукция $B=\mu\mu_0 H=\mu\mu_0 I_1/2\pi r$. При этом векторы $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$ направлены одинаково и лежат в плоскости, перпендикулярной к проводнику. На отрезок второго проводника длиной l, по которому течет ток I_2, магнитное поле действует с силой $F=BI_2 l\sin\alpha$, где α — угол между направлением отрезка проводника и направлением вектора магнитной индукции. Так как второй проводник параллелен первому, то $\alpha=90^\circ$ и $\sin\alpha=1$. Таким образом,

$$F=\frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r};\quad \text{отсюда}\quad \mu_0=\frac{2\pi F r}{\mu I_1 I_2 l}.$$

Подставив значения $I_1=I_2=1$ А, $l=1$ м, $F=2\cdot 10^{-7}$ Н, $\mu=1$, найдем:

$$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Н/А}=4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Г/м}.$$

893. $f=\frac{F}{l}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}=0{,}1$ Н (см. решение задачи 892).

894. На рис. 372 показано направление вектора магнитной индукции и положение площадки в обоих случаях. По определению поток магнитной индукции $\Phi=BS\cos\alpha$, где α — угол между перпендикуляром $\boldsymbol{n}$ к площадке и направлением вектора магнитной индукции. В первом случае $\alpha=0$, $\cos\alpha=1$ и $\Phi=BS=1{,}25\cdot 10^{-3}$ Вб. Во втором случае $\alpha=\varphi$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами) и $\Phi=BS\cos\varphi=6{,}25\cdot 10^{-4}$ Вб.

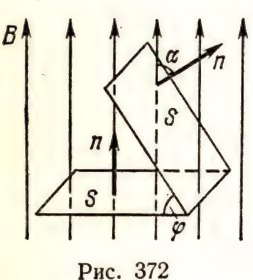


Рис. 372

895. $\Phi=\mu\mu_0 HS\cos\alpha=\mu\mu_0 HS=1{,}256\cdot 10^{-2}$ Вб (в системе единиц СИ).

$\Phi=\mu HS=1{,}256\cdot 10^{6}$ Мкс (в системе единиц СГСМ).

896. $L=n\,\Delta\Phi/(I_2-I_1)=0{,}125$ Г.

897. $\mathscr{E}=-(B_2-B_1)\,S/\Delta t=1{,}6\cdot 10^{-3}$ В.

898. $\Phi_0=\mathscr{E}\,\Delta t/n=10^{-3}$ Вб.

899. Начальный магнитный поток через рамку $\Phi_1=BS\cos\alpha$, где $S=a^2\sqrt{3}/4$ — площадь рамки и $B=\mu_0 H$ — магнитная индукция (здесь мы полагаем, что магнитная проницаемость среды $\mu=1$). Конечный магнитный поток $\Phi_2=0$. Изменение магнитного потока $\Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1=-BS\cos\alpha$. Э. д. с. индукции

$$\mathscr{E}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{\sqrt{3}\,\mu_0 a^2 H\cos\alpha}{4\Delta t};\quad \text{отсюда}\quad a=2\sqrt{\frac{\mathscr{E}\,\Delta t}{\sqrt{3}\,\mu_0 H\cos\alpha}}=0{,}10\ \text{м}.$$

900. $H=\frac{\mathscr{E}\,\Delta t}{\mu l^2\cos\alpha\cdot 10^{-8}}=1000$ Э.

901. $I=\frac{\mathscr{E}}{R}=-\frac{\mu S}{R}\cdot\frac{\Delta H}{\Delta t}\cdot 10^{-8}=10^{-5}$ А $=10$ мкА (по условию задачи $\Delta H/\Delta t=-100$ Э/с).

902. $q=-\frac{\mathscr{E}\,\Delta t}{R}=-\frac{\Delta\Phi}{R}=-\frac{\mu\mu_0 HS}{R}=10^{-4}$ Кл.

903. Э. д. с. самоиндукции $\mathscr{E}=-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$, где $\Delta I=I_2-I_1$. Отсюда $L=-\frac{\mathscr{E}\,\Delta t}{I_2-I_1}=2{,}5$ Г.

904. Э. д. с. индукции $\mathscr{E}=-\Delta\Phi/\Delta t$, где $\Delta\Phi=B\,\Delta S=Blv\,\Delta t$ — магнитный поток через площадь ΔS, «заметенную» проводником за время Δt (рис. 373). Опуская знак минус, найдем: $\mathscr{E}=Blv=1$ В.

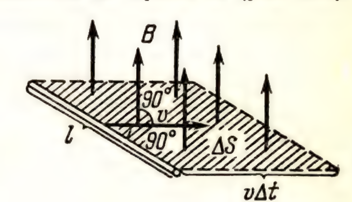


Рис. 373

905. Площадь, «заметаемая» крыльями самолета за время Δt, равна $\Delta S=lv\,\Delta t$. Магнитный поток через эту площадь $\Delta\Phi=B\,\Delta S\cos\alpha$, где $B\cos\alpha=\mu H_0$ — вертикальная составляющая магнитной индукции земного магнитного поля (α — угол между вертикалью и направлением магнитной индукции), $\mu=1$ — магнитная проницаемость воздуха. Разность потенциалов U между концами крыльев самолета равна э. д. с. индукции, которая наводится в металлических крыльях и корпусе самолета при его движении в магнитном поле Земли, т. е.

$$U=\mathscr{E}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\cdot 10^{-8}=\mu H_0 lv\cdot 10^{-8}=0{,}15\ \text{В}.$$

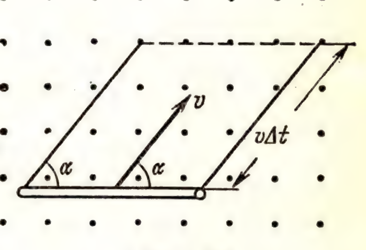


Рис. 374

906. Площадь, «заметаемая» за время Δt проводником, скорость которого v направлена под углом α к самому проводнику, представляет собой площадь параллелограмма (рис. 374) и равна $\Delta S=lv\,\Delta t\sin\alpha$. Магнитный поток через эту площадь $\Delta\Phi=B\,\Delta S$, где $B=\mu\mu_0 H$ — магнитная индукция ($\mu=1$ — магнитная проницаемость среды). Разность потенциалов между концами проводника U равна э. д. с. индукции в этом проводнике: $U=\mathscr{E}=\Delta\Phi/\Delta t=\mu\mu_0 Hlv\sin\alpha$. Отсюда

$$v=\frac{U}{\mu\mu_0 Hl\sin\alpha}=1\ \text{м/с}.$$

Если все величины, кроме U и $\mathscr{E}$, измерять в системе единиц СГСМ, то $B=\mu H$, $U=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\cdot 10^{-8}$ и $v=\frac{U}{\mu Hl\sin\alpha\cdot 10^{-8}}=100$ см/с.

907. $I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{\mu H\cdot lv\cdot 10^{-8}}{R}=10^{-5}$ А $=10$ мкА.

908. Пока рамка находится целиком в области пространства, где имеется магнитное поле, магнитный поток через поверхность, ограниченную рамкой, при движении рамки не меняется. Поэтому общей э. д. с. индукции в рамке не возникает. После того как одна из сторон рамки вышла за границу поля

(см. рис. 375, на котором магнитное поле, перпендикулярное к плоскости чертежа, обозначено точками), магнитный поток через поверхность, ограниченную рамкой, будет изменяться. За время Δt рамка перемещается на расстояние $v\,\Delta t$ и часть площади рамки, которую пересекает магнитное поле, уменьшается на величину $\Delta S = lv\,\Delta t$. Поток магнитной индукции за это время изменяется на величину $\Delta\Phi = -B\,\Delta S = -\mu H l v\,\Delta t$. В рамке возникает э. д. с. индукции

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\cdot 10^{-8} = \mu H l v \cdot 10^{-8}\ \text{В}$$

и по рамке течет ток

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mu H l v}{R}\cdot 10^{-8} = 2\cdot 10^{-6}\ \text{А} = 2\ \text{мкА}$$

(здесь мы положили $\mu = 1$). Когда рамка целиком выйдет из области, где имеется магнитное поле, э. д. с. индукции снова станет равной нулю.

909. $q = S^2\,\Delta B^2/(R\cdot\Delta t^2) = 10^{-9}$ Дж $= 2{,}4\cdot 10^{-10}$ кал.

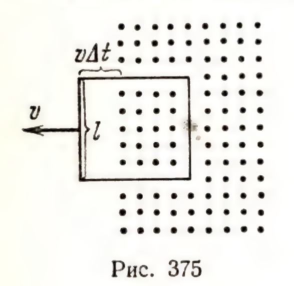


Рис. 375

910. $I = vlB/2\rho\,(l + vt)$.

911. $R = B^2 l^2 v/F = 0{,}625$ Ом.

912. При равномерном изменении магнитной индукции в рамке возникает э. д. с. $\mathscr{E} = \Delta\Phi/\Delta t$, где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока, Δt — время, в течение которого происходило это изменение. Ток в рамке $I = \mathscr{E}/R = \Delta\Phi/R\,\Delta t$ при этом постоянный. Заряд, протекший по цепи за время Δt, равен $q = I\,\Delta t = \Delta\Phi/R$. Начальный поток магнитной индукции $\Phi_1 = BSn$. При изменении направления магнитного поля на обратное магнитный поток меняет знак. Поэтому конечный магнитный поток $\Phi_2 = -BSn$. Изменение магнитного потока $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 2BSn$. Таким образом,

$$q = 2BSn/R = 10^{-6}\ \text{Кл} = 1\ \text{мкКл}.$$

913. $q = BSd/2\rho$ (см. решение предыдущей задачи).

914. Сумма э. д. с. источника и э. д. с., индуцируемой в цепи при равномерном изменении тока, равна $\mathscr{E} + L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$. Ток изменяется по закону, заданному условиями задачи, $I = I_0 - \dfrac{\Delta I}{\Delta t}\,t$, где $I_0 = \mathscr{E}/R$. Сопротивление цепи в любой момент времени

$$R_t = \frac{\mathscr{E} + L\,(\Delta I/\Delta t)}{\dfrac{\mathscr{E}}{R} - \dfrac{\Delta I}{\Delta t}\,t}.$$

В момент времени $t = 2$ с искомое сопротивление $R_t = 1{,}75$ Ом.

915. Рассмотрим контуры CMD и CND, площади которых $S = \pi d^2/8$ (рис. 376). Магнитные потоки через каждый контур в моменты времени t_1 и t_2 будут

$$\Phi_1 = B_1 S = kt_1\pi d^2/8 \quad \text{и} \quad \Phi_2 = B_2 S = kt_2\pi d^2/8.$$

Э. д. с. индукции в каждом контуре (поскольку магнитное поле меняется равномерно)

$$\mathscr{E}=\frac{\Phi_2-\Phi_1}{t_2-t_1}=\frac{k\pi d^2}{8}.$$

Пусть э. д. с. индукции вызывает в проводниках токи, величина и направление которых показаны на рисунке. Взяв направление обхода контуров против часовой стрелки и применяя правила Кирхгофа, получим уравнения:

$$I_1R_1+IR_2=\mathscr{E};\quad I_2R_2-I_1R_1=\mathscr{E};\quad I_2+I_1=I.$$

Здесь $R_1=\rho d$ — сопротивление проводника CD, а $R_2=\rho\pi d/2$ — сопротивления проводников CMD и CND. Решая эти уравнения, найдем:

$$I_1=0,\quad I=I_2=\frac{\mathscr{E}}{R_2}=\frac{kd}{4\rho}.$$

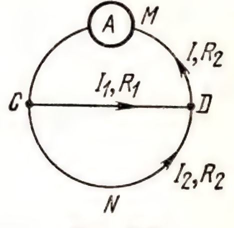


Рис. 376

916. На рис. 377, *а* показаны силы, действующие на рамку со стороны магнитного поля. Их направления определяются правилом левой руки. На стороны рамки KN и LM действуют силы F_1 и F_2, направленные противоположно по одной прямой. Они не создают момента сил. На стороны рамки KL и MN действуют силы $F_3=F_4=IBl$. Эти силы образуют пару, создающую момент сил M, равный произведению величины одной из этих сил на расстояние между линиями, по которым они направлены. Как видно из рис. 377, *б*,

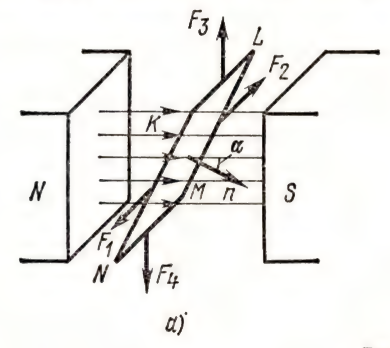


Рис. 377

на котором показан вид рамки со стороны KN, это расстояние равно $l\sin\alpha$. Таким образом,

$$M=F_3 l\sin\alpha=IBl^2\sin\alpha=5\cdot10^{-8}\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

917. Общая э. д. с., возникающая в рамке при движении в однородном магнитном поле, равна нулю, так как равно нулю изменение магнитного потока через площадь, ограниченную рамкой. Поэтому равен нулю и ток в рамке.

Общую э. д. с. индукции, возникающую в рамке, можно рассматривать также как сумму э. д. с., наводимых в каждой из сторон рамки. Если направление скорости движения проводника составляет угол φ с самим проводником,

а направление магнитного поля, в котором движется проводник, перпендикулярно к направлениям и проводника, и его скорости, то э. д. с. индукции, наводимая в нем, $\mathscr{E} = Blv \sin\varphi$ (см. решение задачи 906). Поэтому э. д. с. в сторонах рамки AF и BC не возникает. В стороне AB возникает э. д. с. $\mathscr{E}_0 = Bl_0v$. В сторонах FD и CD возникают э. д. с. $\mathscr{E}_1 = Bl_1v\sin\varphi_1$ и $\mathscr{E}_2 = Bl_2v\sin\varphi_2$. Так как $l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 = l_0$, то общая э. д. с. в сторонах FD и CD будет $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = Bl_0v$, т. е. равна по величине э. д. с. в стороне AB, но имеет с ней противоположное (при обходе по контуру) направление, поэтому ток в рамке не возникает.

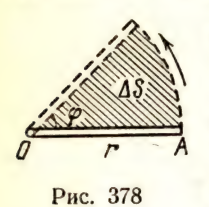


Рис. 378

918. При напряженности магнитного поля H и магнитной проницаемости среды μ (здесь $\mu = 1$) магнитная индукция $B = \mu\mu_0 H$. За время Δt проводник, вращаясь с угловой скоростью ω, повернется на угол $\varphi = \omega\,\Delta t$ и «заметет» сектор, площадь которого $\Delta S = \frac{\varphi r^2}{2} = \frac{1}{2}\omega r^2\,\Delta t$ (рис. 378). Поток магнитной индукции через эту площадь и э. д. с., наводимая в проводнике, равны:

$$\Delta\Phi = B\,\Delta S = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H\omega r^2\,\Delta t, \quad \mathscr{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H\omega r^2.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{2\mathscr{E}}{\mu\mu_0 H r^2} = 75 \text{ рад/с}.$$

§ 24. Переменный ток

919. В первом случае

$$\Phi = \Phi_0 \sin\omega t = BS\sin 2\pi nt,$$

где $\Phi_0 = 2\cdot10^{-2}$ Вб. Во втором случае

$$\Phi = \Phi_0\sin(\omega t + \varphi) = \Phi_0\sin(\omega t + 30^\circ).$$

Отсчет угла φ (начальной фазы) производится от горизонтального направления в сторону вращения рамки.

920. Рамка, занимавшая в начальный момент времени горизонтальное положение, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 2\pi n$, в момент времени t будет составлять с горизонтальной плоскостью угол $\beta = \omega t = 2\pi nt$ (рис. 379). В течение последующего очень малого промежутка времени Δt она повернется еще на малый угол $\omega\,\Delta t$. Пусть сторона рамки, параллельная оси, равна a и сторона рамки, перпендикулярная к оси, равна b. За время Δt проводник рамки MN переместится в положение $M'N'$ и «заметет» при этом площадь

$$\Delta S = a\frac{b}{2}\omega\,\Delta t = \frac{S}{2}\omega\,\Delta t,$$

где $S = ab$ — площадь рамки. Магнитный поток через площадь, «заметенную» проводником, $\Delta\Phi = B\,\Delta S\cos\alpha$, где α — угол между перпендикуляром q к плоскости $MM'N'N$ и направлением вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$. Если промежуток времени Δt очень мал, то угол α практически равен углу β, так как направление перпендикуляра q мало отличается от направления стороны

рамки KN, а вектор $\boldsymbol{B}$ по условию направлен горизонтально. Таким образом,

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2} BS\omega\, \Delta t \cos \omega t.$$

Следовательно, в момент времени t в проводнике MN наводится э. д. с., величина которой

$$\mathscr{E}_1 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} BS\omega \cos \omega t.$$

Вектор $\boldsymbol{B}$ параллелен плоскостям, в которых при вращении рамки движутся проводники KN и LM. Поэтому через «заметаемые» этими проводниками площади магнитный поток равен нулю и э. д. с. не возникает. В проводнике KL, как легко видеть, возникает э. д. с., равная по величине $\mathscr{E}_1$ и направленная так, что при обходе по контуру рамки эти э. д. с. складываются. В результате суммарная э. д. с. в рамке

$$\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_1 = BS\omega \cos \omega t.$$

Наибольшее значение э. д. с. принимает в те моменты времени, когда $\cos \omega t$ максимален, т. е. равен единице. Поэтому амплитуда э. д. с.

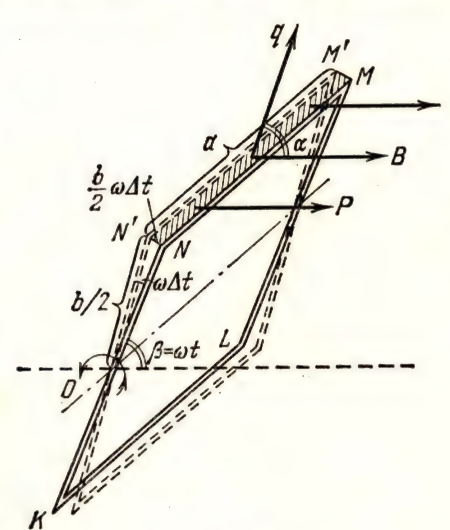


Рис. 379

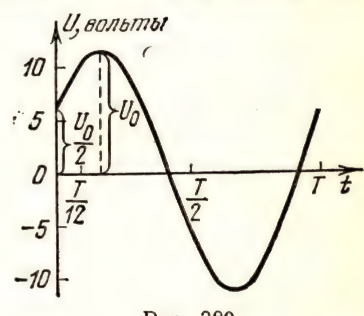


Рис. 380

$$\mathscr{E}_0 = BS\omega = 2\pi n BS = 0{,}614 \text{ В}.$$

При изменении числа оборотов в единицу времени в три раза амплитуда также увеличится в три раза и будет равна $\mathscr{E}_0' \approx 1{,}884$ В.

921. $\Phi_0 = \mathscr{E}_0/2\pi n = 4{,}8 \cdot 10^{-2}$ Вб (см. решение задачи 920).

922. $n = \mathscr{E}_0/2\pi mBS = 8$ об/с (см. решение задачи 920).

923. Круговая частота $\omega = 2\pi/T = 628$ с$^{-1}$, частота $f = 1/T = 100$ Гц. В момент времени $t = T/12$ мгновенное значение напряжения

$$U = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{6}\right) = U_0 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_0.$$

Отсюда $U_0 = 2U/\sqrt{3} = 11{,}6$ В. График напряжения показан на рис. 380.

924. Индуктивное сопротивление катушки $X_L = \omega L$, где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота тока. Амплитуда тока $I_0 = U_0/X_L$. Отсюда $L = U_0/2\pi f I_0 = 0{,}051$ Г.

925. $L = \frac{X_L}{2\pi f} = 0{,}080$ Г; $I_0 = \frac{U_0}{X_L} = \frac{\sqrt{2}\,U_э}{X_L} = 0{,}28$ А.

926. $N = \frac{U_0^2 R}{2Z^2} = \frac{U_0^2 R}{2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]} = 0{,}5$ Вт; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - (1/\omega C)}{R} = -3{,}02$; $\varphi = -72°40'$.

927. Индуктивное сопротивление $X_L = \omega L$, емкостное сопротивление $X_C = 1/\omega C$ и полное сопротивление

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота тока.

При частоте $f_1 = 50$ Гц ($\omega = 314$ с$^{-1}$) имеем:

$$X_L = 157 \text{ Ом}, \quad X_C = 3{,}18 \text{ кОм}, \quad Z = 3{,}33 \text{ кОм}.$$

При частоте $f_2 = 10$ кГц ($\omega = 6{,}28 \cdot 10^4$ с$^{-1}$)

$$X_L = 31{,}4 \text{ кОм}, \quad X_C = 15{,}9 \text{ Ом}, \quad Z = 31{,}4 \text{ кОм}.$$

928. $U_0 = I_0 X_C = I_0 T/2\pi C = 0{,}7$ кВ.

929. $I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{\sqrt{2}\,U_э}{\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}} = 1{,}4$ А.

930. $f = \sqrt{2U_э^2 - I_0^2 R^2}/2\pi I_0 L = 61$ Гц.

931. Полное реактивное сопротивление

$$X = \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = \left|2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}\right|.$$

Если при частоте f_0 полное реактивное сопротивление равно нулю, то $2\pi f_0 L = 1/2\pi f_0 C$. Отсюда

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 711 \text{ Гц}.$$

932. $U_0 = Q\mathscr{E}_0 = 420$ В, где $Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{R\omega C}$ (см. решение задачи 931).

933. В цепи постоянного тока $I = U/R = 2$ А. Индуктивное сопротивление $X_L = \omega L = 2\pi f L = 5$ кОм. Активным сопротивлением дросселя в цепи переменного тока можно пренебречь по сравнению с индуктивным ($R \ll X_L$). Амплитуда напряжения $U_0 = \sqrt{2}\,U_э$. Амплитуда переменного тока

$$I_0 = \frac{U_0}{X_L} = \frac{\sqrt{2}\,U_э}{2\pi f L} = 5{,}6 \text{ мА}.$$

934. Мощность $N = \frac{I_0 U_0}{2}\cos\varphi$. Отсюда $\cos\varphi = \frac{2N}{I_0 U_0} = 0{,}8$.

935. Эффективное значение тока $I_э = I_0/\sqrt{2}$. Количество теплоты

$$Q = I_э^2 Rt = \frac{1}{2} I_0^2 Rt = 3{,}96 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

936. $m = \dfrac{U^2 \tau (1+\alpha t)}{rR(1+\alpha t_1)} = 5 \cdot 10^{-3}$ кг $= 5$ г.

937. В сети с эффективным напряжением $U_э$ амплитуда напряжения $U_0 = \sqrt{2}\, U_э$. Принимая начальную фазу напряжения за нуль, запишем закон изменения напряжения с течением времени:

$$U_э = U_0 \sin \omega t = U_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

(график зависимости напряжения от времени показан на рис. 381). Зажигания и гашения лампы происходят в моменты времени t_m, когда напряжение в сети равно напряжению зажигания, т. е.

$$U_з = \left| U_0 \sin \frac{2\pi}{T} t_m \right|; \text{ отсюда } \left| \sin \frac{2\pi}{T} t_m \right| = \frac{U_з}{U_0} = \frac{U_з}{\sqrt{2}\, U_э} = 0{,}867.$$

Наименьшее положительное значение, которое может иметь величина $(2\pi/T)\, t_m$, стоящая под знаком синуса, составляет $60^\circ = \pi/3$. В общем случае

$$\frac{2\pi t}{T} = m\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

где m — целое число ($m = 0, 1, 2, \ldots$). Следовательно,

$$t_m = m\frac{T}{2} \pm \frac{T}{6}.$$

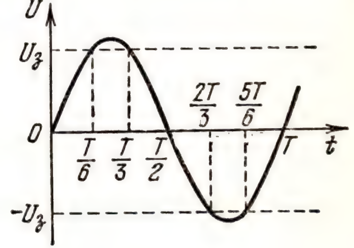


Рис. 381

Знак плюс здесь соответствует моментам зажигания лампы (напряжение в эти моменты возрастает по абсолютной величине), а знак минус — моментам гашения лампы (напряжение убывает по абсолютной величине). В частности, первая вспышка происходит при $t_0 = T/6$ и первое гашение при $t_1 = \dfrac{T}{2} - \dfrac{T}{6} = \dfrac{T}{3}$. Таким образом, длительность вспышки

$$\Delta t = t_1 - t_0 = T/6 = 0{,}0033 \text{ с}.$$

Вспышки и гашения происходят в течение каждой половины периода. Следовательно, число вспышек в единицу времени $n = 2/T = 100$.

938. Амплитуда переменного напряжения на выходе автотрансформатора $U_0 = \sqrt{2}U$. Закон изменения этого напряжения с течением времени: $U_1 = U_0 \sin 2\pi f t$. Напряжение между электродами лампы $U_2 = \mathcal{E} + U_1 = \mathcal{E} + \sqrt{2}U \sin 2\pi f t$ (график зависимости этого напряжения от времени приведен на рис. 382).

Когда $\sin 2\pi f t = 1$, напряжение U_2 принимает наибольшее значение: $U_{2\,макс} = \mathcal{E} + \sqrt{2}U = 100$ В. Когда $\sin 2\pi f t = -1$, напряжение U_2 принимает наименьшее значение: $U_{2\,мин} = \mathcal{E} - \sqrt{2}U = 20$ В, т. е. $U_{2\,макс} > U_з$ и $U_{2\,мин} < U_з$.

Таким образом, напряжение на электродах лампы становится больше напряжения зажигания лишь один раз в течение периода, поэтому частота вспышек равна частоте тока $f=200$ Гц.

939. Мощность, подводимая к первичной обмотке (затраченная мощность), $N_1=I_1U_1$. Мощность, отдаваемая вторичной обмоткой нагрузке (полезная мощность), $N_2=I_2U_2$. К. п. д трансформатора

$$\eta=\frac{N_2}{N_1}=\frac{I_2U_2}{I_1U_1}=0{,}95=95\%.$$

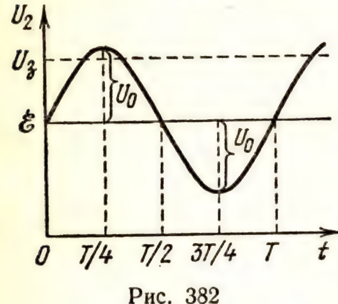


Рис. 382

940. Э. д. с. во вторичной обмотке $\mathscr{E}=U_1/k$. Напряжение на зажимах вторичной обмотки

$$U_2=\mathscr{E}-Ir=\frac{U_1}{k}-Ir=21{,}5 \text{ В}.$$

941. Э. д. с., наводимая во вторичной обмотке, должна быть равна падению напряжения на сопротивлении нагрузки U_2 и падению напряжения на сопротивлении обмотки Ir, поэтому отношение чисел витков в обмотках

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{U_2+Ir}{U_1}; \text{ отсюда } n_2=\frac{(U_2+Ir)\,n_1}{U_1}=400 \text{ витков.}$$

942. Наводимая во вторичной обмотке э. д. с. $\mathscr{E}_2=U_2+I_2r$. Коэффициент трансформации трансформатора

$$k=\frac{U_1}{\mathscr{E}_2}=\frac{U_1}{U_2+I_2r}=10.$$

Ток в первичной обмотке находим из условия $U_1I_1=\mathscr{E}_2I_2$. Коэффициент полезного действия (отношение мощности на зажимах вторичной обмотки к мощности, потребляемой первичной обмоткой)

$$\eta=\frac{U_2I_2}{U_1I_1}=\frac{U_2}{\mathscr{E}_2}=\frac{U_2}{U_2+I_2r}=0{,}91=91\%.$$

943. $U_2=\dfrac{U_1}{k}-Ir=6$ В, $R=\dfrac{U_2}{I}=\dfrac{U_1}{kI}-r=1{,}2$ Ом.

944. $U_0=\sqrt{U_{10}^2+2U_{10}U_{20}\cos\varphi_0+U_{20}^2}=155$ В; $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{U_{20}\sin\varphi_0}{U_{10}+U_{20}\cos\varphi_0}=0{,}34$; $\varphi=19°$.

§ 25. Электромагнитные колебания и волны

945. Пренебрегая излучением электромагнитной энергии в пространство, мы можем считать, что вся запасенная в конденсаторе энергия перейдет в теплоту, т. е. $Q=W=q^2/2C=5\cdot10^{-3}$ Дж.

946. Электрическая энергия максимальна в те моменты времени, когда конденсатор полностью заряжен и ток в контуре равен нулю. Ее величина

$$W=CU_0^2/2=CU_э^2=10^{-7} \text{ Дж}$$

($U_0=\sqrt{2}U_э$ — амплитуда напряжения на конденсаторе). Эта энергия равна полной энергии контура. В те же моменты времени, когда конденсатор пол-

ностью разряжен, по катушке идет наибольший ток. Внутри катушки образуется магнитное поле наибольшей величины, т. е. контур обладает наибольшей магнитной энергией. Если считать, что потери энергии в контуре за период колебаний пренебрежимо малы, то по закону сохранения энергии максимальная магнитная энергия равна максимальной электрической.

947. $T=2\pi\sqrt{LC}=2\pi r\sqrt{\pi\varepsilon_0 L/d}=1{,}26\cdot10^{-6}$ с;

$T_1=2\pi\sqrt{LC_1}=2\pi r\sqrt{\pi\varepsilon\varepsilon_0 L/d}=2{,}51\cdot10^{-6}$ с.

948. $\frac{f_2}{f_1}=\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1{,}01.$

949. $f_1=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$, $f_2=\frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1+C_2)}}$. Отсюда $C_2=C_1\frac{f_1^2-f_2^2}{f_2^2}=15$ мкФ.

950. Частоты собственных колебаний контура $f_1=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C}}$ и $f_2=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C}}$. Отсюда получаем, что индуктивность катушки должна меняться в пределах:

$$\text{от } L_1=\frac{1}{4\pi^2Cf_1^2}=16\text{ мГ} \quad \text{до } L_2=\frac{1}{4\pi^2Cf_2^2}=10\text{ мГ}.$$

951. $d_1/d_2=(\lambda_2/\lambda_1)^2=64$, где d_1 и d_2 — расстояния между пластинами.

952. Граничные значения частот диапазона $f_1=c_0/\lambda_1$ и $f_2=c_0/\lambda_2$, где $c_0=$ $=3\cdot10^8$ м/с — скорость распространения электромагнитных волн, $\lambda_1=1$ мм $=$ $=10^{-3}$ м и $\lambda_2=10$ мм $=10^{-2}$ м — длины волн, ограничивающие диапазон. Подставляя значения c_0, λ_1 и λ_2, получим:

$$f_1=3\cdot10^{11}\text{ Гц}=300\text{ ГГц и } f_2=3\cdot10^{10}\text{ Гц}=30\text{ ГГц}.$$

953. Длина волны рентгеновских лучей $\lambda=c_0/f=10^{-8}$ см $=0{,}1$ нм $=1$ Å.

954. Диапазон длин волн генератора от $\lambda_1=c_0/f_1=3\cdot10^3$ м $=3$ км до $\lambda_2=c_0/f_2=11{,}6$ м.

955. Так как L (Г) $=L$ (см)$/10^9$ и C (Ф) $=C$ (см)$/9\cdot10^{11}$, то

$$\lambda\text{ (см)}=c_0\text{ (см/с)}\cdot T\text{ (с)}=c_0\text{ (см/с)}\cdot2\pi\sqrt{L\text{ (Г) }C\text{ (Ф)}}=$$
$$=3\cdot10^{10}\cdot2\pi\sqrt{\frac{L\text{ (см)}}{10^9}\cdot\frac{C\text{ (см)}}{9\cdot10^{11}}}=2\pi\sqrt{L\text{ (см)}\cdot C\text{ (см)}}.$$

956. Согласно решению задачи 955 λ (см) $=2\pi\sqrt{L\text{ (см) }C\text{ (см)}}=1{,}88\cdot10^5$ см, или $\lambda=1{,}88$ км.

957. $f=f_0\sqrt{n}=36$ кГц.

958. $\lambda=2\pi c\sqrt{C\mathscr{E}\frac{\Delta t}{\Delta I}}=2450$ м ($c=3\cdot10^8$ м/с — скорость распространения радиоволн).

959. $f=\frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1+C_2)}}=53$ кГц, $\omega=2\pi f=\frac{1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}=3{,}33\cdot10^5$ с$^{-1}$, $T=2\pi\sqrt{L(C_1+C_2)}=18{,}8$ мкс, $\lambda=c_0T=2\pi c_0\sqrt{L(C_1+C_2)}=5650$ м.

960. $f=\frac{c_0}{\lambda}=60$ МГц, $L=\frac{1}{C}\left(\frac{\lambda}{2\pi c_0}\right)^2=3{,}52\cdot10^{-7}$ Г.

961. $\lambda=c_0T=2\pi c_0\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 SL/d}=2350$ м.

962. Период колебаний контура $T=2\pi\sqrt{LC}$, где C — емкость конденсатора. Длина волны $\lambda=c_0T$. Отсюда

$$C=\frac{1}{L}\left(\frac{\lambda}{2\pi c_0}\right)^2=5{,}07\cdot10^{-10}\ \Phi=507\ \text{п}\Phi.$$

963. Длины волн, ограничивающих диапазон, $\lambda_1=c_0T_1=2\pi c_0\sqrt{LC_1}$ и $\lambda_2=c_0T_2=2\pi c_0\sqrt{LC_2}=6\pi c_0\sqrt{LC_1}$, где $c_0=3\cdot10^8$ м/с — скорость распространения электромагнитных волн, T_1 и T_2 — наименьший и наибольший периоды колебаний контура, L — индуктивность катушки контура. Отсюда $\lambda_2=3\lambda_1=9$ м. Таким образом, диапазон длин волн — от $\lambda_1=3$ м до $\lambda_2=9$ м.

964. $\frac{C_2}{C_1}=\left(\frac{\lambda_2 f_1}{c_0}\right)^2=2{,}25$; C_2 — новая емкость переменного конденсатора.

965. Частота колебаний электромагнитной волны при переходе из одной среды в другую не меняется, поэтому при скорости распространения c длина волны $\lambda=c/f=200$ м.

ГЛАВА IV

ОПТИКА

§ 26. Распространение света. Скорость света. Волновые и квантовые свойства света

966. $H=\frac{vt+l_1-l_2}{l_1-l_2}h=8{,}5$ м (рис. 383).

967. Источник будет виден в трубу, если за время $t=2l/c$ прохождения светом пути $ABOCD$ призма успеет повернуться на 1/8, 2/8, 3/8, ..., вообще $k/8$ часть полного оборота. Поэтому $\frac{2l}{c}=\frac{1}{f}\cdot\frac{k}{8}$, откуда

$$f=k\frac{c}{16l}\approx 528\,k,\ \text{где}\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

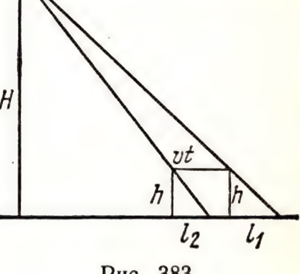


Рис. 383

968. Длина волны в вакууме $\lambda_1=c/f=4\cdot 10^{-7}$ м $=400$ нм, в алмазе $\lambda_2=c/nf=1{,}62\cdot 10^{-7}$ м $=162$ нм.

969. $n=ch/\lambda\varepsilon=1{,}5$.

970. $\varepsilon=h\nu=hc/\lambda\approx 4\cdot 10^{-19}$ Дж.

971. $\lambda=\frac{hc}{P+W_к}=2{,}5\cdot 10^{-7}$ м $=2500$ Å $=250$ нм.

972. По закону Эйнштейна для фотоэффекта $h\nu=P+\frac{mv^2}{2}\geqslant P$. Следовательно, фотоэффект наблюдается при частоте $\nu\geqslant P/h=5\cdot 10^{14}$ с$^{-1}$.

§ 27. Отражение и преломление света на плоской границе

973. $x=R\frac{h}{H}=3$ м.

974. Диаметр «зайчика» $D=\left(\frac{H}{h}+1\right)d=13$ см в обоих случаях.

975. Точка S и ее изображения S_1 и S_2 в зеркалах лежат на окружности радиуса h с центром в точке A (рис. 384). Очевидно, что угол S_1AS_2 в два раза больше угла $\alpha=\omega t$, на который повернулось зеркало. Поэтому $r=2h\sin\alpha$ и

$$t=\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{r}{2h}=20\ \text{с}.$$

976. $\cos\alpha = \frac{b^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} = 0;\ \alpha = \pi/2.$

977. 1) Луч возвращается к источнику, описав правильный треугольник (рис. 385), поэтому углы падения луча на зеркала $\alpha = 30°$, углы скольжения $\beta = 60°$ и треугольник ABC — правильный. Угол между зеркалами $\varphi = \beta = 60°$.

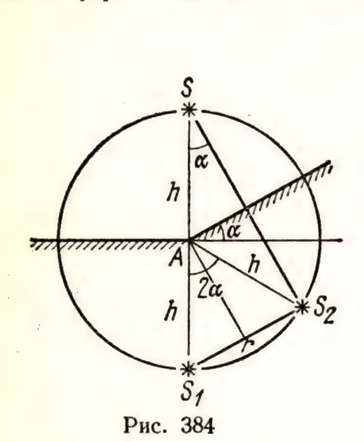


Рис. 384

Рис. 385

2) Чтобы возвратиться к источнику по пройденному пути, луч должен упасть на второе зеркало перпендикулярно к его поверхности (рис. 386). Поэтому треугольник ABC — прямоугольный, и угол $\varphi = 30°$.

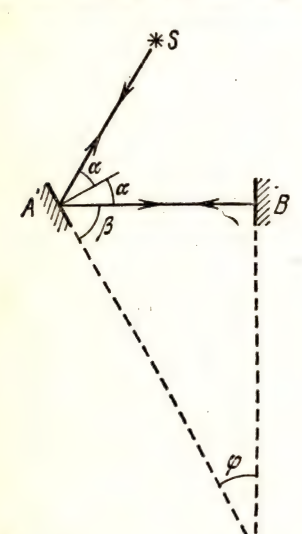


Рис. 386

978. Пусть угол падения луча на зеркало до поворота последнего равен φ. Тогда угол отражения также равен φ. Угол между лучом падающим и лучом отраженным равен 2φ. После поворота зеркала угол падения стал $\varphi + \alpha$, угол отражения также $\varphi + \alpha$, угол между лучом падающим и отраженным стал $2(\varphi + \alpha)$. Так как падающий

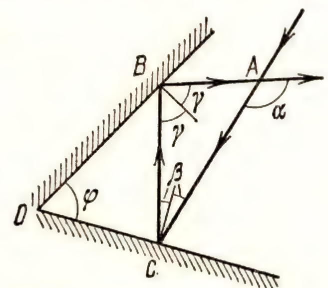


Рис. 387

луч остался неподвижным, следовательно, отраженный луч повернулся на угол

$$\beta = 2(\varphi + \alpha) - 2\varphi = 2\alpha = 54°.$$

979. $L = 2l \operatorname{tg} 60^\circ \approx 3{,}46$ м.

980. Пусть β — угол падения луча на первое зеркало, γ — на второе (рис. 387). Очевидно, что $\alpha = 2\beta + 2\gamma$ (как внешний угол треугольника ABC). Кроме того, из треугольника OBC получаем:

$$\varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \pi.$$

Отсюда

$$\alpha = 2(\beta + \gamma) = 2\varphi$$

и не зависит от угла падения луча.

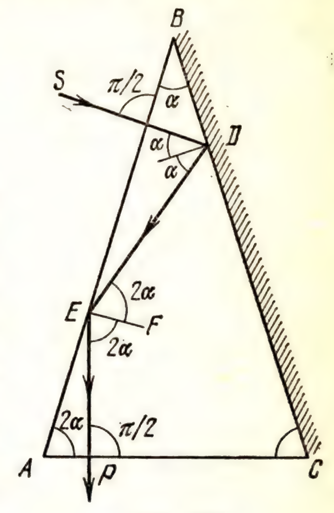


Рис. 388

981. После двух отражений от зеркал луч идет по направлению, составляющему угол 2φ с направлением луча падающего (см. задачу 980). Этот угол не зависит от положения зеркал и потому не меняется при их вращении. Отраженный луч, не поворачиваясь, перемещается параллельно самому себе. Искомый угол $\gamma = 0$.

982. Ход лучей в призме показан на рис. 388. Угол падения луча на посеребренную грань BC равен углу ABC призмы (эти углы имеют взаимно перпендикулярные стороны). Обозначим его α. Очевидно, что угол падения на непосеребренную грань AB призмы $\angle DEF = \angle SDE = 2\alpha$ (внутренние накрест лежащие при параллельных SD и EF и секущей DE). На рисунке изображен случай, когда этот угол больше предельного для данного сорта

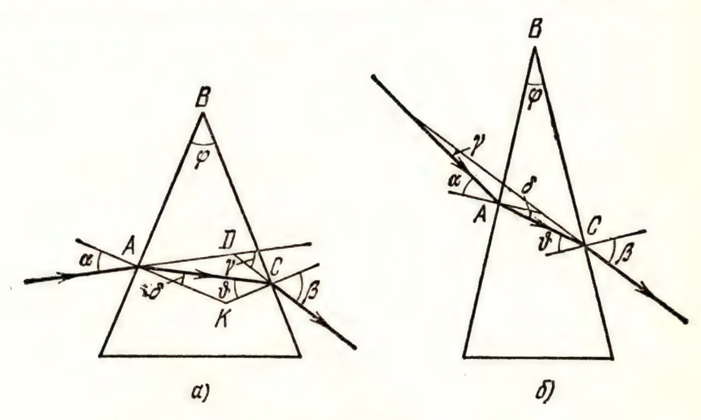


Рис. 389

стекла. $\angle EAC = \angle FEP = 2\alpha$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Так как $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \pi$, то

$$\angle ABC = \alpha = 36^\circ; \quad \angle EAC = \angle ACB = 2\alpha = 72^\circ.$$

983. Обозначим через δ и ϑ углы, которые составляет луч, идущий внутрь призмы, с перпендикулярами к граням (рис. 389, *а*). Сумма углов треуголь-

ника AKC равна π, а сумма углов четырехугольника $ABCK$ равна 2π, причем $\angle BAK = \angle BCK = \pi/2$. Следовательно, $\varphi = \delta + \vartheta$. В то же время γ — внешний угол треугольника ADC, поэтому $\gamma = (\alpha - \delta) + (\beta - \vartheta) = \alpha + \beta - \varphi$. Искомый угол

$$\varphi = \alpha + \beta - \gamma = \pi/4.$$

Построение хода луча в призме, показанное на рис. 389, *б*, приводит к решению

$$\varphi = \beta + \gamma - \alpha = \frac{5}{12}\pi.$$

Эти решения получены лишь при помощи геометрических условий. Однако одновременно с этими условиями должны выполняться также и законы преломления. В частности, во втором случае угол падения на вторую грань призмы $\vartheta = \varphi + \delta > \varphi$. Так как показатель преломления стекла $n > 1$ и $\sin\vartheta/\sin\beta = 1/n$, то $\sin\beta > \sin\vartheta$ и $\beta > \varphi$. Последнее неравенство противоречит значениям $\beta = 60° = \frac{4}{12}\pi$ и $\varphi = \frac{5}{12}\pi$, поэтому второе решение следует отбросить.

984. $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{v}$, т. е. $n \approx 1{,}4$; $v = \frac{c}{n} \approx 2{,}14 \cdot 10^8$ м/с.

985. $\sin\delta = \sin\alpha\left(n\cos\alpha - \sqrt{1 - n^2\sin^2\alpha}\right) \approx 0{,}25$; $\delta = 14°30'$.
Либо: $\delta = \arcsin(n\sin\alpha) - \alpha = 14°30'$.

986. $\vartheta = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \varphi + \arcsin(n\sin\alpha)\right] = \frac{1}{2}(90° + 20° + 60°) = 85°$.

987. По закону преломления $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$. Кроме того, $\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta = \pi$ (рис. 390). Отсюда $\sin\beta = \cos\alpha$ и, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{n_2}{n_1}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{n_2}{n_1}$.

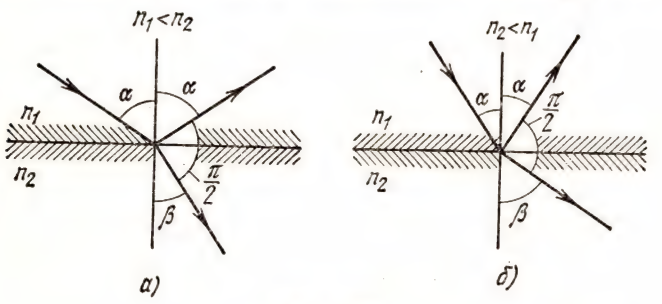


Рис. 390

988. Относительный показатель преломления $n = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = 1{,}33$ (α — угол падения).

989. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{h}$, $R = r + H\operatorname{tg}\beta$, $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ (рис. 391). Отсюда

$$R = r\left(1 + \frac{H}{\sqrt{n^2h^2 + r^2(n^2 - 1)}}\right).$$

Максимальный радиус тени $R_{макс} = r + \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} = 7$ м будет при $h = 0$.

990. $r = R - \frac{h}{\sqrt{n^2-1}} \approx 5{,}73$ м.

991. Вышедший из пластинки пучок будет параллелен падающему, $\frac{h}{\cos\beta} = \frac{d}{\sin(\alpha-\beta)}$ (рис. 392). Так как $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, то

$$h = \frac{d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha\left(\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}-\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)} = 4{,}2 \text{ см.}$$

992. $x = \left(\frac{n\cos\alpha}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}} - 1\right) d\sin\alpha.$

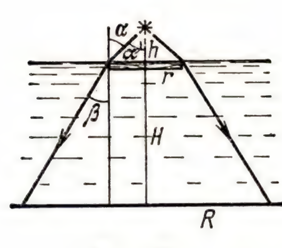


Рис. 391

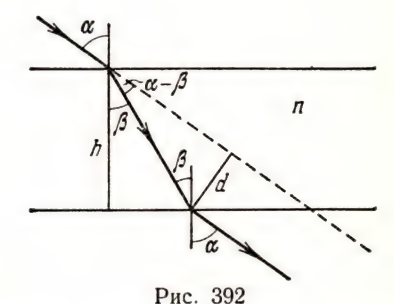


Рис. 392

993. Ход лучей в призме показан на рис. 393. Внешний угол равнобедренного треугольника ADC $\varphi = 2(\alpha-\beta)$. Сумма углов треугольника ABC

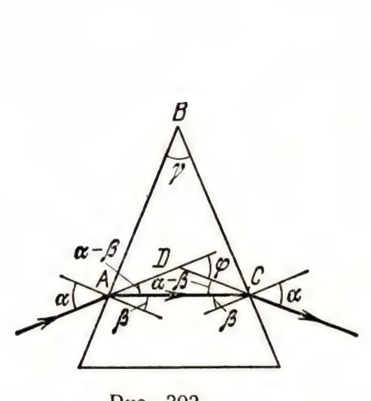


Рис. 393

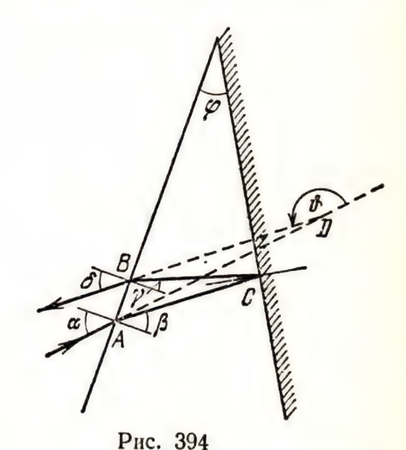


Рис. 394

равна двум прямым: $\gamma + 2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \pi$, т. е. $\gamma = 2\beta$. По закону преломления $\sin\alpha/\sin\beta = n$. Отсюда находим:

$$n = \frac{\sin\frac{\varphi+\gamma}{2}}{\sin(\gamma/2)} = \sqrt{\frac{1-\cos(\varphi+\gamma)}{1-\cos\gamma}} \approx 1{,}3.$$

994. Ход лучей в призме показан на рис. 394. Так как угол между перпендикулярами к граням равен φ, то $\angle ACB = 2(\beta - \varphi)$. В $\triangle ABC$ сумма углов $\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) + 2(\beta - \varphi) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \pi$. Отсюда

$$\gamma = 2\varphi - \beta. \qquad (1)$$

Искомый угол ϑ есть внешний угол треугольника ADB. Поэтому

$$\vartheta = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = \pi + \delta - \alpha. \qquad (2)$$

Записав еще законы преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \qquad (3)$$

и

$$\frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = n, \qquad (4)$$

получим систему уравнений (1) — (4) для нахождения неизвестного. Из нее следует:

$$\sin\vartheta = \sin\alpha\sqrt{1 - \left(\sin 2\varphi\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos 2\varphi\sin\alpha\right)^2} - \\ - \cos\alpha\left(\sin 2\varphi\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos 2\varphi\sin\alpha\right).$$

Подставив $\varphi = \pi/6$ и $\alpha = \pi/4$, получим:

$$\sin\vartheta = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\sqrt{5 - 3n^2 + \sqrt{3}\sqrt{2n^2 - 1}} + 1 - \sqrt{3}\sqrt{2n^2 - 1}\right).$$

Если $n = \sqrt{2}$, то легко показать, что на вторую грань призмы в точке C луч падает перпендикулярно к грани; следовательно, отраженный луч пойдет по пути падающего. Из полученной формулы в этом случае следует: $\sin\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$.

Если же $n = 1{,}41$ точно, то $\sin\vartheta \approx 0{,}0059$, т. е. искомый угол отличается от 180° приблизительно на 20′.

995. Пусть луч падает на грань AB (рис. 395) под углом α, преломляется под углом β. По закону преломления

$$\sin\alpha/\sin\beta = n. \qquad (1)$$

Соответственно

$$\sin\gamma/\sin\delta = 1/n. \qquad (2)$$

Угол φ — внешний угол треугольника ADC. Поэтому

$$\varphi = (\alpha - \beta) + (\delta - \gamma). \qquad (3)$$

Далее: $\angle AKC = \pi - \vartheta$, следовательно,

$$\vartheta = \beta + \gamma. \qquad (4)$$

Решая систему уравнений (1) — (4) и учитывая, что при малых углах отношение синусов можно заменить отношением углов, получим: $\varphi = (n - 1)\vartheta = 4°$.

996. Ход луча показан на рис. 396. Очевидно, что

$$x = \frac{h}{\cos\beta}\sin(\alpha - \beta) + l\sin(\alpha - \gamma).$$

Кроме того, $\sin\alpha/\sin\beta = n_1$, $\sin\beta/\sin\gamma = n_2/n_1$. Отсюда

$$\frac{1}{l}\left(\frac{x}{\sin\alpha} - h + \frac{h\cos\alpha}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2\alpha}}\right) = \frac{\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha} - \cos\alpha}{n_2},$$

или

$$\frac{\sqrt{n_2^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha) - \mathrm{tg}^2\alpha} - 1}{n_2\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{h}{l}\left(\frac{x}{h}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{1}{\sqrt{n_1^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha) - \mathrm{tg}^2\alpha}} - 1\right).$$

Правую часть, где все величины известны, обозначим через A ($A \approx 0{,}497$).

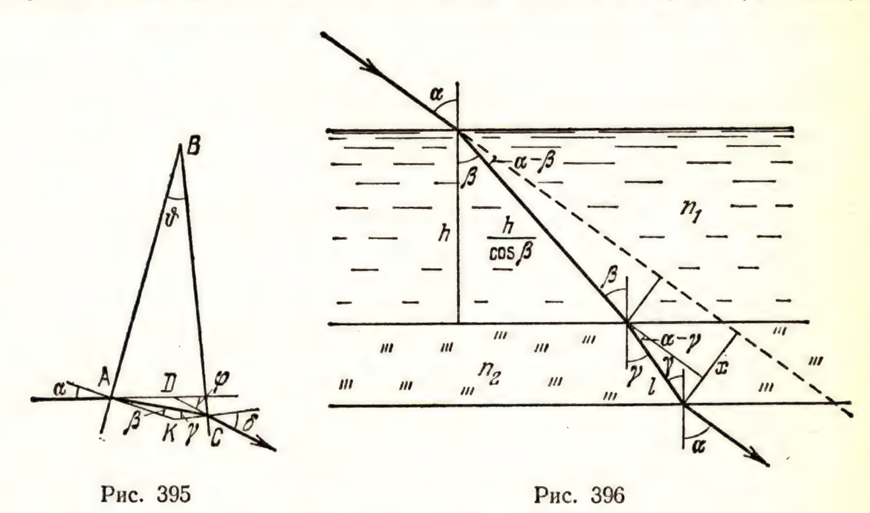


Рис. 395 Рис. 396

Таким образом, приходим к квадратному уравнению:

$$\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\,(1-A^2)\,n_2^2 - 2An_2 - \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = 0,$$

решение которого

$$n_2 = \frac{A \pm \sqrt{(1-A^2)\,\mathrm{tg}^2\alpha + 1}}{(1-A^2)\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

определяет два значения n_2. Так как показатель преломления положителен, то $n_2 = 1{,}55$.

997. $l = 2h\,\mathrm{tg}\,\beta$ (рис. 397). Имеем: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Отсюда

$$l = \frac{2h\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \approx 97 \text{ см}.$$

998. $\alpha = \arcsin\dfrac{nd}{\sqrt{4h^2+d^2}} \approx 28°$.

999. Ход лучей в пластинке показан на рис. 398. Угол ABC в прямоугольном треугольнике ACB равен α, поэтому $AB = l/\cos\alpha$. С другой стороны, из треугольника ADB видно, что $AB = 2d\,\mathrm{tg}\,\beta$. Углы α и β связаны законом преломления: $\sin\alpha/\sin\beta = n$. Решая эти уравнения, получим после исключения

неизвестных β и AB:

$$n = \sin\alpha \sqrt{1 + \left(2\frac{d}{l}\cos\alpha\right)^2} \approx 1{,}8.$$

1000. $\varphi = \alpha$; $l = \dfrac{2nd}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$.

1001. Для определения кажущегося местоположения точки построим два луча, исходящих из точки и попадающих в глаз наблюдателя. Пусть один из

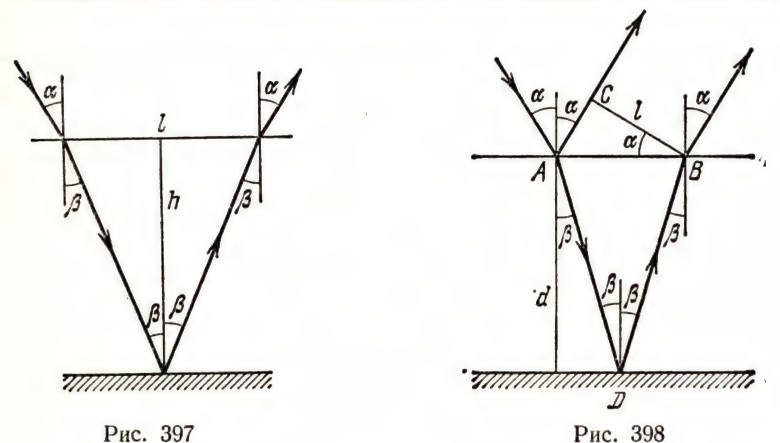


Рис. 397 Рис. 398

лучей перпендикулярен к поверхности пластинки, второй падает на поверхность пластинки под малым углом α, преломляется под углом β и попадает в глаз наблюдателя, которому кажется, что точка находится на пересечении продолжений лучей на расстоянии h от поверхности пластины.

Из рис. 399 видно, что $h\,\mathrm{tg}\,\beta = H\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Отсюда $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta} = \dfrac{h}{H}$. По закону преломления $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{1}{n}$. Для малых углов α и β левые части последних уравнений можно считать одинаковыми. Следовательно, равны и правые части, и $H = nh = 8$ см.

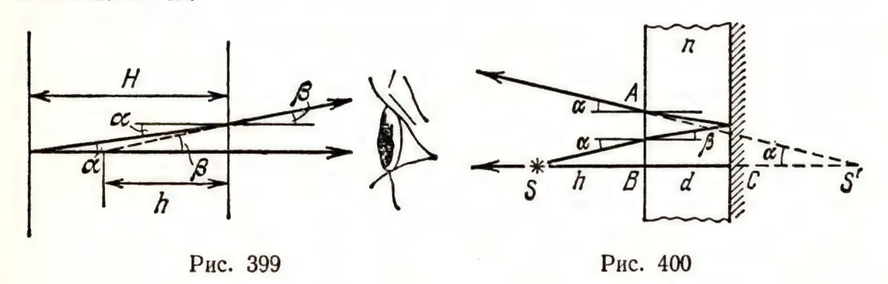


Рис. 399 Рис. 400

1002. Наблюдатель видит изображение в точке S' пересечения двух близких лучей, вышедших из S и отразившихся от задней поверхности пластинки (рис. 400). Луч SBC, перпендикулярный к пластине, после отражения про-

ходит через S. Луч, падающий на пластину под малым углом α, выходит из нее в точке A на расстоянии $AB = h \operatorname{tg}\alpha + 2d \operatorname{tg}\beta$. В то же время $AB = (x-h)\operatorname{tg}\alpha$. Ввиду малости углов α и β закон преломления можно записать в виде $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \approx \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$. Решив систему уравнений, найдем:

$$x = 2\left(h + \frac{d}{n}\right) = 4{,}5 \text{ см.}$$

1003. Конец стержня находится на глубине $H = l\sin\alpha$, где l — длина погруженной части стержня. Вследствие преломления лучей на поверхности жидкости наблюдатель видит конец стержня на глубине $h = l\cos\alpha \operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ (рис. 401). Для наблюдателя, смотрящего по вертикальному направлению,

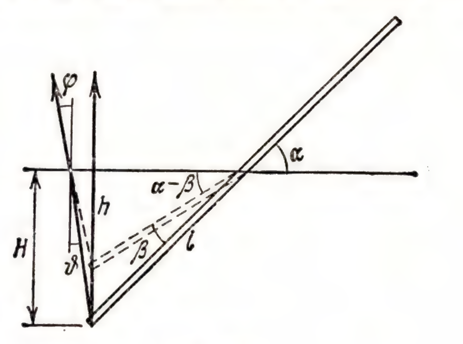


Рис. 401

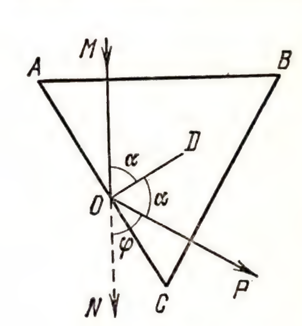


Рис. 402

углы падения ϑ и преломления φ малы, поэтому $H = nh$ (см. задачу 1001), или $\operatorname{tg}\alpha = n \operatorname{tg}(\alpha-\beta)$. Решая последнее уравнение относительно β, получим:

$$\frac{n-1}{\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{n}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Угол β будет наибольшим при том значении угла α, при котором сумма, стоящая в правой части, будет наименьшей. Так как произведение этих слагаемых есть число постоянное, то очевидно, что наименьшее значение суммы достигается при равенстве слагаемых. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{и} \quad \alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{n}.$$

1004. Преломившись на грани AB призмы, луч не отклоняется от перпендикуляра (рис. 402), поэтому угол α падения луча на грань AC (изнутри призмы) составляет 60°. Угол, под которым луч должен был бы выйти, преломившись на грани AC, можно найти по закону преломления: $\sin\alpha/\sin\beta = 1/n$. При $\alpha = 60°$ и $n = 1{,}5$ угол β не имеет действительных значений. Следовательно, на грани AC происходит полное отражение и луч выходит через грань BC перпендикулярно к ней. Искомый угол $NOP = \varphi = 60°$.

1005. $S = \pi h^2/(n^2-1) = 1256$ см².

1006. $x > \frac{2H-h}{\sqrt{n^2-1}} \approx 32{,}3$ м. Части дна, находящиеся на расстояниях ближе 32,3 м, плохо видны водолазу, так как лучи от этих частей попадают в его

глаз после отражения от участка поверхности воды, через который достигает водолаза дневной свет.

1007. Лучи источника, падающие на поверхность под углом, превышающим угол полного отражения, не выходят в воздух. Поэтому $R=\frac{h}{\sqrt{n^2-1}}\approx 3{,}6$ м.

1008. 1) $h=1{,}5$ см, если глубина погружения источника более 1,5 см; 2) на поверхности, если глубина погружения источника менее 1,5 см.

1009. $r=\frac{h}{\sqrt{n^2-1}}=8{,}9$ см.

1010. Угол β преломления лучей на первой грани (рис. 403) определяется из уравнения $\frac{\sin(\pi/2)}{\sin\beta}=n$, откуда $\sin\beta=1/n$, т. е. β — предельный угол полного отражения. Для полного отражения на второй грани должно быть $\gamma\geqslant\beta$. Очевидно, что $\varphi=\beta+\gamma$, следовательно, наименьший преломляющий угол призмы $\varphi=2\beta$, или

$$\sin\varphi=\sin 2\beta=2\sin\beta\cdot\cos\beta=\frac{2\sqrt{n^2-1}}{n^2}\approx 0{,}976.$$

Отсюда $\varphi=77°20'$.

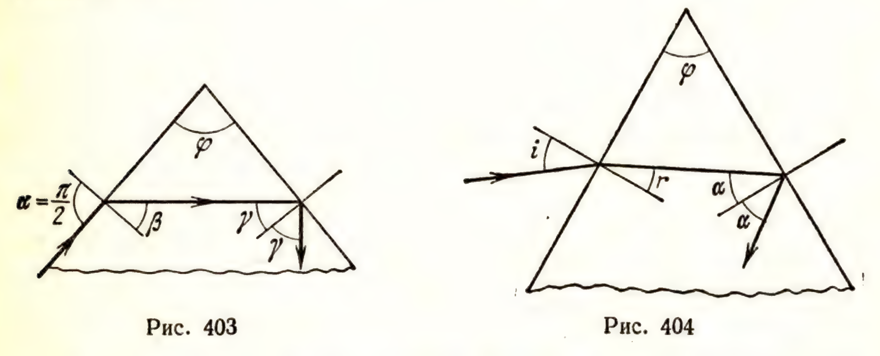


Рис. 403 Рис. 404

1011. Выход луча из второй грани невозможен, если угол падения на эту грань α больше или равен предельному углу полного отражения. Следовательно, $\sin\alpha\geqslant 1/n$. Кроме того, как видно из рис. 404, $\varphi=r+\alpha$ и $\sin i/\sin r=n$. Отсюда

$$\sin i=n\sin\varphi\sqrt{1-\sin^2\alpha}-n\cos\varphi\sin\alpha\leqslant\sin\varphi\sqrt{n^2-1}-\cos\varphi=0{,}7435.$$

Следовательно, $i\leqslant 48°$.

1012. $\sin\alpha\approx 0{,}3$; $\alpha\approx 17°30'$.

§ 28. Фотометрия

1013. Стены и пол комнаты видны из точки, находящейся на потолке, под телесным углом $\omega=2\pi$ стерадиан, поэтому $\Phi=I\omega=1256$ лм.

1014. Фотографическое действие света можно считать пропорциональным световой энергии, попавшей на фотобумагу за время экспозиции. Эта энергия в свою очередь пропорциональна произведению освещенности фотобумаги на

время. Поэтому для того, чтобы получить одинаковые снимки, необходимо добиться выполнения равенства

$$\frac{I_1}{r_1^2} t_1 = \frac{I_2}{r_2^2} t_2; \quad \text{отсюда} \quad t_2 = \frac{I_1}{I_2} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 t_1 = 27 \text{ с.}$$

1015. Пусть r_1 и r_2 — расстояния от экрана до соответствующих ламп. По условию $\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2}$ и $r_1 + r_2 = l$. Отсюда

$$r_1 = \frac{I_1 - \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 - I_2} l = 1 \text{ м} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{-I_2 + \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 - I_2} l = 0{,}8 \text{ м}.$$

Второй корень каждого квадратного уравнения не соответствует условиям задачи, согласно которым экран должен быть расположен между лампами.

1016. $x = \frac{l\sqrt{I_1}}{\sqrt{I_1} \pm \sqrt{2I_2}}$. Знак минус соответствует случаю, когда обе лампы освещают одну и ту же сторону листа, тогда $x = 9$ м. Если же лист расположен между лампами, то $x = 1$ м.

1017. $E = \frac{I}{d^2 \cos\alpha} = \frac{I}{d^2\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} \approx 3$ лк.

1018. $\frac{E_1}{E_2} = \left(1 + \frac{a^2}{2h^2}\right)^{3/2} \approx 3{,}1$.

1019. Если принять нить лампы за точечный источник света, то согласно рис. 405 освещенность верха книги

$$E_1 = \frac{I}{l^2} \cos\alpha = \frac{I}{l^2} \sin\varphi,$$

освещенность ее низа

$$E_2 = \frac{I\cos\beta}{l^2} = \frac{I}{l^2} \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Расстояние от источника до низа книги $r = 2l\cos(\varphi/2)$. Здесь использована теорема о внешнем угле треугольника и учтено, что этот треугольник равнобедренный. Отсюда

$$E_1 - E_2 = \frac{I}{l^2}\left(\sin\varphi - \frac{\sin(\varphi/2)}{4\cos^2(\varphi/2)}\right) \approx 155 \text{ лк}.$$

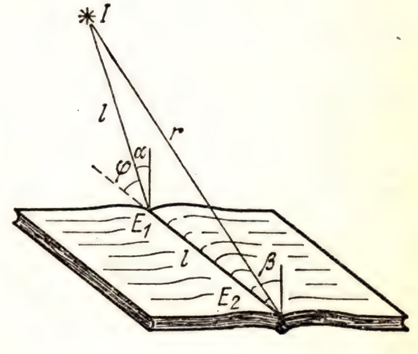


Рис. 405

1020. Если сила света источника одинакова по всем направлениям, то искомый световой поток

$$\Phi = \frac{4\pi E (l^2 + h^2)^{3/2}}{h} = 25\,130 \text{ лм}.$$

1021. Участок представляет собой круг радиуса R, на границах которого $E = Ih/(h^2 + R^2)^{3/2}$. Площадь круга

$$S = \pi R^2 = \pi\left[\left(\frac{Ih}{E}\right)^{2/3} - h^2\right] \approx 1055 \text{ м}^2.$$

1022. $S=\pi\,(Ih)^{2/3}\left(E_1^{-2/3}-E_2^{-2/3}\right)\approx 942$ м².

1023. $E_1=\dfrac{I}{r_1^2}\cos\alpha_1=\dfrac{I}{h^2}\cos^3\alpha_1$. Здесь h — высота фонаря над землей, I — сила света фонаря. $E_2=\dfrac{I}{h^2}\cos^3\alpha_2$. Отсюда $E_2=E_1\left(\dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\right)^3=80$ лк.

1024. Наименьшая освещенность пола E_1 наблюдается в точках пола вблизи стены, наименьшая освещенность стены E_2 имеет место в точках вблизи пола (рис. 406);

Рис. 406

$$E_1=\frac{I}{h^2+(d^2/4)}\cos\beta=\frac{Ih}{[h^2+(d^2/4)]^{3/2}},$$
$$E_2=\frac{I}{h^2+(d^2/4)}\cos\alpha=\frac{I\,(d/2)}{[h^2+(d^2/4)]^{3/2}}.$$

По условию задачи $E_2/E_1=n$. Отсюда $h=d/2n=7{,}5$ м.

1025. Освещенность середины стола от первой лампы $E_1=I_1/h_1^2$, от второй $E_2=I_2/h_2^2$. Освещенности края стола соответственно

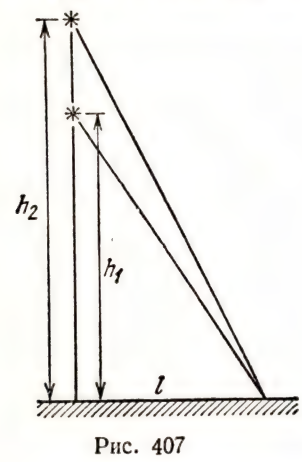


Рис. 407

$$E_3=\frac{I_1h_1}{[h_1^2+(d^2/4)]^{3/2}},$$
$$E_4=\frac{I_2h_2}{[h_2^2+(d^2/4)]^{3/2}}.$$

По условию задачи $E_1=E_2$, отсюда

$$\frac{E_3}{E_4}=\frac{I_1h_1\,[h_2^2+(d^2/4)]^{3/2}}{I_2h_2\,[h_1^2+(d^2/4)]^{3/2}}=$$
$$=\left(\frac{4I_2h_1^2+I_1d^2}{4I_2h_1^2+I_2d^2}\right)^{3/2}=3.$$

Освещенность уменьшится в три раза.

1026. Суммарная освещенность в искомых точках (рис. 407)

$$E_1=\frac{I_1h_1}{(l^2+h_1^2)^{3/2}}+\frac{I_2h_2}{(l^2+h_2^2)^{3/2}},$$

где I_1 — сила света первой лампы, I_2 — второй. Если поменять лампы местами, то освещенность в тех же точках

$$E_2=\frac{I_2h_1}{(l^2+h_1^2)^{3/2}}+\frac{I_1h_2}{(l^2+h_2^2)^{3/2}}.$$

По условию задачи $E_1=E_2$. Следовательно,

$$l=h_1^{1/3}h_2^{1/3}\left(h_1^{2/3}+h_2^{2/3}\right)^{1/2}\approx 21{,}6\ \text{м}.$$

1027. Освещенность каждой из сторон $E=3I/l^2=30$ лк.

1028. $I=3\sqrt{3}\,(n-1)\,I_0\approx 52$ кд.

1029. $E=E_1+E_2=\dfrac{Ih_1}{(l^2+h_1^2)^{3/2}}+\dfrac{Ih_2}{(l^2+h_2^2)^{3/2}}=14{,}26$ лк (рис. 407).

1030. Освещенность центра стола есть сумма освещенностей, создаваемых каждой лампой в отдельности. Под одной из ламп

$$E_1=\frac{I}{h^2}+\frac{I\cos\alpha}{h^2+l^2}, \quad \text{где} \quad \cos\alpha=\frac{h}{\sqrt{h^2+l^2}}$$

(рис. 408). При положении стола посередине между лампами

$$E_2=\frac{2I\cos\beta}{h^2+(l/2)^2}, \quad \text{где} \quad \cos\beta=\frac{h}{\sqrt{h^2+(l/2)^2}}.$$

Отношение освещенностей

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{1}{2}\left(h^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}\left[\frac{1}{h^3}+\frac{1}{(h^2+l^2)^{3/2}}\right]\approx 1{,}54.$$

1031. $I_2=\frac{2I_1h_1h_2^2}{[h_1^2+(l^2/4)]^{3/2}}\approx 820$ кд.

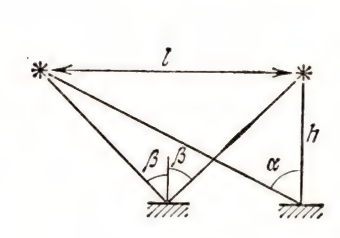


Рис. 408

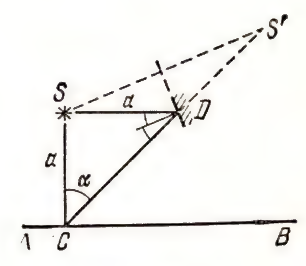


Рис. 409

1032. Введение плоского зеркала равносильно появлению нового источника S', являющегося изображением источника S в зеркале (рис. 409). Источник S' обладает той же силой света I, так как при отражении от плоского зеркала телесный угол, в котором распространяется световая энергия, не меняется и потери световой энергии отсутствуют. Освещенность при наличии зеркала

$$E_1=\frac{I}{a^2}+\frac{I\cos^3\alpha}{a^2(1+\cos\alpha)^2},$$

без него $E_2=I/a^2$. Отношение освещенностей $E_1/E_2=3\sqrt{2}/2-1\approx 1{,}12$.

1033. Освещенность $E=\frac{I}{a^2}+\frac{I}{(a+2b)^2}$ (см. задачу 1032) можно считать одинаковой во всех точках картины. $\Phi=ES\approx 3{,}75$ лм.

1034. $E=\frac{I}{l^2}\left[1+\frac{1}{[1+(4d^2/l^2)]^{3/2}}\right]\approx 20{,}3$ лк.

1035. Мнимое изображение S_1 источника в зеркале BD находится на расстоянии r от экрана BC (рис. 410). Освещенность в точке A равна

$$E=\frac{I}{R^2}+\frac{I\cos\alpha}{r^2}.$$

Величины r и $\cos\alpha$ находятся из геометрических соображений:

$$r^2=(2R)^2+R^2-4R^2\cos(\pi-\varphi)=R^2(5+4\cos\varphi) \quad \text{и} \quad \frac{\sin\alpha}{2R}=\frac{\sin(\pi-\varphi)}{r}.$$

Отсюда находим: $\cos\alpha=\dfrac{1+2\cos\varphi}{\sqrt{5+4\cos\varphi}}$. В результате получаем:

$$E=\frac{I}{R^2}\left[1+\frac{1+2\cos\varphi}{(5+4\cos\varphi)^{3/2}}\right]=\left[1+\frac{1+\sqrt{2}}{(5+2\sqrt{2})^{3/2}}\right]\frac{I}{R^2}\approx 1{,}11\,\frac{I}{R^2}.$$

§ 29. Сферические зеркала

1036. Радиус кривизны сферического зеркала (радиус сферы) $R=2F$. По теореме Пифагора $(a/2)^2+b^2=R^2$ (рис. 411). Отсюда $b=\sqrt{4F^2-\dfrac{a^2}{4}}=1{,}26$ м.

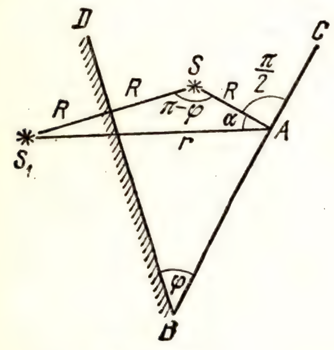


Рис. 410

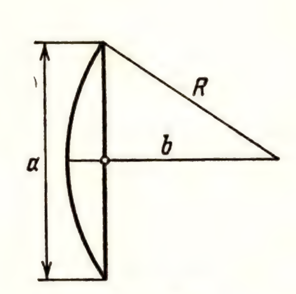


Рис. 411

1037. $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{F}$. По условию $f=d$, следовательно, $d=2$ м.

1038. $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{F}=\dfrac{2}{R}$. Следовательно, $R=\dfrac{2df}{d+f}=0{,}8$ м.

1039. $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{F}$; $\dfrac{L}{l}=\dfrac{f}{d}$. Отсюда $L=\dfrac{F}{d-F}\,l=0{,}22$ м.

1040. $R=2d/(n+1)=19{,}2$ см.

1041. Увеличение $k=\dfrac{f}{d}$; $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{F}$; $f-d=a$. Отсюда

$$F=\frac{k}{k^2-1}\,a=0{,}4\text{ м}.$$

1042. $k=3$.

1043. $f=\dfrac{Fd}{d-F}=\dfrac{2}{3}R$. Изображение действительное.

Для построения изображения можно использовать два луча, исходящих из светящейся точки S (рис. 412). Один из лучей, SP, идет вдоль главной оптической оси зеркала и после отражения идет по тому же направлению. Для построения хода произвольного луча SA после отражения проведем побочную оптическую ось $BC \parallel SA$. Найдем точку D пересечения побочной оптиче-

ской оси BC с фокальной плоскостью FD. Через эту точку пройдет отраженный луч ADS'. В точке S' на пересечении отраженных лучей PS' и AS' получится действительное изображение точки S.

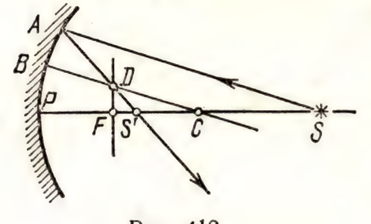


Рис. 412

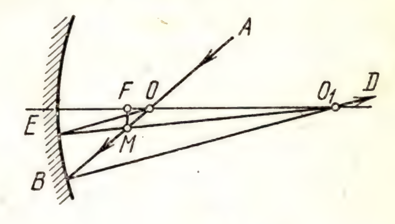


Рис. 413

1044. Очевидно, что если бы точка O была источником, то точка O_1 являлась бы изображением этого источника. Следовательно, любой луч, упавший на зеркало из точки O, после отражения пройдет через точку O_1. Проведем $OE \parallel BO_1$ и соединим точки E и O_1 (рис. 413). Используя свойство обратимости лучей, будем считать, что на зеркало падает параллельный пучок лучей OE и DB. Параллельные лучи после отражения от зеркала сходятся в точке M, лежащей на фокальной плоскости зеркала. Опустив из точки M перпендикуляр на главную оптическую ось, определим положение фокуса F.

1045. Первоначальное увеличение $k_1 = f/d$, причем $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Пусть предмет и его изображение переместились на расстояние x. Тогда $\frac{1}{d+x} + \frac{1}{f-x} = \frac{1}{F}$. Новое увеличение $k_2 = \frac{f-x}{d+x}$. Отсюда находим: $k_2 = 1/k_1 = 0{,}2$; $x = f - d$, т. е. предмет и изображение поменялись местами.

1046. $F = \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} a = 35$ см.

1047. $F = l/(n_1 - n_2) = 2{,}5$ см.

1048. Если предмет расположен дальше фокуса зеркала, то $a = d - F$, $b = f - F$. Согласно формуле зеркала $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$.

Если же предмет расположен между зеркалом и его фокусом, то $a = F - d$, $b = f + F$; в этом случае формула зеркала может быть записана в виде $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Решая по отдельности эти системы уравнений, найдем увеличение: $k = f/d = \sqrt{b/a} = 1{,}5$ в каждом из случаев.

1049. Если бы светящаяся точка принадлежала некоторому предмету, он изображался бы с увеличением $k = L/l = f/d$. В случае действительного изображения $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R}$. Следовательно, $R = \frac{2Ld}{L+l} = 1{,}2$ м.

Для мнимого изображения $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R}$. Поэтому $R = \frac{2Ld}{L-l} = 2$ м.

1050. Крайний луч AB пучка, отразившись от зеркала и пройдя через фокус, попадает на экран в точке E, лежащей на границе светлого круга

(рис. 414). Из подобия треугольников BFP и EFM следует:

$$\frac{d}{2} : F = \frac{D}{2} : (a-F); \text{ отсюда } D = \frac{d(a-F)}{F} = 10 \text{ см.}$$

1051. Источник, сила света которого равна I, создает на экране, удаленном от него на расстояние r, освещенность $E_1 = I/r^2$. При наличии зеркала к световой энергии, идущей непосредственно от источника, добавляется энергия лучей, приходящих к экрану после отражения от зеркала. Так как эти лучи можно считать параллельными, то световой поток Φ, падающий на площадку S экрана после отражения от зеркала, будет таким же, как и поток, падающий на такую же площадку S зеркала. Общая освещенность площадки S экрана при наличии зеркала

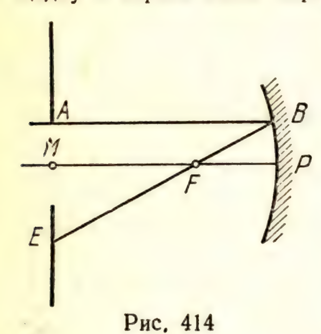


Рис. 414

$$E = E_1 + \frac{\Phi}{S} = E_1 + \frac{I\omega}{S} =$$

$$= E_1 + \frac{I(S/F^2)}{S} = \frac{I}{r^2} + \frac{I}{F^2}.$$

Отношение освещенностей

$$\frac{E}{E_1} = 1 + \left(\frac{r}{F}\right)^2 \approx 10^6.$$

1052. На экране, поставленном перпендикулярно к лучу прожектора, будет светлое пятно, освещенность которого E_1 равна освещенности рефлектора. Источник расположен в фокусе зеркала, поэтому $E_1 = I/F^2$. Свет падает на землю под углом α, для которого $\cos\alpha = h/\sqrt{l^2+h^2}$. Следовательно,

$$E = E_1 \cos\alpha = \frac{Ih}{F^2\sqrt{l^2+h^2}} = 7500 \text{ лк.}$$

1053. $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$. Отсюда $d = \frac{fR}{2f+R} \approx 0{,}43$ м.

1054. Прямое изображение в вогнутом зеркале является мнимым. Искомое расстояние определяется системой уравнений

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{2}{R} \quad \text{и} \quad \frac{f}{d} = n; \quad \text{отсюда} \quad d = \frac{R(n-1)}{2n} = 45 \text{ см.}$$

1055. $\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$, $k = \frac{f}{d}$. Знак плюс соответствует действительному изображению, минус — мнимому. Отсюда $R = \frac{2kd}{k \pm 1}$, т. е. $R = 36$ см для действительного изображения и $R = 50{,}4$ см для мнимого.

1056. Увеличенное изображение может быть действительным или мнимым. В первом случае должны быть выполнены соотношения

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}; \quad \frac{f}{d} = n \text{ и } f - d = l,$$

а во втором случае — соотношения

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{2}{R}; \quad \frac{f}{d}=n \text{ и } f+d=l.$$

Обе системы уравнений дают одинаковый ответ: $R=\frac{2nl}{n^2-1}=24$ см.

1057. Светлый круг на экране получается из-за отражения лучей зеркалом (рис. 415). Так как светящаяся точка S расположена ближе фокуса, лучи можно считать исходящими из мнимого источника — изображения S' точки S. По формуле сферического зеркала $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, где $d=F/2$. Диаметр зеркала $l=2f\operatorname{tg}\alpha$, диаметр светлого круга $L=2(f+2F)\operatorname{tg}\alpha$. Отсюда $L/l=3$.

Рис. 415

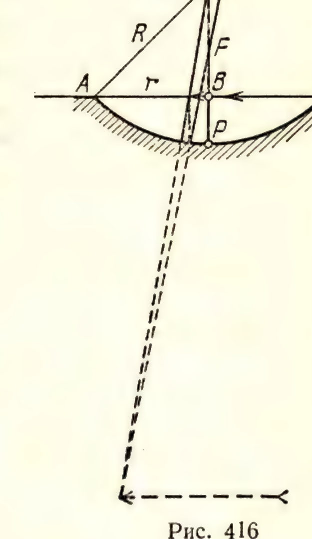


Рис. 416

1058. Мнимое увеличенное изображение получается в вогнутом сферическом зеркале. При этом должны выполняться соотношения

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{2}{R}; \quad \frac{f}{d}=n \text{ и } f+d=l.$$

Отсюда $R=\frac{2nl}{n^2-1}=2$ м.

1059. Светящуюся точку можно считать принадлежащей некоторому предмету, расположенному перпендикулярно к главной оптической оси зеркала. Предмет изображается с увеличением $k=\frac{b}{a}=\frac{f}{d}$. Так как $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, то

$$n=\frac{F}{F-d}=k=\frac{b}{a}=2{,}5.$$

1060. Расстояние между изображениями (мнимыми) источников $l=0{,}75R$.

1061. Пусть $CA=R$ — радиус кривизны сферического зеркала (радиус шара), а $BA=r$ — радиус выемки (рис. 416). Тогда $BP=d$ — расстояние от предмета (рисунка) до зеркала — определится из теоремы Пифагора $(R-d)^2+$

$+r^2=R^2$. Линейное увеличение $k=f/d$, причем $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{2}{R}$. Так как по условию $r/R=0,8$, то

$$k=\frac{1}{2\sqrt{1-(r/R)^2}-1}=5.$$

1062. Луч, идущий по радиусу сферического зеркала, отражается обратно по тому же направлению. Поэтому положение оптического центра зеркала C найдем, соединив точки S и S' и продолжив линию до пересечения с оптической осью (рис. 417).

Луч, отраженный от зеркала в его полюсе P, составляет с оптической осью NN' такой же угол, как и луч падающий. Отложив отрезок NQ, равный величине предмета, по другую сторону оптической оси и соединив точки Q и S', найдем полюс P зеркала.

Положение фокуса F определим, проведя $SM \parallel NN'$ и соединив S' и M.

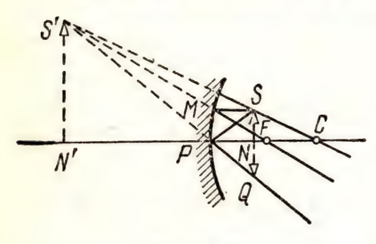


Рис. 417

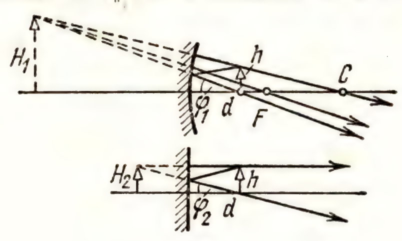


Рис. 418

1063. Мнимое изображение в сферическом зеркале находится на расстоянии $r_1=\frac{R-d}{R-2d}2d$ от человека и имеет величину $H_1=\frac{R}{R-2d}h$, где h — величина рассматриваемой детали (рис. 418). В плоском зеркале ($R\to\infty$) имеем $r_2=2d$ и $H_2=h$. Изображение в сферическом зеркале человек наблюдает под углом φ_1 (причем $\operatorname{tg}\varphi_1=H_1/r_1$), в плоском — под углом φ_2 (причем $\operatorname{tg}\varphi_2=H_2/r_2$). Угловое увеличение $k=\operatorname{tg}\varphi_1/\operatorname{tg}\varphi_2$. Отсюда

$$R=\frac{k}{k-1}d=0,6 \text{ м}.$$

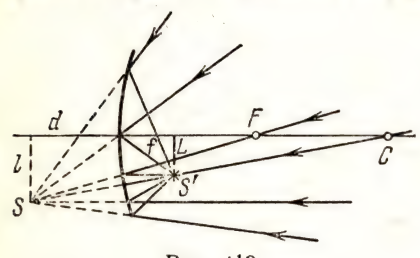


Рис. 419

1064. Ход лучей в системе показан на рис. 419. Для построения удобно использовать лучи, проходящие через фокус и через центр зеркала, а также луч, параллельный оптической оси. Точку S схождения лучей в отсутствие зеркала можно рассматривать как мнимый источник, а расстояние l этой точки от оси — как размеры мнимого предмета, содержащего точку S. Тогда L — размеры (действительного) изображения этого предмета, а S' — изображение точки S. По формуле зеркала $-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. Увеличение $\frac{f}{d}=\frac{L}{l}$. Отсюда $l=\frac{FL}{F-f}=0,25$ м.

1065. Точку пересечения лучей, продолженных за зеркало, можно рассматривать как мнимый источник. Так как $-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, то $f=\frac{Fd}{d+F}=$ $=0,075$ м.

1066. $R=2F=8d=160$ см (см. задачу 1065).

1067. Определение фокусного расстояния сводится к решению систем уравнений

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \quad |f-F|=a.$$

В случае, когда изображение точки лежит ближе к зеркалу, чем главный фокус, следует принять $f-F=-a$; если же изображение лежит дальше фокуса, то $f-F=+a$.

Первая система уравнений дает:

$$F_{1,2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-ad},$$

откуда $F_1=12$ см или $F_2=8$ см. Из второй системы уравнений получится:

$$F_{3,4}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+ad},$$

т. е. $F_3=4$ см или $F_4=-24$ см. В последнем случае зеркало оказывается выпуклым.

1068. Лампочка S расположена ближе фокуса, ее изображение S_1 находится на расстоянии f за зеркалом (рис. 420). Из формулы $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{2}{R}$ получаем: $f=\frac{Rd}{R-2d}$. Изображение лампочки можно рассматривать как добавочный источник, который на поверхности зеркала создает ту же освещенность, что и лампочка. Поэтому сила света I_1 этого источника связана с си-

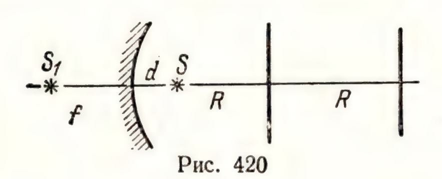


Рис. 420

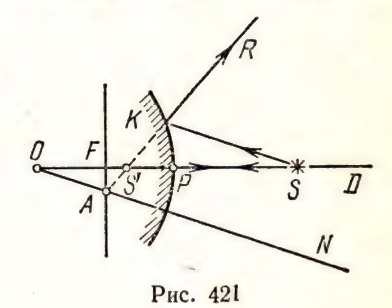


Рис. 421

лой света лампочки I соотношением: $\frac{I_1}{f^2}=\frac{I}{d^2}$. Отсюда $I_1=I\frac{f^2}{d^2}=4I$. Освещенность экрана, находящегося на расстоянии R от зеркала,

$$E=\frac{I_1}{(R+f)^2}+\frac{I}{(R-d)^2}=\frac{32I}{9R^2}.$$

Следовательно, $I=\frac{9}{32}ER^2$. Искомая освещенность

$$E_1=\frac{I_1}{(2R+f)^2}+\frac{I}{(2R-d)^2}=\frac{333}{1225}E\approx 0,272\,E.$$

1069. Для построения изображения необходимо найти ход любых двух лучей, исходящих из точки S. Луч SP (рис. 421), отразившись, идет обратно вдоль главной оптической оси. Чтобы определить направление произвольного луча SK после отражения от зеркала, проведем побочную оптическую ось $ON \parallel SK$. Через точку A пересечения побочной оси с фокальной плоскостью должно пройти продолжение AK отраженного луча KR. Изображение точки S глаз будет видеть в точке S' пересечения продолжений двух отраженных лучей PD и KR. Изображение будет мнимым, так как лучи расходятся.

1070. Для выпуклого сферического зеркала $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$, где $F=R/2$. Находим искомое расстояние:

$$f=-\frac{Rd}{R+2d}\approx -0{,}65 \text{ м.}$$

Знак минус означает, что изображение предмета получается мнимым.

1071. Для выпуклого зеркала, учитывая, что изображение действительного источника в таком зеркале получается мнимым, $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$. Отсюда $d=\frac{fF}{F-f}=1{,}8$ м.

1072. $d=fR/(R-2f)=30$ см.

1073. Отношение высот изображения и предмета $k=\frac{f}{d}=\frac{F}{d+F}=\frac{1}{4}$.

1074. $H=Rh/(R+2d)=3$ мм.

1075. Ход лучей изображен на рис. 422. Для построения изображения, как обычно, пользуемся лучами, параллельными оптической оси, а также лучами, продолжения которых проходят через фокус зеркала или через его центр. Так как

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F} \text{ и } k=\frac{L}{l}=\frac{f}{d}=\frac{1}{2},$$

то

$$d=\left(\frac{1}{k}-1\right)F=0{,}2 \text{ м.}$$

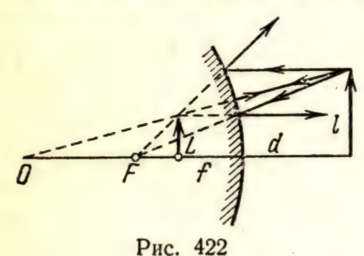


Рис. 422

1076. $d=(n-1)F=\frac{n-1}{2}R=0{,}4$ м.

1077. $R=2d=2$ м.

1078. $x=d+f=2d\,\frac{2d+l}{4d+l}\approx 0{,}34$ м.

1079. Пусть ближайший к зеркалу конец карандаша находится от него на расстоянии d_1, дальний — на расстоянии d_2. Тогда

$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=-\frac{1}{F};\quad \frac{1}{d_2}-\frac{1}{f_2}=-\frac{1}{F} \text{ и } d_2-d_1=l.$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$F=\frac{l(f_1+f_2)\pm\sqrt{l(f_2-f_1)(4f_1f_2-lf_1+lf_2)}}{2(l+f_1-f_2)}.$$

Отрицательному знаку соответствует значение $F=12$ см, при котором предмет не может быть действительным, так как получается, что $d<0$. При положительном знаке перед корнем $F=120$ см.

1080. Считая, что луч NA принадлежит большому пучку лучей, сходящихся к точке A, можно принять эту точку за мнимый источник (рис. 423). Точка B будет тогда изображением (действительным) этого источника. Расстояние $AP=d$, расстояние $BP=f$.

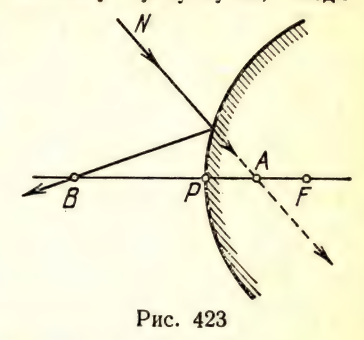


Рис. 423

По формуле сферического зеркала $-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$. Кроме того, по условию $d+f=l$. Отсюда

$$d=F+\frac{l}{2}\pm\sqrt{F^2+\frac{l}{4}}=0{,}25F\cdot(7\pm5).$$

Годится только значение $d=0{,}5F$, так как при $d=3F$ луч после отражения не пересекает главную оптическую ось.

1081. Источник мнимый, изображение действительное (см. задачу 1080). $R=2F=\frac{2fd}{f-d}=1{,}2$ м.

1082. По формуле зеркала $-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$. Отсюда $d=\frac{fF}{f+F}=0{,}4$ м.

1083. Так как d — расстояние до мнимого источника, то формула выпуклого зеркала может быть записана следующим образом:

$$-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}=-\frac{2}{R}.$$

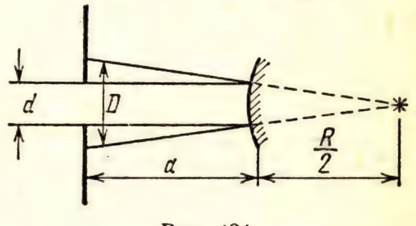


Рис. 424

Перед членом $1/f$, содержащим неизвестное расстояние от зеркала до точки пересечения лучей, ставим знак плюс. В случае, если после отражения от зеркала пересекутся не сами лучи, а только их (мнимые) продолжения, значение величины f получится отрицательным. Если же отраженные лучи сходятся, то значение f получится положительным.

В нашем случае $f=\frac{Rd}{R-2d}=-0{,}28$ м, т. е. отраженные лучи расходятся так, что их продолжения пересекаются в точке, находящейся на расстоянии 28 см за зеркалом.

1084. В данном случае как источник, так и изображение являются мнимыми, поэтому формула выпуклого зеркала должна быть записана в виде $-\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$. Отсюда $F=\frac{fd}{f+d}=0{,}32$ м.

1085. Отраженные лучи идут пучком, расходящимся как бы из фокуса зеркала, находящегося от зеркала на расстоянии $F=R/2$. Из подобия

треугольников (рис. 424) следует:

$$\frac{D}{d}=\frac{a+(R/2)}{R/2}=\frac{2a+R}{R}, \text{ откуда } R=\frac{2ad}{D-d}=64 \text{ см.}$$

1086. $R=2ad/(D-d)=20$ см.

§ 30. Линзы

1087. $d=f\frac{l}{L}=7{,}5$ м.

1088. По формуле линзы $D=\frac{1}{h}+\frac{1}{H-h}=1{,}5$ дптр.

1089. $x=\frac{1}{2}\left(\frac{fF}{f-F}+d\right)=8$ см.

1090. Оптический центр O линзы лежит на пересечении прямой SS' с оптической осью. Проводя затем прямые SB и $S'B'$, параллельные оптической оси, соединим точку S с точкой B', а точку S' с точкой B и продолжим прямые SB' и $S'B$ до пересечения с оптической осью. В точках пересечения лежат фокусы линзы (рис. 425—428).

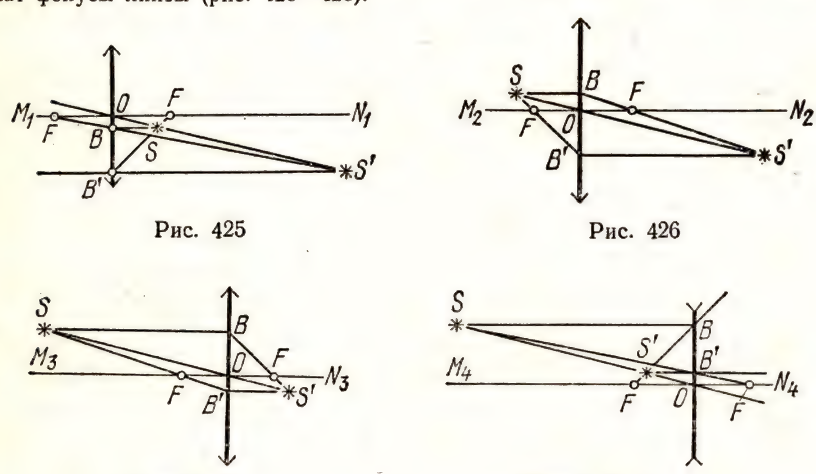


Рис. 425 Рис. 426

Рис. 427 Рис. 428

Изложенный способ определения оптического центра линзы и ее фокусов основан на известном методе построения изображения точки с помощью трех лучей: луча, параллельного главной оптической оси, луча, идущего через центр линзы, и луча, проходящего через фокус.

В первых трех случаях линза собирательная, в четвертом — рассеивающая. В случаях 1 и 4 изображение мнимое, в случаях 2 и 3 — действительное.

1091. Положение фокусов можно найти, опустив на главную оптическую ось перпендикуляры из точек пересечения с данными лучами побочных оптических осей, параллельных падающему и преломленному лучам (рис. 429).

1092. $\Delta t\approx\frac{d\,\Delta l}{F\,(v_1-v_2)\sin\alpha}\approx 0{,}0085 \text{ с}\approx\frac{1}{125}$ с.

1093. Искомое изменение $\Delta f = f - F = \frac{F^2}{d-F} \approx 0{,}98$ см.

1094. В результате прохождения через пластинку световой луч, составляющий с оптической осью угол α (рис. 430), смещается параллельно самому себе на расстояние l, определяемое из уравнений

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \quad \text{и} \quad l = \frac{h}{\cos\beta}\sin(\alpha-\beta)$$

(см. решение задачи 991). Точка пересечения лучей после прохождения пластинки сместится на расстояние $x = l/\sin\alpha$. Отсюда

$$x = h\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right) \approx h\frac{n-1}{n}.$$

Здесь учтено, что при выполнении условия $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$ выполняется также $\sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta$. На такое расстояние x надо передвинуть объектив фотоаппарата.

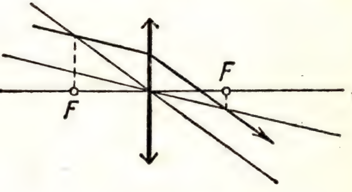


Рис. 429

1095. Возможны два случая. Расстояние d от линзы до экрана больше расстояния f от линзы до действительного изображения S_1 источника S. Лучи на экран падают расходящимся пучком (рис. 431, *а*). Из подобия

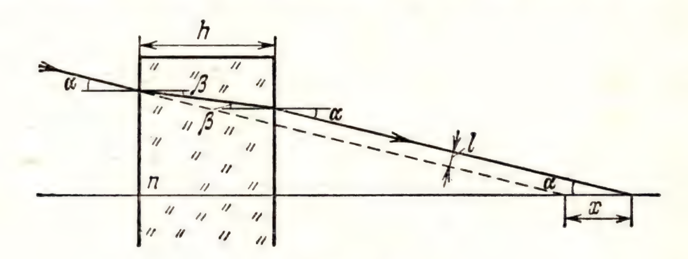
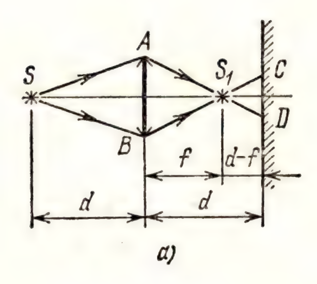


Рис. 430



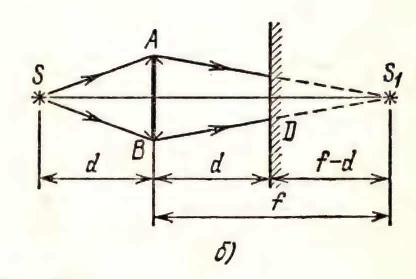


Рис. 431

треугольников ABS_1 и CDS_1 следует: $\frac{f}{d-f} = \frac{AB}{CD} = n$. По формуле линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Отсюда $F = \frac{nd}{2n+1} = 4$ см.

Во втором случае расстояние d до экрана меньше расстояния f до изображения (рис. 431, *б*). Из подобия треугольников ABS_1 и CDS_1 находим: $\frac{f}{f-d}=n$. Используя снова формулу линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, получим: $F = \frac{nd}{2n-1}=6{,}7$ см.

1096. Первоначальное расстояние от линзы до экрана $f=Fd/(d-F)$. После того как экран переместили на расстояние l, изображение источника

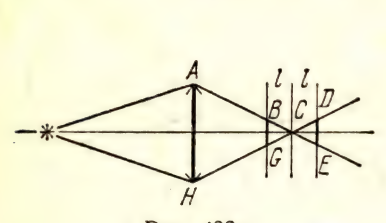


Рис. 432

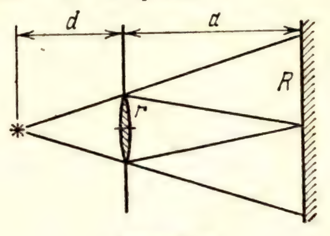


Рис. 433

расплылось в круглое пятно BG или DE (рис. 432). Из подобия треугольников ACH, BCG и DCE следует:

$$\frac{a}{b}=\frac{f}{l}, \quad \text{поэтому } b=\frac{al}{Fd}(d-F)=1{,}5 \text{ см}.$$

1097. По формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{a}=\frac{1}{F}$. Из подобия треугольников (рис. 433) $\frac{2r}{d}=\frac{2R}{d+a}$. Отсюда $R=\frac{ar}{F}=0{,}08$ м.

1098. $D_2=D_1d/(d-F)=4{,}5$ см.

1099. Увеличение $k=\frac{L}{l}=\frac{f}{d}$, поэтому $f=\frac{L}{l}d=10$ м.

1100. $H=h\left(\frac{f}{F}-1\right)=1$ см.

1101. $F=fl/(L+l)=15{,}4$ см.

1102. $x=1/lD^2=5$ м; увеличение $k=1/lD=50$; $A=ka=2$ м; $B=kb=3$ м.

1103. Увеличение $k={}^1/_3$. Расстояние между линзой и лампочкой нужно увеличить на $l=(1-k)/kD=0{,}25$ м.

1104. Согласно формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, где F — фокусное расстояние линзы и, по условию, $d=F+l$. Увеличение $k=f/d$. Отсюда $f=k(k+1)l = 36$ см.

1105. Если амплитуда колебаний линзы (в первом случае) или источника (во втором) равна A, то $\frac{A_1}{A}=\frac{f+d}{d}$ и $\frac{A_2}{A}=\frac{f}{d}$. Кроме того, $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. Отсюда $d=\frac{A_1}{A_2}F=0{,}64$ м.

1106. Изображение будет меньше предмета в 4 раза.

1107. $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$; $k=\frac{f}{d}$. Следовательно, $f=(k+1)F=5{,}1$ м.

1108. $\frac{1}{H}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$; $k=\frac{f}{H}=2{,}5\cdot 10^{-4}$. Отсюда $F=\frac{H}{1+(1/k)}\approx 0{,}5$ м.

1109. Пусть с начала падения предмета прошло время t. Тогда в этот момент он имеет скорость $v=gt$ и за малый промежуток времени Δt пройдет расстояние $\Delta l=v\,\Delta t$. За то же время изображение предмета пройдет расстояние $\Delta L=v_1\,\Delta t$, где $v_1=at$. Очевидно,

$$\frac{\Delta L}{\Delta l}=\frac{f}{d} \text{ и } \frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}; \text{ отсюда } F=\frac{ad}{a+g}\approx 0{,}1 \text{ м.}$$

1110. Способ построения ясен из рис. 434. Для построения изображения каждой из точек достаточно определить ход любых двух лучей, исходящих из точки, после преломления в линзе.

1111. Применив формулу линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, найдем расстояние от линзы до изображения $f=\frac{Fd}{d-F}=3F$, а затем увеличение $k=\frac{f}{d}=\frac{F}{d-F}=2$. Предмет, изображение и центр линзы лежат всегда на одной прямой. Поэтому изображение движется по окружности вдвое большего радиуса с вдвое большей скоростью $v_2=kv_1=6$ см/с. Предмет и изображение находятся в диаметрально противоположных точках окружностей. Скорости v_1 и v_2 направлены в противоположные стороны.

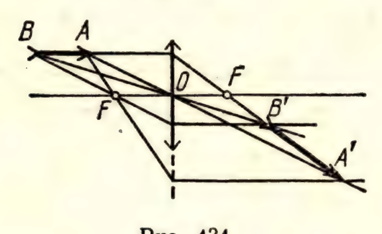


Рис. 434

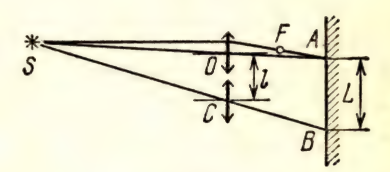


Рис. 435

1112. Расстояние f от линзы до экрана, на котором получается изображение точки, может быть определено по формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. При смещении линзы вниз изображение также скользит вниз по экрану (рис. 435). Из подобия треугольников ASB и OSC следует, что $\frac{L}{l}=\frac{d+f}{d}$. Поэтому

$$L=\frac{ld}{d-F}=4{,}5 \text{ см.}$$

1113. $\frac{R}{r}=\frac{f}{d}$. Согласно формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=D$. Отсюда $f=\frac{R+r}{rD}$.

1114. Из уравнений $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ и $k=\frac{f}{d}$ найдем: $k=\frac{f}{F}-1=15$.

1115. До смещения предмета $d_1=a$, $f_1=a$ и, следовательно, по формуле линзы $F=a/2=0{,}25$ м. Увеличение $k_1=f_1/d_1=1$, т. е. предмет изображается в натуральную величину.

После смещения $d_2=a-l$ и $k_2=f_2/d_2$. Применяя формулу линзы $\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}$, получим:

$$k_2=\frac{F}{d_2-F}=\frac{F}{a-l-F}=\frac{a}{a-2l}=5.$$

Изображение увеличивается в пять раз.

1116. $d=F\left(1+\frac{h}{H}\right)$. По условию задачи размер изображения $H\leqslant 36$ мм, следовательно $d\geqslant 255$ см.

1117. Изображение исчезнет, если ни один луч, исходящий из точки, не попадет на линзу (рис. 436). Тогда $\frac{a}{2}:x=l:(d-x)$. Кроме того, $\frac{L}{l}=\frac{f}{d}$ и $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. Отсюда

$$x=\frac{aFf}{2LF+af-aF}=8\text{ см}.$$

1118. Расстояние $\Delta l=v\,\Delta t$, на которое переместится автомобиль за время экспозиции, и расстояние Δr, на которое переместится за то же время его

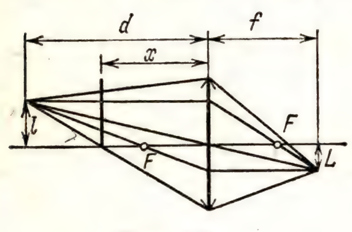


Рис. 436

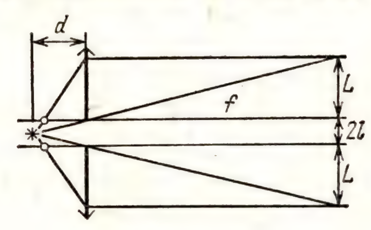


Рис. 437

изображение, связаны соотношением $\frac{\Delta r}{\Delta l}=\frac{f}{d}$. Кроме того, $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. По условиям задачи $\Delta r\leqslant a$. Решив данную систему уравнений и неравенств, получим:

$$\Delta t\leqslant\frac{a(d-F)}{vF}\approx\frac{1}{200}\text{ с}.$$

1119. Формула линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ позволяет найти расстояние f, на котором изображение находится от линзы. Каждая из раздвинутых половинок линзы действует как целая линза, ось которой отстоит от источника на расстоянии $l=s/2$. Следовательно, каждое из изображений отстоит от этой оси на расстоянии $L=l\frac{f}{d}$ (рис. 437). Искомое расстояние $S=2L+2l=\frac{sd}{d-F}=$ $=6$ см.

1120. Увеличением изображения назовем, как обычно, отношение величины изображения к величине предмета: $k=\frac{L}{l}=\frac{f_1-f_2}{d_2-d_1}$. Применив два раза формулу линзы $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}$ и $\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}$, получим: $k=\frac{F^2}{(d_1-F)(d_2-F)}\approx 4.$

1121. Предмет, расположенный вдоль главной оптической оси, изображается с увеличением $k=\frac{F}{d_1-F}\cdot\frac{F}{d_2-F}$ (см. задачу 1120). Объект, находящийся на расстоянии d_1, изображается с увеличением $k_1=F/(d_1-F)$ (см. задачу 1115), на расстоянии d_2 — с увеличением $k_2=F/(d_2-F)$ Следовательно, $k=k_1\cdot k_2$.

1122. $x=k_Ak_Bl$.

1123. Обозначим $s=d+f$. Так как $F=\frac{fd}{f+d}$ и $\sqrt{fd}\leqslant\frac{f+d}{2}$, то

$$s=\frac{fd}{F}\leqslant\frac{(f+d)^2}{4F}=\frac{s^2}{4F}.$$

Отсюда $s\geqslant 4F$. Следовательно, $s_0=4F$. При этом $d=f=2F$.

1124. $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$; $d+f=s$. Отсюда

$$d=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-Fs}=\frac{25\pm 15}{8}F,\quad f=\frac{s}{2}\mp\sqrt{\frac{s^2}{4}-Fs}=\frac{25\mp 15}{8}F.$$

Таким образом, возможны два решения:

$$d_1=5F,\quad f_1=1{,}25F \text{ и } d_2=1{,}25F,\quad f_2=5F.$$

Наличие этих двух решений сразу следует из свойства обратимости световых лучей: источник можно заменить изображением, а изображение — источником, заменив все стрелки, показывающие направления лучей, на противоположные.

1125. При первом положении линзы

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F} \text{ и } d_1+f_1=L.$$

При втором положении линзы

$$\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F} \text{ и } d_2+f_2=L.$$

По условию задачи $|d_2-d_1|=l$. Из первых четырех уравнений следует, что d_1 и f_1 (так же как и d_2 и f_2) должны являться корнями уравнения $x^2-Lx+FL=0$, т. е.

$$d_1=f_2=\frac{L}{2}\pm\sqrt{\frac{L^2}{4}-FL} \quad \text{и} \quad d_2=f_1=\frac{L}{2}\mp\sqrt{\frac{L^2}{4}-FL}$$

(второе расположение есть обращенное первое). Следовательно,

$$l^2=4\left(\frac{L^2}{4}-FL\right),\quad \text{или}\quad F=\frac{L^2-l^2}{4L}=0{,}9 \text{ м}.$$

1126. $l=\sqrt{L^2-4LF}$ (см. решение задачи 1125).

1127. Увеличение в первом случае $\frac{a}{h}=\frac{f_1}{d_1}$, во втором $\frac{b}{h}=\frac{f_2}{d_2}$. Дважды применяя формулу линзы, нетрудно получить, что $f_1=d_2$ и $f_2=d_1$ (см. задачу 1124). Перемножая полученные уравнения, окончательно найдем: $h=\sqrt{ab}$.

1128. Используя дважды формулу линзы и данные о расстояниях L и l (см. задачи 1124, 1125), получим:

$$d_1=f_2=0{,}5\,(L\pm l) \text{ и } d_2=f_1=0{,}5\,(L\mp l)$$

Величина изображения в первом случае $h\frac{f_1}{d_1}$, во втором случае $h\frac{f_2}{d_2}$, где h — высота предмета. Отношение величин изображений

$$k=\frac{f_1d_2}{d_1f_2}=\left(\frac{L\mp l}{L\pm l}\right)^2, \text{ т. е. } k_1=0{,}04, \quad k_2=25.$$

1129. Пусть точки, в которых помещают линзу для получения изображений, отстоят друг от друга на расстоянии l. Воспользовавшись решением задач 1125 и 1128, получим сразу:

$$\left(\frac{L+l}{L-l}\right)^2=k, \quad F=\frac{L^2-l^2}{4L}=\frac{L\sqrt{k}}{(\sqrt{k}+1)^2}=0{,}2 \text{ м}.$$

1130. $l=\frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}L=0{,}4$ м (см. решения задач 1125 и 1128).

1131. $F=\sqrt{ab}=0{,}2$ м и $k=\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}+a}=\sqrt{\frac{b}{a}}=2.$

1132. $F=\frac{h_2d_2-h_1d_1}{h_2-h_1}=11{,}3$ см.

1133. $F=\frac{h_1h_2l}{(h_1-h_2)H}=9$ см.

1134. Для основного расположения

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}; \quad d_1+f_1=a; \quad \frac{f_1}{d_1}=k_1.$$

После отодвигания экрана и линзы

$$\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}; \quad d_2+f_2=a+b; \quad \frac{f_2}{d_2}=k_2.$$

После отодвигания экрана и источника

$$\frac{1}{d_3}+\frac{1}{f_3}=\frac{1}{F}; \quad d_3+f_3=a+b+c; \quad f_3=f_1+b; \quad \frac{f_3}{d_3}=k_3.$$

Отсюда

$$k_2=\frac{(1+k_1)\sqrt{a+b}+\sqrt{a(1-k_1)^2+b(1+k_1)^2}}{(1+k_1)\sqrt{a+b}-\sqrt{a(1-k_1)^2+b(1+k_1)^2}}\approx 9{,}14;$$

$$k_3=\frac{b}{a}\,\frac{(1+k_1)^2}{k_1}+k_1=9.$$

1135. Мнимое изображение предмета в лупе видно глазу под углом φ_1, определяемым равенством $\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{h}{d}=\frac{H}{f}$, где h — размер предмета, H — размер изображения. Заметим, что так как мнимое изображение должно лежать от линзы, приставленной вплотную к глазу, на расстоянии $f\geqslant D_0$, то из формулы линзы $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=D$ получается, что $\frac{D_0}{1+DD_0}\leqslant d\leqslant\frac{1}{D}$.

Если же рассматривать предмет без лупы, то наибольший возможный угол зрения φ_2 можно найти из уравнения $\operatorname{tg}\varphi_2 = h/D_0$.

Увеличение лупы $k = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{D_0}{d}$. Следовательно, $DD_0 \leqslant k \leqslant DD_0 + 1$, или в нашем случае $2 \leqslant k \leqslant 3$.

1136. При рассматривании предмета, лежащего в фокальной плоскости лупы, она дает увеличение $k_1 = D_0/F$ (см. задачу 1135). Если использовать ее в роли объектива проекционного фонаря, то увеличение $k = f/d$. Изображение на экране действительное, поэтому $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Следовательно,

$$d = \frac{k+1}{kk_1} D_0.$$

Считая расстояние наилучшего зрения $D_0 = 25$ см, получим: $d = 5{,}5$ см.

1137. По формуле линзы $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, где $d = x - l$ — расстояние от предмета до лупы, $f = D_0 - l$ — расстояние от изображения до лупы. Предмет, находящийся на расстоянии D_0, виден глазу под углом φ_1, определяемым из равенства $\operatorname{tg}\varphi_1 = h/D_0$, где h — высота предмета. При наблюдении через лупу предмет виден под углом φ_2, который можно определить по формуле $\operatorname{tg}\varphi_2 = h/(x - l)$. Увеличение $k = \operatorname{tg}\varphi_2/\operatorname{tg}\varphi_1 = D_0/(x - l)$. Следовательно,

$$x = \frac{F(D_0 - l)}{D_0 - l + F} + l \approx 6{,}8 \text{ см} \quad \text{и} \quad k = \frac{D_0}{D_0 - l} + \frac{D_0}{F} \approx 14.$$

1138. Увеличенное изображение может быть действительным или мнимым,

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = D, \quad \frac{f}{d} = k; \quad \text{отсюда} \quad d = \frac{k \pm 1}{kD}.$$

Для получения действительного увеличенного изображения предмет нужно поместить перед линзой на расстоянии $d_1 = 0{,}3$ м, мнимого — на расстоянии $d_2 = 0{,}2$ м.

1139. Как видно из чертежа (рис. 438), $\frac{D}{2} = f \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, где f — расстояние от линзы до изображения источника, которое определяется по формуле линзы: $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Отсюда

$$F = \frac{Dd}{D - 2d \operatorname{tg}(\alpha/2)} \approx 7{,}4 \text{ см}.$$

1140. Из уравнений $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ и $f = \frac{D}{2\operatorname{tg}\alpha}$, где f — расстояние между линзой и изображением лампочки, следует:

$$d = \frac{DF}{2F\operatorname{tg}\alpha + D} = 2 \text{ см}.$$

1141. Когда источник находится в фокусе линзы, на экран падают параллельные лучи и пятно имеет радиус r, равный радиусу линзы. Если источник удалять от линзы, то пятно будет сначала уменьшаться, а затем увеличиваться до прежних размеров. Следовательно, источник нужно приближать

к линзе. Пусть требуемые размеры пятно будет иметь, когда источник S находится на расстоянии d от линзы. При этом лучи от изображения S_1

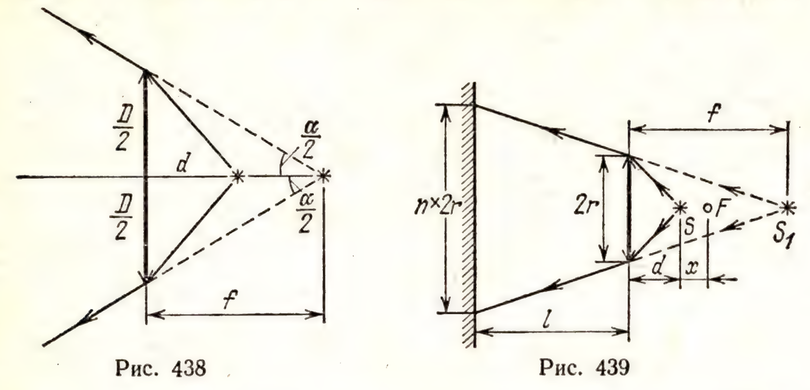


Рис. 438 Рис. 439

источника, проходящие через края линзы, идут к краям пятна по прямым линиям (рис. 439). Тогда должны выполняться соотношения

$$x = F - d; \quad \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \text{ и } \frac{f+l}{n \cdot 2r} = \frac{f}{2r}.$$

Отсюда

$$x = \frac{F^2 (n-1)}{l + F(n-1)} = 2 \text{ см.}$$

1142. Для нахождения хода произвольного луча SA после преломления в линзе необходимо найти точку B пересечения побочной оптической оси $COB \parallel SA$ с фокальной плоскостью линзы (рис. 440). Глаз, расположенный за линзой, увидит мнимое изображение S' в точке пересечения продолжений лучей OF и AB.

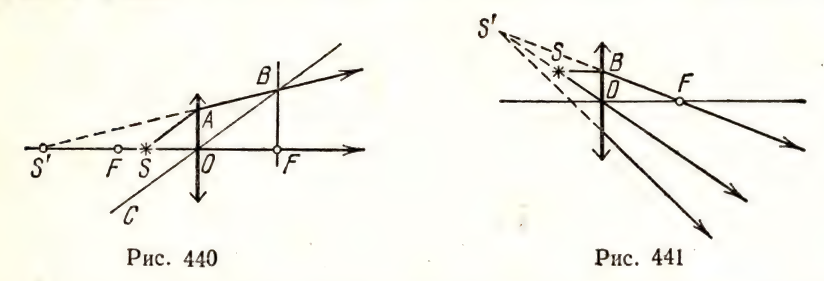


Рис. 440 Рис. 441

1143. Продолжив данные лучи до их пересечения, получим изображение S' светящейся точки (рис. 441). Соединим полученную точку S' с оптическим центром линзы O. Луч BF после преломления идет через фокус, значит до преломления он шел параллельно главной оптической оси. Проведем $SB \parallel OF$. Искомая точка S лежит на пересечении OS' и BS.

1144. Так как изображение мнимое, $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Отсюда $d = \frac{fF}{f+F} = 0{,}2$ м.

1145. $F = fd/(f-d) = 0{,}6$ м.

1146. По формуле линзы $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, где $f = F$, находим: $d = \frac{F}{2}$.

1147. $F = \frac{kl}{(k-1)^2} = 40$ см.

1148. По условию $x = d_1 + d_2$ и $d_1 = nd_2$. Изображение первого источника — действительное, изображение второго — мнимое. Поэтому

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F} = D \text{ и } \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D,$$

где f_1 и f_2 — расстояния изображений от линзы. По условию $|f_1 - f_2| = l$.

Рассмотрим сначала случай, когда изображение первого источника дальше от линзы, чем изображение второго, т. е. $f_1 - f_2 = l$. Решая систему, получаем для d_2 квадратное уравнение:

$$nD(2 - Dl)\,d_2^2 + (Dl - 1)(n+1)\,d_2 - l = 0.$$

Решив его, находим затем:

$$x = (n+1)\,d_2 = (n+1)\,\frac{(1 - Dl)(n+1) + \sqrt{(1 - Dl)^2 (n-1)^2 + 4n}}{2nD(2 - Dl)} = 5 \text{ м}$$

(второй корень, являясь отрицательным, не имеет смысла).

В случае $f_2 - f_1 = l$ формулу для x можно получить, поменяв знак l на обратный. В результате получается: $x = 7{,}17$ м (второе значение $x = 1{,}16$ м не удовлетворяет условию задачи, так как при этом изображения источников находятся по разные стороны линзы).

1149. $F = 2d\,(l - d)/l = 9$ см.

1150. Для мнимого изображения $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = D_1$, откуда $D_1 = \frac{f-d}{fd} = -0{,}3$ дптр. Линза рассеивающая. Знак плюс перед D_1 в формуле линзы поставлен потому, что оптическая сила линзы — величина в данной задаче неизвестная, а потому, решая задачу, не обязательно заранее знать характер использованной линзы и можно всегда считать ее положительной.

Для действительного изображения $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_2$, следовательно, $D_2 = \frac{f+d}{fd} = 0{,}5$ дптр. Линза собирающая.

1151. Отношение расстояний изображения точки и самой точки до оптической оси $\frac{L}{l} = \frac{f}{d}$.

В случае действительного изображения $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ и, следовательно, $d = \frac{fF}{f-F} = -36$ см, $l = \frac{LF}{f-F} = -15$ см, т. е. на линзу падают лучи, которые в отсутствие линзы сошлись бы в точке, отстоящей от места, где расположена линза, на 36 см и на 15 см от оптической оси. Источник получается мнимым, что противоречит условиям задачи.

В случае мнимого изображения $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, откуда $d = \frac{fF}{f+F} = 7{,}2$ см, $l = \frac{LF}{f+F} = 3$ см.

1152. Увеличение $k=f/d$, где f — расстояние от линзы до изображения. Если изображение действительное, то $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. Отсюда $F=\frac{kd}{k+1}=9$ см. В случае мнимого изображения $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ и $F=\frac{kd}{k-1}=11$ см.

1153. Пусть расстояние от линзы до предмета d и от линзы до изображения f. В случае действительного изображения

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F};\quad \frac{H}{h}=\frac{f}{d} \text{ и } d=F+l.$$

Если же изображение мнимое, то

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F};\quad \frac{H}{h}=\frac{f}{d} \text{ и } d=F-l.$$

Обе системы уравнений дают одинаковый ответ: $H=Fh/l=4$ см.

1154. Вершина конуса служит мнимым источником, находящимся на расстоянии $d=F$ от линзы. Согласно формуле линзы

$$-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}=D; \text{ отсюда } f=\frac{1}{2D}=0{,}1 \text{ м.}$$

1155. $l=f^2/(F-f)=12{,}5$ см.

1156. Рассматривая подобные треугольники (рис. 442), нетрудно убедиться, что

$$\frac{s_2}{s_1}=\frac{a+F}{F} \quad \text{и} \quad \frac{s_3}{s_1}=\left|\frac{F-a}{F}\right|.$$

Здесь a — расстояние от линзы до экрана. Знак модуля поставлен для того, чтобы учесть возможный случай $a>F$.

Решив систему уравнений, получим: $s_3=|2s_1-s_2|=3$ см.

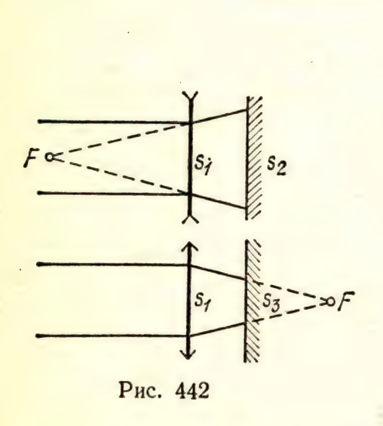


Рис. 442

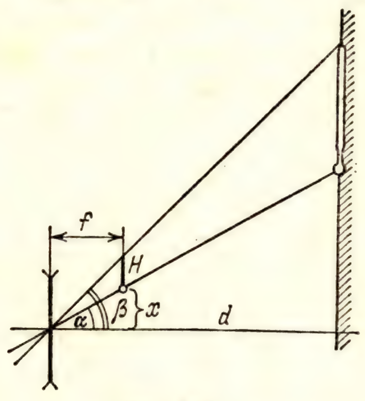


Рис. 443

1157. $D_3=2D_1-D_2=6$ см, если расстояние от линзы до экрана меньше ее фокусного расстояния. $D_3=2D_1+D_2=10$ см, если это расстояние больше фокусного.

1158. Для рассеивающей линзы $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}=D$. По условиям задачи $f=d/2$. Следовательно, светящаяся точка лежит от линзы на расстоянии $d=$ $=F=-1/D=0{,}2$ м.

1159. По формуле линзы $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}=D$. На рис. 443 видно, что $x=f\operatorname{tg}\alpha$ и $H+x=f\operatorname{tg}\beta$. Отсюда $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha-\frac{H}{d}-HD\approx 1$. Следовательно, $\beta\approx 45^\circ$.

1160. Луч AO проходит через линзу, не меняя направления (рис. 444). Знание хода двух лучей, исходящих из точки A, позволяет найти ее изображение A'. Луч AK после преломления пойдет по направлению KP так, что продолжение этого луча пройдет через точку A'.

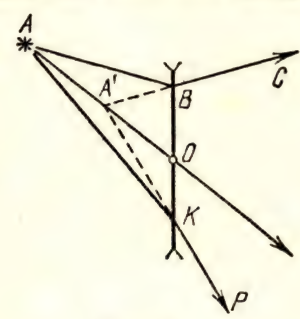


Рис. 444

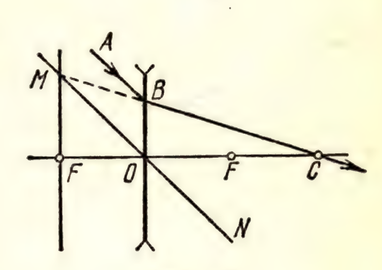


Рис. 445

1161. Способ построения ясен из рис. 445. $MON \parallel AB$ — побочная оптическая ось линзы. MF — фокальная плоскость линзы. Продолжение BM преломленного луча BC проходит через точку M пересечения фокальной плоскости с побочной оптической осью. Способ основан на том, что параллельный пучок лучей, один из которых можно считать совпадающим с побочной оптической осью, после преломления идет так, что продолжения лучей собираются в точке, лежащей на фокальной плоскости линзы.

1162. $f=\frac{Fd}{F+d}=0{,}1$ м; $H=\frac{hF}{F+d}=0{,}02$ м.

1163. При первом расположении источника $\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=-\frac{1}{F}$, при втором $\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f_2}=-\frac{1}{F}$, где f_1 и f_2 — расстояния от линзы до изображений в первом и втором случаях. По условию $f_1-f_2=l$. Система приводит к квадратному уравнению:

$$(d_1-d_2-l)\,F^2-l\,(d_1+d_2)\,F-ld_1d_2=0.$$

Решая его, найдем:

$$F=\frac{l\,(d_1+d_2)+\sqrt{l\,(d_1-d_2)\,[l\,(d_1-d_2)+4d_1d_2]}}{2\,(d_1-d_2-l)}=0{,}6 \text{ м}$$

(второй корень соответствует собирающей линзе).

1164. Луч пересечет оптическую ось в точке, отстоящей на расстоянии d от плоскости, в которой находилась линза. Согласно формуле линзы

$$-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}, \quad \text{т. е.} \quad d=\frac{fF}{f+F}=5{,}4 \text{ см.}$$

1165. Точка схождения лучей в отсутствие линзы (мнимый источник) лежит на расстоянии d от ширмы, причем

$$\frac{b}{d-l}=\frac{a}{d} \quad (\text{при } l<d) \text{ или } \frac{b}{l-d}=\frac{a}{d} \quad (\text{при } d<l).$$

По формуле линзы $-\frac{1}{d}+\frac{1}{l}=\frac{1}{F}$. Перед членом $1/F$ берем положительный знак, так как F является неизвестным. Решая полученную систему, найдем: $F=\pm al/b=\pm 25$ см.

Знак плюс соответствует случаю $l<d$ и указывает на то, что в отверстие нужно вставить положительную линзу, знак минус — отрицательную (рассеивающую).

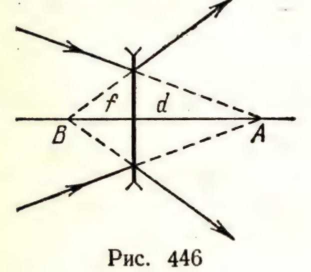


Рис. 446

1166. Точка A играет роль мнимого источника, B — мнимого изображения (рис. 446), поэтому по формуле линзы $-\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$. Согласно условию задачи $f+d=l$ и $f/d=m/n$. Отсюда

$$F=\frac{l}{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2}=0{,}1 \text{ м.}$$

1167. $L=\frac{-9F(F-l)\pm 3F\sqrt{8F^2+(F-l)^2}}{4(2F-l)}$. Отрицательный корень не имеет смысла, поэтому $L=12$ см.

1168. Линза может быть собирающей или рассеивающей.

В случае собирающей линзы вершина S светового конуса в отсутствие линзы (мнимый источник) лежит за экраном на расстоянии $d_1=\frac{al}{a-b}$ от

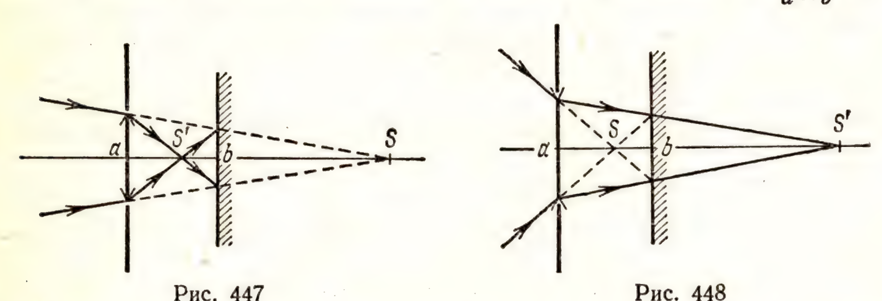


Рис. 447 Рис. 448

отверстия (рис. 447), а при вставленной линзе точка S' схождения лучей (изображение) находится на расстоянии $f_1=\frac{al}{a+b}$. По формуле линзы $-\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F_1}$. Отсюда $F_1=al/2b=17{,}5$ см.

Для рассеивающей линзы (рис. 448) соответственно

$$d_2=\frac{al}{a+b},\quad f_2=\frac{al}{a-b},\quad -\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=-\frac{1}{F_2}.$$

Следовательно, $F_2=al/2b=17{,}5$ см.

1169. В воздухе ($n\approx 1$) оптическая сила линзы $D=\left(\frac{n_{ст}}{n}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$.
В воде $\frac{1}{F}=\left(\frac{n_{ст}}{n_в}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$. Отсюда $F=\frac{n_в\,(n_{ст}-n)}{n\,(n_{ст}-n_в)}\cdot\frac{1}{D}=0{,}8$ м.

1170. Фокусное расстояние F воздушной линзы в стекле определяется по формуле

$$\frac{1}{F}=\left(\frac{n_{возд}}{n_{ст}}-1\right)\frac{1}{R}=\frac{1-n_{ст}}{n_{ст}R};\ \text{отсюда}\ F=\frac{n_{ст}R}{1-n_{ст}}=-30\ \text{см}.$$

Линза рассеивающая.

1171. Фокусное расстояние F линзы определяется выражением $\frac{1}{F}=\left(\frac{n_{возд}}{n_{ст}}-1\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)$. По формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. Отсюда $f=\frac{Rdn_{ст}}{2d\,(1-n_{ст})-Rn_{ст}}=-8{,}57$ см (изображение мнимое).

1172. $x=F_1-F_2=\frac{R_1R_2\,(n_2-n_1)}{(R_1+R_2)\,(n_1-1)\,(n_2-1)}=1{,}062$ см.

1173. Используя формулу линзы, запишем: $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=(n_{ст}-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, где $n_{ст}$ — показатель преломления стекла линзы. В жидкости $-\frac{1}{F}=\left(\frac{n_{ст}}{n}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$. Следовательно,

$$n=\frac{(1/R_1)+(1/R_2)+(1/d)+(1/f)}{(1/R_1)+(1/R_2)-(1/F)}\approx 1{,}66.$$

1174. В воздухе $\frac{F_1}{F_2}=\frac{n_2-1}{n_1-1}=1{,}4$. В воде $\frac{F_1'}{F_2'}=\frac{n_2-n_в}{n_1-n_в}=2{,}2$.

1175. Если бы луч выходил из линзы в воздух, то он преломился бы под углом β_1 и вышел бы из линзы на расстоянии l от ее оптической оси (рис. 449). Для такого луча

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1}=\frac{1}{n_{ст}},\tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\beta_1=\frac{l}{F_1}.\tag{2}$$

Если луч входит в воду, то

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2}=\frac{n}{n_{ст}},\tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\beta_2=\frac{l}{F_2}.\tag{4}$$

Разделив (3) на (1), найдем: $\sin\beta_1/\sin\beta_2=n$. Учитывая далее (2) и (4), получим: $F_2=nF_1=13{,}3$ см.

1176. Звезда кажется фотографу находящейся на расстоянии $h=H/n$ от поверхности воды, т. е. на расстоянии $d=l+h$ от объектива (см. решение задачи 1001). По формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. Изображение будет меньше предмета в $k=d/f$ раз. Следовательно, $k=\frac{ln+H}{Fn}-1=19$.

1177. Из каждой точки фотографируемого предмета объектив фотоаппарата виден под телесным углом $\Delta\omega \approx S/d^2$, где d — расстояние от объектива до предмета, S — площадь линзы объектива. Световой поток от предмета, проникающий внутрь фотоаппарата, пропорционален площади предмета S_1 и телесному углу $\Delta\omega$, т. е. $\Phi=bS_1\Delta\omega$ (b — коэффициент пропорциональности). Этот световой поток распределяется по площади изображения S_2. Поэтому освещенность изображения

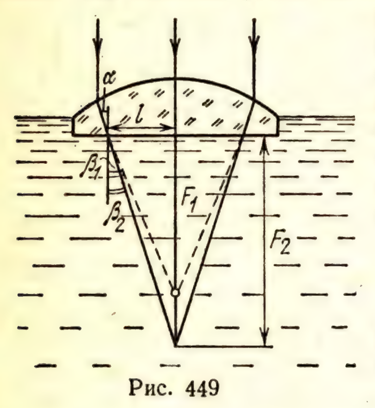


Рис. 449

$$E=\frac{\Phi}{S_2}=b\frac{S_1}{S_2}\Delta\omega \approx b\frac{S_1}{S_2}\frac{S}{d^2}=\frac{bS}{f^2},$$

где f — расстояние от объектива до изображения, а $S_1/S_2=d^2/f^2$.

В случае съемки гравюры издалека $f_1 \approx F$, при съемке же деталей в натуральную величину $f_2 \approx 2F$. Поэтому отношение освещенностей

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{bS/f_1^2}{bS/f_2^2}=\frac{f_2^2}{f_1^2}\approx\frac{4F}{F}=4.$$

Освещенность уменьшилась в 4 раза. Во столько же раз было увеличено время экспозиции.

§ 31. Оптические системы

1178. Лучи, прошедшие первую линзу, дадут изображение (действительное или мнимое) на расстоянии a, определяемом формулой линзы $\frac{1}{d}\pm\frac{1}{a}=\pm\frac{1}{F_1}$. Это изображение служит источником (мнимым или действительным) для второй линзы, т. е. $\mp\frac{1}{a}+\frac{1}{f}=\pm\frac{1}{F_2}$.

Для заменяющей линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=D$. Сравнивая сумму первых двух уравнений с третьим, убедимся, что

$$D=\pm\frac{1}{F_1}\pm\frac{1}{F_2},$$

т. е. оптическая сила линзы, заменяющей систему вплотную сложенных линз, равна алгебраической сумме оптических сил этих линз.

Так как рассуждение можно продолжить, приставив к оптической двухлинзовой системе третью линзу, то положение может быть распространено на любое количество тонких линз, сложенных вплотную.

Формула сферического зеркала по структуре и смыслу совпадает с формулой линзы, поэтому сделанный вывод касается также оптических систем, содержащих зеркала (приставленные вплотную к линзе). Здесь, однако, необходимо иметь в виду, что, отразившись от зеркала, луч еще раз может пройти через линзу, которую в этом случае придется учитывать дважды.

1179. $F_{расс}/F_{собир}=2$.

1180. $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}$ (см. задачу 1178), или $F_2=\frac{dfF_1}{fF_1+dF_1-df}=54$ см.

1181. Данная оптическая система равносильна двум сложенным вместе тонким линзам с оптической силой $D_1=\frac{1}{F}=(n-1)\frac{1}{R}$ каждая, поскольку оптическая сила плоского зеркала равна нулю. Поэтому искомая оптическая сила системы $D=2D_1=\frac{2(n-1)}{R}$.

1182. $f=Fd/(2d-F)=9$ см.

1183. Для непосеребренной линзы $-\frac{1}{d}+\frac{1}{f_2}=-\frac{1}{F}$.

Посеребренную линзу можно рассматривать как оптическую систему, состоящую из трех сложенных вплотную компонентов: рассеивающей линзы с оптической силой $D_1=-1/F$, выпуклого зеркала, оптическая сила которого $D_2=-2/R$, и снова рассеивающей линзы $D_1=-1/F$. Оптическая сила такой системы $D=D_1+D_2+D_1=-2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{F}\right)$, поэтому для посеребренной линзы $-\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1}=D$. Отсюда

$$f_2=\frac{2f_1Rd}{2f_1d+dR+Rf_1}=2 \text{ м}.$$

1184. Расстояние светящейся точки от вогнутого зеркала $d=R-L$. Расстояние f изображения точки от вогнутого зеркала определяется по формуле зеркала $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{2}{R}$. Расстояние этого изображения от плоского зеркала $l=R-f$. Второе изображение (даваемое плоским зеркалом) находится по другую сторону плоского зеркала на таком же расстоянии l от него. Следовательно, расстояние второго изображения от вогнутого зеркала $x=R+l$. Отсюда

$$x=\frac{R(R-3L)}{R-2L}=30 \text{ см}.$$

Второе изображение находится в фокусе вогнутого зеркала.

Рис. 450

1185. В отсутствие зеркала линза дала бы изображение источника в точке C (см. рис. 450) на расстоянии f, определяемом из формулы линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. Чтобы лучи после вторичного преломления в линзе шли параллельным пучком, они должны после отражения от зеркала сойтись в фокусе

линзы. Треугольники ABC и DEF подобны, следовательно $l/L=F/f$. Отсюда $l=\frac{d-F}{d}L$. По условиям задачи $d=2F$, поэтому $l=L/2$.

1186. Изображение, даваемое линзой, отстоит от нее на расстоянии f, а от зеркала — на расстоянии $l+f$. Изображение в плоском зеркале расположено по другую сторону зеркала на том же расстоянии $l+f$ и, следовательно, на расстоянии $2l+f$ от линзы. Лучи, как бы исходящие из этого изображения, снова проходят через линзу, образуя изображение на расстоянии x от нее. Формула линзы для первого изображения $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ и для второго $\frac{1}{2l+f}+\frac{1}{x}=\frac{1}{F}$. Отсюда

$$x=F\frac{2l(d-F)-Fd}{2l(d-F)+F(F-2d)}=60 \text{ см}.$$

1187. Расстояние f от линзы до изображения источника, даваемого линзой, определяется при помощи формулы $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$. Это изображение расположено на расстоянии $f+l$ перед плоским зеркалом. Мнимое изображение в зеркале находится на таком же расстоянии за зеркалом. Общее расстояние

$$x=(d+l)+(f+l)=d+2l+\frac{Fd}{F+d}=31 \text{ см}.$$

1188. Так как $f<F_2$, то на зеркало падает сходящийся пучок. Если бы зеркала не было, то вершина этого пучка лежала бы на расстоянии F_1 от линзы и, следовательно, на расстоянии $d=F_1-l$ от зеркала (рис. 451). По формуле сферического зеркала $-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F_2}$. Отсюда

$$F_1=l+\frac{fF_2}{F_2-f}=40 \text{ см}.$$

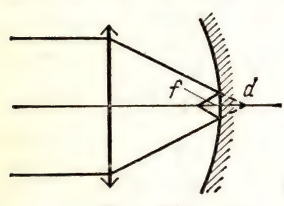


Рис. 451

1189. Лучи собираются в точке, где расположен источник, если любой луч, идущий от источника, пройдя через линзу, падает на зеркало по его радиусу и отражается по тому же направлению. Линза при этом может быть расположена ближе или дальше центра C зеркала. В первом случае (рис. 452)

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F} \text{ и } l+f=R.$$

Во втором случае (рис. 453)

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F} \text{ и } l-f=R.$$

Обе системы уравнений дают одинаковое решение:

$$d=\frac{F(R-l)}{F+R-l}.$$

Так как по условию источник действительный, то решение возможно лишь в случаях $l \leqslant R$ или $F+R<l$.

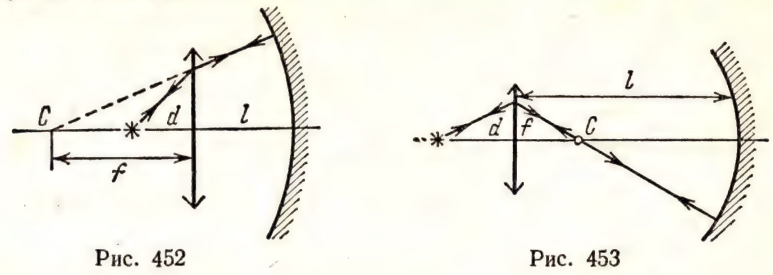


Рис. 452 Рис. 453

Лучи собираются в точке, где расположен источник, также в случае, если источник находится на таком расстоянии от линзы, что линза дает его изображение на самом зеркале (рис. 454), т. е.

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{l}=\frac{1}{F} \text{ и } d=\frac{Fl}{l-F}.$$

В этом случае необходимо, чтобы выполнялось условие $l>F$.

1190. Данную задачу, как обычно, можно представить как совокупность трех задач, рассматриваемых последовательно.

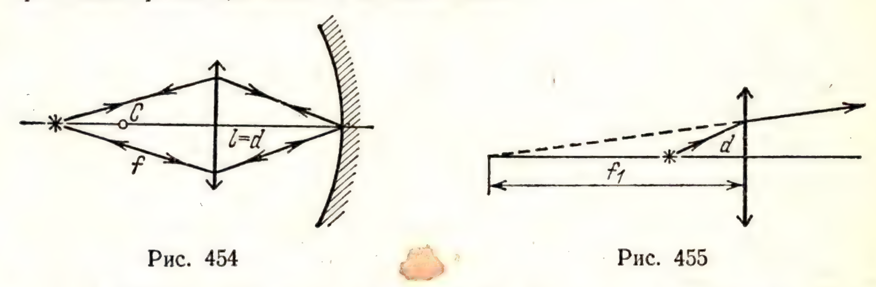


Рис. 454 Рис. 455

1) Источник расположен на расстоянии d от линзы с фокусным расстоянием F. Следовательно, можно определить, на каком расстоянии f_1 от линзы получится изображение (рис. 455).

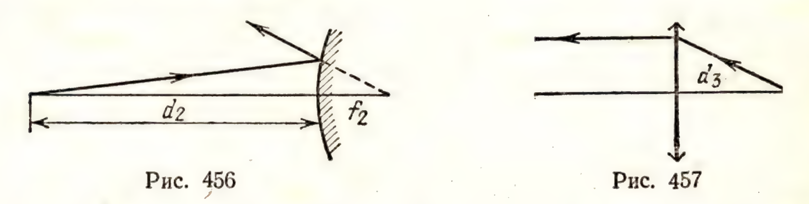


Рис. 456 Рис. 457

2) Это изображение, находящееся на расстоянии d_2 от зеркала, служит для него действительным источником. Изображение получается на расстоянии f_2 от зеркала (рис. 456).

3) Так как лучи по выходе из линзы идут пучком, параллельным главной оптической оси, то изображение, даваемое зеркалом, служит для линзы действительным источником, расположенным от нее на расстоянии $d_3=F$ (рис. 457).

Следовательно,

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d_2}-\frac{1}{f_2}=-\frac{2}{R}, \quad d_2=f_1+l, \quad d_3=f_2+l=F.$$

Отсюда

$$R=\frac{2(Fd+Fl-ld)(F-l)}{2(Fd+Fl-ld)-F^2}=21 \text{ см}.$$

1191. Расстояние f_1 от линзы до изображения источника, даваемого линзой первый раз, удовлетворяет уравнению $\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}$. Второе изображение получается в зеркале на расстоянии f_2 от него, причем $\frac{1}{x-f_1}-\frac{1}{f_2}=-\frac{2}{R}$. Наконец, для третьего изображения (опять в линзе) должно выполняться условие $\frac{1}{x+f_2}+\frac{1}{d}=\frac{1}{F}$. Из первого уравнения системы находим: $f_1=Fd/(d-F)$. Исключив f_2 из двух других уравнений, получим квадратное уравнение $x^2-(2f_1-R)x+f_1^2-Rf_1=0$. Его решение $x=f_1-\frac{R}{2}\pm\frac{R}{2}$. Отсюда

$$x=\frac{Fd}{d-F}-R=6 \text{ см}.$$

В этом случае лучи, вышедшие из линзы, падают на поверхность зеркала перпендикулярно, а первое изображение, даваемое линзой, совпадает с центром зеркала. Второе решение приводит к большему значению $x=f_1=30$ см (при этом изображение совпадает с вершиной зеркала).

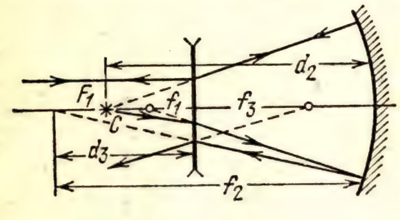


Рис. 458

1192. Из условия задачи следует, что передний фокус линзы совпадает с центром зеркала. Следовательно, линза расположена от зеркала на расстоянии $R-F_1$, где $R=2F_2$ — радиус кривизны зеркала (верхняя половина рис. 458). Изображение источника, помещенного в фокусе рассеивающей линзы, получается на расстоянии $f_1=F_1/2$ от линзы (см. задачу 1146) и, следовательно, на расстоянии $d_2=R-(F_1/2)$ от зеркала. Это изображение служит действительным источником для зеркала, поэтому, если бы лучи не проходили второй раз через линзу, то они собирались бы на расстоянии f_2 от зеркала, причем $\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}$, откуда

$$f_2=\frac{F_2d_2}{d_2-F_2}=\frac{(4F_2-F_1)F_2}{2F_2-F_1}.$$

Однако отразившийся от зеркала сходящийся пучок встречает линзу, расположенную на расстоянии $d_3=f_2-(R-F_1)=\frac{(3F_2-F_1)F_1}{2F_2-F_1}$ от точки схождения лучей, поэтому $-\frac{1}{d_3}+\frac{1}{f_3}=-\frac{1}{F_1}$. Отсюда

$$f_3=\frac{F_1d_3}{F_1-d_3}=\frac{(F_1-3F_2)F_1}{F_2}.$$

По условию задачи $F_1 < 2F_2$, поэтому $f_3 < 0$. Это значит, что, выйдя из линзы, лучи расходятся, а точки пересечения их мнимых продолжений лежат между зеркалом и линзой на расстоянии $(3F_2 - F_1)\frac{F_1}{F_2} = 32$ см от линзы (нижняя половина рис. 458).

1193. Для первого зеркала $\frac{1}{R-x} + \frac{1}{2R+z} = \frac{2}{R}$, для второго $-\frac{1}{z} + \frac{1}{R-y} = \frac{2}{R}$ (рис. 459). Отсюда $x = \frac{Ry}{4y-R}$.

Если $y = \frac{3}{4}R$, то $x = \frac{3}{8}R$. При $y = -\frac{3}{4}R$ получится $x = \frac{3}{16}R$.

1194. Если бы второй линзы не было, изображение удаленного источника получилось бы в фокальной плоскости передней линзы. Это изображение служит для задней линзы мнимым источником. Расчеты дают в первом случае

$$f = \frac{1 - lD_1}{D_1 + D_2 - lD_1D_2} = \frac{1}{13} \text{ м.}$$

Во втором случае

$$f = \frac{1 - lD_2}{D_1 + D_2 - lD_1D_2} = \frac{7}{65} \text{ м.}$$

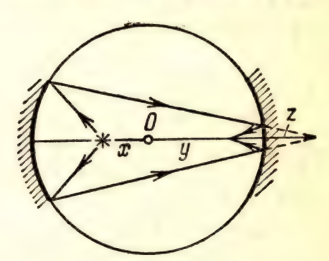


Рис. 459

1195. На расстоянии $d = \frac{(l - F_2)F_1}{l - F_2 - F_1} = 30$ см перед первой линзой или на расстоянии $d = \frac{(l - F_1)F_2}{l - F_1 - F_2} = 60$ см за второй линзой.

1196. Изображение, создаваемое первой линзой, находится от нее на расстоянии f_1 и имеет величину $L_1 = k_1 l = (f_1/d_1)\, l$. От второй линзы оно находится на расстоянии $d_2 = l - f_1$ и в свою очередь служит для нее предметом. Изображение, создаваемое второй линзой, находится на расстоянии f_2 от нее и имеет размеры $L_2 = k_2 L_1 = (f_2/d_2) L_1$, где k_2 — увеличение второй линзы. По формуле линзы

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2}.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем:

$$f_2 = \frac{F_2[a(d_1 - F_1) - d_1F_1]}{(a - F_2)(d_1 - F_1) - d_1F_1} = 2 \text{ м и } L_2 = k_1k_2l = \frac{F_1F_2l}{(a - F_2)(d_1 - F_1) - d_1F_1} = 32 \text{ см.}$$

1197. $x = \frac{l^2F - (d + l)(l - 2F)d}{F(2d - F) - l(d - F)} = 0{,}35$ м (см. решение задачи 1196).

1198. См. решение задачи 1196 и построение изображения на рис. 462. Мнимое изображение находится на расстоянии $f = F_2 \frac{ld - lF_1 - F_1d}{(F_2 - l)(d - F_1) + F_1d} = 1{,}8$ м от второй линзы. Увеличение

$$k = \frac{F_1F_2}{(F_2 - l)(d - F_1) + F_1d} = 20.$$

1199. Предмет расположен в фокальной плоскости первой линзы; следовательно, лучи, идущие от какой-либо точки предмета, по выходе из линзы идут параллельным пучком. Если вторая линза расположена на расстоянии $a < (b_1 + b_2) F_1/2l$, где b_1 и b_2 — диаметры линз, то каждый из таких параллельных пучков, пройдя вторую линзу, даст изображение соответствующей точки предмета в фокальной плоскости второй линзы. Из подобия треугольников (рис. 460) следует, что $\frac{l}{F_1} = \frac{L}{F_2}$,

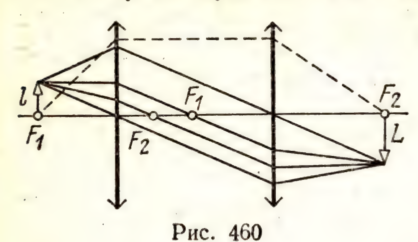


Рис. 460

откуда $L = \frac{F_2}{F_1} l = 3$ см. Построение хода лучей ясно из рис. 460. Изображение получается действительным. Его можно наблюдать, поместив глаз на соответствующем расстоянии за второй линзой.

1200. $f = \frac{F[a(d-F) - Fd]}{(a-F)(d-F) - Fd} = 3$ м (см. задачу 1196).

1201. Задняя фокальная плоскость первой линзы должна совпадать с передней фокальной плоскостью второй, поэтому $l = F_1 + F_2 = 8$ см. Задачу можно решить также, применяя общую формулу (см. задачу 1194), в которой нужно положить $f \to \infty$.

1202. Если первой в пучке света стоит собирающая линза, то для достижения желаемого результата должны совпадать задние фокальные плоскости линз. Если же первой стоит рассеивающая линза, то должны совпадать передние фокальные плоскости. Искомое расстояние $l = F_1 - F_2 = 4$ см в обоих случаях. При $F_1 < F_2$ задача решения не имеет.

1203. $x = F_3 - \frac{F_2(L - F_1)}{F_2 + L - F_1} = 6$ см.

1204. За рассеивающей линзой пучок также параллельный. Его диаметр $D_2 = D_1 \frac{F_2}{F_1} = 4$ мм.

1205. Источник должен находиться перед собирающей линзой на таком расстоянии d, чтобы сходящийся пучок лучей, падающий на вторую линзу, имел бы вершину в точке на задней фокальной плоскости рассеивающей линзы. По формуле линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{F+l} = \frac{1}{F}$, откуда

$$d = \frac{F(F+l)}{l} = 36 \text{ см.}$$

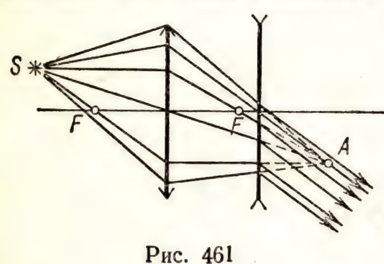


Рис. 461

Построение хода лучей см. на рис. 461. Точка A является изображением источника S в собирающей линзе, и, следовательно, через нее должны пройти продолжения всех лучей, вышедших из первой линзы. Среди этих лучей выбираем тот, который идет через оптический центр второй линзы. Все остальные лучи, прошедшие систему, будут параллельны выбранному.

1206. Если светящаяся точка расположена со стороны рассеивающей линзы, то искомое расстояние $d=\frac{F_1(F_2-l)}{F_1-F_2+l}=8$ см (точка расположена в фокусе рассеивающей линзы). Если точка расположена со стороны собирающей линзы, то $d=\frac{l(F_1+l)+F_1F_2}{F_1-F_2+l}=41$ см.

1207. $x=d+l+F_2\frac{F_1d+F_1l+ld}{(l-F_2)(d+F_1)+F_1d}=68$ см.

1208. В телескопе фокальная плоскость объектива совпадает с фокальной плоскостью окуляра. Параллельный пучок лучей, пройдя такую систему линз, остается параллельным, но составляет уже другой угол с осью трубы. Угловое увеличение телескопа $k=F_1/F_2$. Угол, под которым виден глазу отрезок длины l между двумя яркими источниками, равен $\varphi_1\approx l/r$. По условию задачи $k\varphi_1\geqslant\varphi_0$, отсюда $l\geqslant\varphi_0 rF_2/F_1\approx 475$ м.

1209. Длина трубы Галилея $l=F_1-F_2$, ее увеличение $k=F_1/F_2$. По условию задачи труба Кеплера должна иметь ту же длину $l=F_3+F_4$ и такое же увеличение $k=F_3/F_4$. Следовательно,

$$F_3=\frac{F_1-F_2}{F_1+F_2}F_1=36 \text{ см},$$

$$F_4=\frac{F_1-F_2}{F_1+F_2}F_2=4 \text{ см}.$$

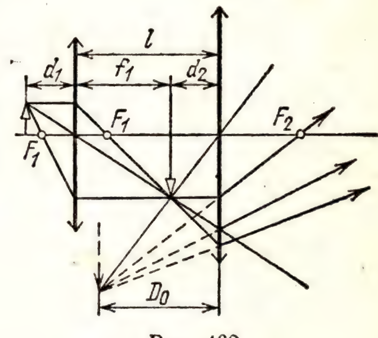


Рис. 462

1210. Окуляр передвинули на $a=F^2/(d-F)=1$ см дальше от объектива.

1211. Если труба предназначена для наблюдения весьма удаленных предметов, то расстояние между ее объективом и окуляром $d=F_1+F_2$, а увеличение трубы $k=F_1/F_2$, где F_1 — фокусное расстояние объектива, F_2 — окуляра. При вставленной диафрагме $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F_2}$, причем $\frac{f}{d}=\frac{l}{L}$. Отсюда $k=L/l$.

1212. $l=\frac{D_0F_2}{D_0+F_2}+F_1\approx 31$ см.

1213. Увеличение микроскопа $k_1=k_2\cdot k_3$, объектива $k_3=f/d$. По формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. Отсюда $F=\frac{k_1}{k_1+k_2}d$. Так как $d\geqslant 5$ см, то $F\geqslant 4{,}5$ см.

1214. Увеличение $k=k_1\cdot k_2$, где $k_1=f_1/d_1$ (рис. 462) — увеличение объектива, причем d_1 и f_1 связаны соотношением $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F_1}$. Увеличение окуляра $k_2=D_0/d_2$, где $d_2=l-f_1$. Решив данную систему пяти уравнений, найдем:

$$k_2=\frac{D_0+kF_1}{l-F_1}\approx 8.$$

На рис. 462 изображен случай, когда окончательное изображение находится на расстоянии D_0 от линзы окуляра. Если же глаз наблюдателя не напряжен, то из окуляра должны выходить параллельные пучки лучей. В этом случае $d_2=l-f_1=F_2$, где F_2 — фокусное расстояние окуляра. Система уравнений и решение остаются прежними.

1215. $k=\delta D_0/F_1F_2$, где $\delta=l-F_1-F_2$ — длина тубуса. Отсюда

$$F_1=\frac{(l-F_2)\,D_0}{kF_2+D_0}=2{,}45 \text{ мм}$$

1216. Для ненапряженного глаза $k=\frac{(l-F_1-F_2)\,D_0}{F_1F_2}=95$ (см. задачу 1215). Если же окончательное изображение рассматривается с расстояния D_0, то

$$k=\frac{(l-F_1-F_2)\,D_0}{F_1F_2}+\frac{l-F_1}{F_1}\approx 120$$

1217. Увеличение объектива $k_1=F_1/(d_1-F_1)$ (см. задачу 1115), окуляра для ненапряженного глаза $k_2=D_0/F_2$ (см. задачу 1136). Увеличение микроскопа и расстояние между линзами:

$$k=k_1k_2=\frac{F_1D_0}{(d_1-F_1)\,F_2}=150, \quad l=\frac{F_1}{d_1-F_1}d_1+F_2=14{,}3 \text{ см.}$$

Если глаз рассматривает изображение с расстояния D_0, то $k_2=\frac{D_0}{F_2}+1$ (см. задачу 1135),

$$k=\frac{F_1\,(D_0+F_2)}{(d-F_1)\,F_2}=180 \text{ и } l=\frac{F_1d_1}{d_1-F_1}+\frac{F_2D_0}{D_0+F_2}\approx 13{,}47 \text{ см.}$$

1218. Из формулы линзы $\frac{1}{a+F_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F_1}$ получаем увеличение объектива: $k_1=\frac{f_1}{a+F_1}=\frac{F_1}{a}$. Увеличение окуляра $k_2=D_0/F_2$, микроскопа $k=k_1k_2=$ $=F_1D_0/aF_2=200$. Длина тубуса $\delta=f_1-F_1=F_1^2/a=8$ см.

1219. $k=\frac{F_1D_0}{(d_1-F_1)\,F_2}$ (см. задачу 1217). Отсюда $F_1=\frac{kd_1F_2}{D_0+kF_2}=6$ мм.

1220. $F_2=\delta D_0/kF_1=0{,}5$ см.

1221. Когда человек рассматривает без очков предмет, находящийся на расстоянии ближнего предела аккомодации, то мышцы, управляющие преломляющей системой его глаза, наиболее напряжены. Если заменить глаз эквивалентной линзой с экраном, то можно воспользоваться обычной формулой $\frac{1}{d_1}+$ $+\frac{1}{f_1}=D_{1\text{гл}}$. Здесь f_1 — эквивалентная глубина глаза — расстояние от линзы, которой можно заменить преломляющую систему глаза, до экрана (сетчатки).

Рассматривая тот же предмет в очках, человек по условию задачи напрягает мышцы глаза так же, как и без очков, поэтому $\frac{1}{d_1'}+\frac{1}{f_1}=D_{1\text{гл}}+D_{\text{очк}}$. Отсюда ближний предел аккомодации данного глаза, вооруженного очками,

$$d_1'=\frac{d_1}{1+D_{\text{очк}}\cdot d_1}=0{,}33 \text{ м.}$$

Аналогично для дальнего предела аккомодации (наибольшее расслабление мышц глаза) $\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=D_{2\text{гл}}$. Глубина глаза и оптическая сила глаза при этом, вообще говоря, другие. Если же человек наденет очки, то $\frac{1}{d_2'}+\frac{1}{f_2}=D_{2\text{гл}}+D_{\text{очк}}$.

Следовательно,

$$d_2' = \frac{d_2}{1 + D_{\text{очк}} \cdot d_2} = 1 \text{ м}.$$

1222. Надев очки, ученик будет читать книгу, держа ее от глаза на расстоянии $D_0 = 25$ см (расстояние ясного зрения нормального глаза). Поэтому $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_{\text{гл}}$ и $\frac{1}{D_0} + \frac{1}{f} = D_{\text{гл}} + D_{\text{очк}}$; отсюда $D_{\text{очк}} = \frac{1}{D_0} - \frac{1}{d} = -1$ дптр.

Пройдя такую линзу, лучи от предмета, находящегося на расстоянии $D_0 = 25$ см, идут так, как если бы они исходили из точек, отстоящих на расстоянии $d = 20$ см от глаза.

1223. По условию задачи $d = 20$ см есть дальний предел аккомодации данного глаза. Поэтому в очках должны быть использованы такие линзы, пройдя которые параллельные лучи от бесконечно удаленных предметов казались бы исходящими из точек, отстоящих на расстоянии $d = 20$ см. Так как эти точки лежат в фокальной плоскости линз, то искомая оптическая сила очков $D_{\text{очк}} = -1/d = -5$ дптр.

1224. Исправить недостатки зрения данного человека — значит прописать ему такие очки, чтобы, надев их, он мог четко видеть предметы, находящиеся на расстоянии не ближе $D_0 = 25$ см, а также мог отчетливо видеть бесконечно удаленные предметы.

Для достижения первой цели человеку нужны очки с оптической силой $D_{1\text{очк}} = \frac{1}{D_0} - \frac{1}{d_1} = -6$ дптр (см. задачу 1222). Тогда наиболее далекие предметы, которые сможет рассмотреть этот человек, будут находиться от него на расстоянии $d_2' = \frac{d_2}{1 + D_{1\text{очк}} \cdot d_2} = 0{,}5$ м (см. задачу 1221). Следовательно, для рассматривания очень далеких предметов данному человеку нужны другие очки с оптической силой $D_{2\text{очк}} = -1/d_2 = -8$ дптр (см. задачу 1223). Надев их, он сможет рассматривать предметы, находящиеся не ближе $d_1' = \frac{d_1}{1 + D_{2\text{очк}} \cdot d_1} = 0{,}5$ м. Таким образом, данный человек должен иметь очки с оптической силой $D_{1\text{очк}} = -6$ дптр («для близи») и очки с оптической силой $D_{2\text{очк}} = -8$ дптр («для дали») или очки, у которых нижняя часть каждого стекла изготовлена в виде линзы с оптической силой $D_{1\text{очк}}$, а верхняя — в виде линзы с оптической силой $D_{2\text{очк}}$ (так называемые «бифокальные»).

1225. $D_{\text{очк}} = \frac{1}{D_0} - \frac{1}{d} = +2{,}75$ дптр (см. задачу 1222).

Григорий Авксентьевич Бендриков
Борис Борисович Буховцев
Василий Васильевич Керженцев
Геннадий Яковлевич Мякишев

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ
ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

М., 1976 г., 384 стр., с илл.

Редактор *В. А. Григорова*

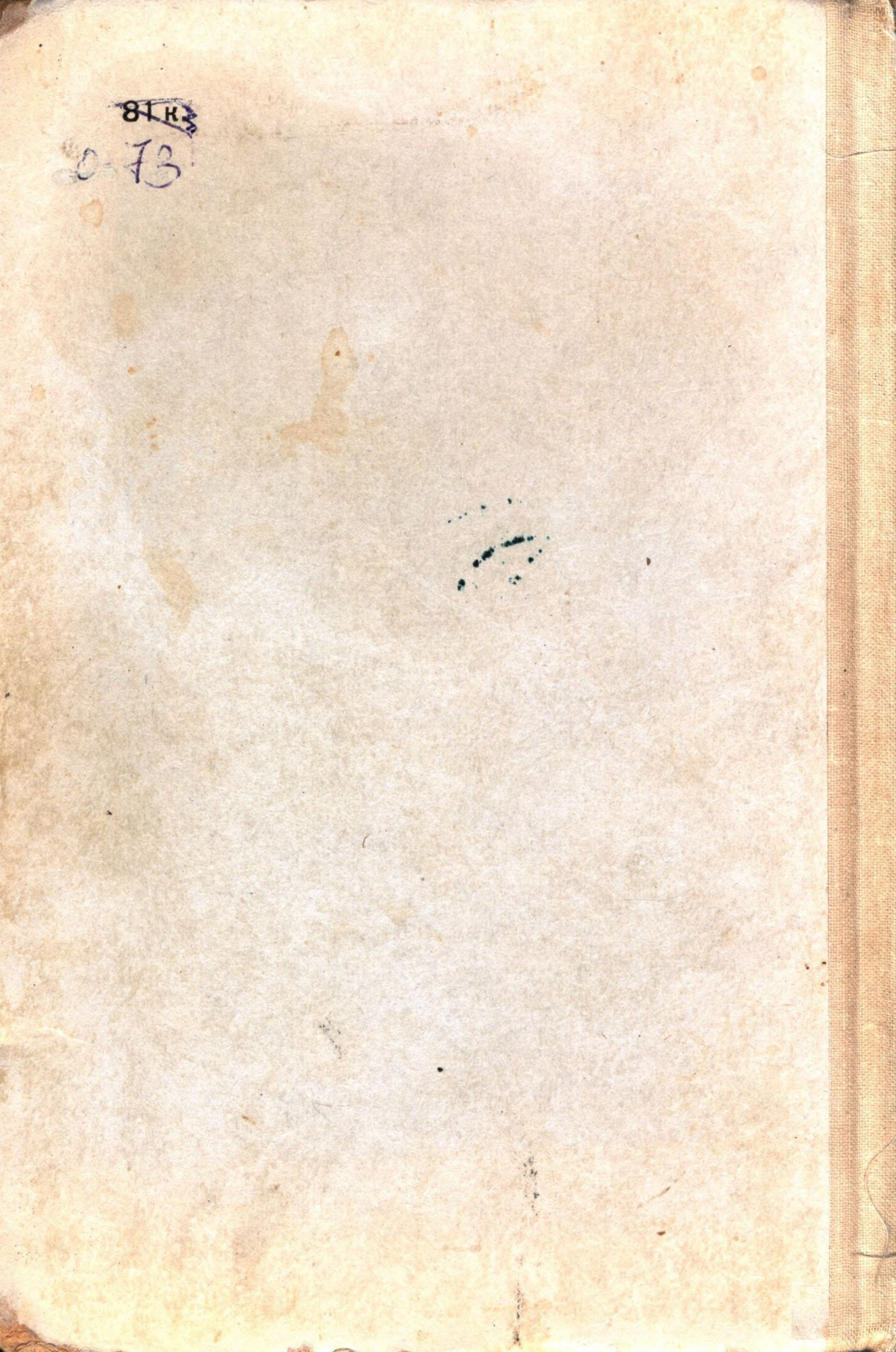
Техн. редактор *Л. В. Лихачева*

Корректор *Е. Я. Строева*

Сдано в набор 24/II 1976 г. Подписано к печати 15/X 1976 г. Бумага 60×90[1]/16, тип. № 3. Физ. печ. л. 24. Условн. печ. л. 24. Уч.-изд. л. 25,53. Тираж 500 000 экз. (2-й завод 300 001—500 000). Цена книги 81 коп. Заказ № 968.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.




ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ